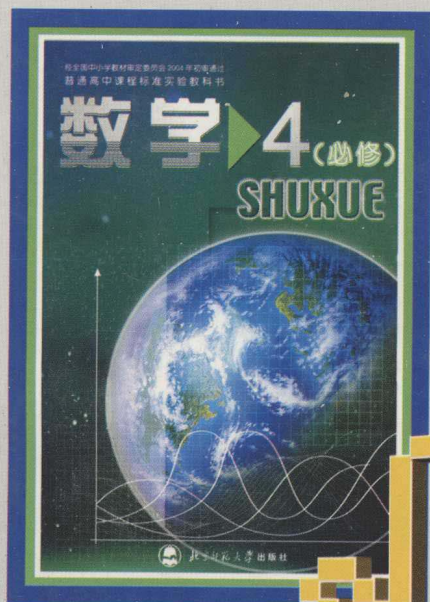


普通高中课程标准实验教科书

数学 4 (必修)



教师教学用书

SHUXUE

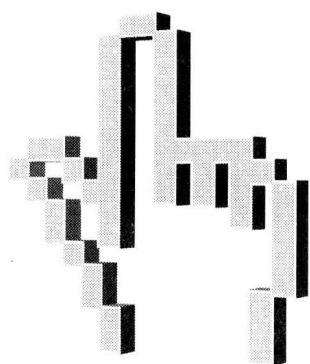
JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU



北京师范大学出版社

普通高中课程标准实验教科书

数 学 ▶ 4 (必修)



教师教学用书
SHUXUE
JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU

主 编 张怡慈 唐安华

北京师范大学出版社

· 北京 ·

市场营销部电话 010-58808015 58804236
教材发展部电话 010-58802783
教材服务部电话 010-58802814
邮购科电话 010-58808083
传 真 010-58802838
编辑部电话 010-58802811 58802833
电子邮箱 Shuxue3@bnup.com.cn

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

<http://www.bnup.com.cn>

出版人:赖德胜

唐山市润丰印务有限公司印装 全国新华书店经销
开本:210 mm×297 mm 印张:8.75 字数:196 千字

2005 年 12 月第 2 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

定价:17.50 元

前 言

本书是北京师范大学出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学4(必修)》的配套教师用书,其内容是介绍本册教科书的教学目的、编写意图与特色、教学内容及课时安排建议、教学建议、评价建议、课程资源参考,同时还提供了本册教科书各章节练习、习题、复习题的参考答案或提示,供执教教师在教学中参考使用.

本书的概述由唐安华编写,第一章 § 1、§ 2、§ 3 由石拥军编写,第一章 § 4、§ 5、§ 6、§ 7、§ 8 由隋丽丽编写,第二章由李方烈编写,第三章由唐安华编写,全书由唐安华统稿审定. 希望各执教教师、教研员能在教学实践中不断总结,不断创新,用自己的勤奋和智慧来充实、完善这本教学参考书,使得课程改革的基本理念和《普通高中数学课程标准(实验)》所设定的课程目标得以真正落实.

2005年11月

概 述

一、内容介绍

全书共三章：第一章三角函数；第二章平面向量；第三章三角恒等变形。

周期现象是自然界中大量存在的现象。第一章从生活中的实例出发，揭示周期现象的特征。从实例出发将锐角推广到任意角并引入了度量角的新方法——弧度制。在此基础上，借助于几何直观——单位圆将锐角三角函数推广到任意角的三角函数；利用单位圆研究了正弦函数、余弦函数、正切函数的诱导公式、图像及其性质；函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像以及同角三角函数的关系。

向量是代数研究的对象也是几何研究的对象，因此它是沟通代数、几何、三角函数的一种工具。教科书第二章从众多的实例分析中引入向量的概念，从位移、速度、力以及力所做的功等物理背景中给出了向量的运算方法。最后给出向量应用的实例。我们可以从这些应用实例中体会向量所带来的好处，认识向量的价值。

三角恒等变形在数学中有一定的应用，它有利于发展学生的推理能力和运算能力。教科书第三章用向量的数量积推出两角差的余弦公式；用提出问题的呈现方式引进两角和与差的三角函数、倍角、半角，和差化积与积化和差等各组公式。最后给出三角函数的简单应用的实例。教科书从具有周期变化规律的实际问题引入，最后用三角函数研究现实生活中的一个周期现象的实际问题结束，体现了教科书强调教学应用的理念。

全书各章中设有“阅读材料”供学生阅读学习，“课题学习”供学生选学，每一小节后面安排了练习。每一大节后面安排了习题 A, B 两组。每一章后面安排了复习题 A, B, C 三组。其中练习和习题 A 组较容易，要求全体学生掌握。B 组有一定难度，大部分学生应会做。C 组较难，有一定的挑战性，供学有余力的学生选做。每章后面的“复习小结”以提出问题的方式呈现，要求学生按所提问题，逐一复习，自己总结。这样做将有助于学生良好学习方法的形成以及学习能力的提高。

二、教学目标

1. 知识与技能

认识和理解任意角、弧度制、任意角的正弦、余弦和正切函数的概念. 了解这三个三角函数的周期性. 理解它们的性质和运算. 会画它们的图像. 了解函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义, 它与函数 $y = \sin x$ 的关系, 理解同角三角函数的基本关系式, 认识和理解平面向量及其相关概念, 理解和掌握向量的表示法, 掌握向量的运算方法并理解其几何意义, 体会向量方法解决实际问题的作用. 会用向量的数量积推导两角差的余弦公式, 并由此出发推出两角和与差的正弦、余弦、正切公式、二倍角公式, 并能运用上述公式进行简单的三角恒等变形. 会用三角函数解决一些简单的实际问题.

2. 过程与方法

通过来自现实而有吸引力的背景材料的展现, 通过数学学习活动中经历知识探究的过程, 给学生以实践的机会和探索的体验. 在这个过程中学习数学知识和技能; 在这个过程中掌握方法、领会一定的数学思想方法. 同时让学生体会过程的重要.

3. 情感、态度和价值观

通过丰富的实际背景的展现和应用问题的求解, 增强学生对数学价值的认识, 并培养学生对数学的学习兴趣. 通过经历知识探究的过程, 培养学生理性、批判和质疑的精神. 形成实事求是、坚忍不拔、锲而不舍追求真理的科学态度和习惯.

三、编写说明

在本册教科书编写中, 尽量体现《普通高中数学课程标准(实验)》的基本理念.

1. 数学来源于生活又应用于生活. 数学教科书应该给学生提供与现实生活联系密切的数学问题, 提供有价值的、必要而又基本的学习内容. 三角函数是基本初等函数, 是刻画周期现象的重要数学模型, 向量是近代数学中主要和基本的数学概念, 是沟通代数、几何与三角函数的一种工具, 也是刻画现实世界的重要数学模型. 三角函数与平面向量都是现代数学的基础, 把它们编排在一本教科书中, 充分体现了向量在处理三角函数问题中的工具作用.

2. 倡导有意义的学习方式, 倡导在“做数学”中学数学的理念. 我们尽可能多地创设问题的情境, 从实例出发, 以提出问题的方式把教学内容呈现在学生面前, 引导学生主动思考、动手实践、合作交流, 在“做数学”的过程中去发现数学, 体验并掌握数学. 在这个“做”的过程中发展学生的学习能力和数学能力. 改变学习三角函数就是背公式、背技巧那样一种纯粹被动的, 只限于接受、记忆、模仿、练习的学习方式. 教科书中设置的“阅读材料”“课题学习”“探究活动”为

学生主动探索、动手实践、合作交流创设了条件.但是我们希望在教师的引导和鼓励下,学生通过收集资料、调查研究、发现和提出更多的自己的学习课题,在对这些课题的研究中自主地学习数学.

倡导学习方式的改变,必然导致教师教学方式的改变.数学教学活动应该是师生互动的活动,而不仅仅是教师讲、学生听的单一模式.教师必须根据教学目标的要求,设计一系列可操作的、能体现教学内容的教学内涵的活动.从某种意义上说,教科书只提供了教学活动的素材,而教学活动的设计、组织和实施还必须由教师根据学生的具体情况去思考、去落实.对于教师而言,这里既有转变观念的问题,也有一个不断学习勇于实践的问题.

3. 三角函数作为实数变量的函数与向量都是刻画现实和描述现实世界的重要数学模型.为了体现这一数学模型观念,教科书提供了丰富的实例,提供了三角函数与向量的物理背景与几何背景.教科书中所设置的课题学习——摩天轮中的数学问题;探究活动——升旗中的数学问题,为学生提供了运用三角函数模型解决实际问题的场景和机会.教科书从实例引入,在应用中结束,希望能较好地体现“学习教学模型的最好方法是经历数学建模的过程”这一观点,并在这个过程中使学生感受到三角函数与向量知识的来龙去脉,发展学生的数学应用意识.

为了实现这个数学目标,教师必须加强学习,开阔自己的数学视野,发展自己的数学应用意识.这是教学的必需,也是教师的责任.这期间教师必然会遇到大量自己不熟悉的東西,这就为教师的备课开辟了更加宽阔的空间.

4. 注重信息技术与课程的整合,在有条件的前提下,我们提倡使用现代信息技术(包括科学计算器、图形计算器、计算机和各种数学软件)进行三角函数的教学,用它们呈现三角函数图像的生成过程;探索函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与 $y = \sin x$ 图像的关系;探究一些周期函数的合成.增强三角函数数学内容的可视性,改变以“纸和笔”为工具的数学学习方式,为学生提供探索数学问题、多角度理解数学思想的机会,而有利于学生认识三角函数的本质.

目 录

概 述	(1)
第一章 三角函数	(1)
§ 1 周期现象	(7)
§ 2 角的概念的推广	(11)
§ 3 弧度制	(14)
§ 4 正弦函数	(19)
§ 5 余弦函数	(27)
§ 6 正切函数	(30)
§ 7 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像	(32)
§ 8 同角三角函数的基本关系	(34)
本章练习、习题、复习题参考答案或提示	(36)
第二章 平面向量	(50)
§ 1 从位移、速度、力到向量	(63)
§ 2 从位移的合成到向量的加法	(66)
§ 3 从速度的倍数到数乘向量	(70)
§ 4 平面向量的坐标	(76)
§ 5 从力做的功到向量的数量积	(78)
§ 6 平面向量数量积的坐标表示	(78)
§ 7 向量应用举例	(82)
本章练习、习题、复习题参考答案或提示	(84)

第三章 三角恒等变形	(97)
§ 1 两角和与差的三角函数	(102)
§ 2 二倍角的三角函数	(108)
§ 3 三角函数的简单应用	(112)
本章练习、习题、复习题参考答案或提示	(120)

第一章 三角函数

一、教学目标

1. 了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度的互化.
2. 借助单位圆理解任意角的三角函数(正弦、余弦、正切)的定义.
3. 能画出 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 的图像,了解三角函数的周期性,并借助三角函数图像及单位圆中的三角函数线推导出诱导公式($\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦、正切);借助三角函数的图像及单位圆中的三角函数线理解正弦函数、余弦函数在 $[0, 2\pi]$, 正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质(如单调性、最大值和最小值、图像与 x 轴交点等).
4. 结合具体实例,了解 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义;能借助计算器或计算机画出 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像,观察参数 A, ω, φ 对函数图像变化的影响.
5. 理解同角三角函数的基本关系式:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

6. 会用三角函数解决一些简单的实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

二、编写意图与特色

1. 树立模型的概念

依据《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称《标准》),将三角函数当做广义的数学模型来处理,较好地渗透了数学建模的思想.教科书中提供了丰富的实际背景,例如在教科书的 §1 中,以观察钱塘江潮波浪每间隔一段时间会重复出现、海洋水面的潮汐现象、地球围着太阳转、钟摆、水车、摩天轮等自然界、日常生活、生产实践中的实例,使学生感受到生活中存在着丰富的周期现象,体会到自然界中存在着大量遵循周期性运动变化的现象,同时也让学生体会到三角函数是刻画周期现象的重要模型的意义.

2. 突出几何直观的作用

教科书整体在知识的处理方式上有所变化,通过大量实例,从数学的角度,来探究周期现象中所蕴涵的规律.例如在本章中,较好地发挥了单位圆的直观作用,帮助学生认识任意角及任意角的三角函数,理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式以及三角函数的图像.特别是借助三角函数的图像来帮助理解三角函数在一个周期上的单调性、最大值和最小

值以及图像与 x 轴的交点等性质. 又如: 在对 $a\sin x + b\cos x$ 的处理上, 利用了波的叠加方法, 使学生更容易理解. 从而, 能帮助学生理解数学、感受数学、认识数学.

3. 突出数学知识的形成、发展过程

教科书在介绍重要的数学概念时, 突出了知识的形成、发展过程, 并以逐级递进、螺旋上升的形式反映数学基本概念形成的“来龙去脉”. 如, 弧度是学生较难接受的概念, 因此, 教科书通过引导学生计算, 发现当半径不同时, 同样的圆心角所对的弧长与半径之比是常数, 然后给出弧度的概念, 称这个常数为该角度的弧度. 其目的是使学生在计算过程中体会弧度也是度量角的一种方法, 它是以长度等于半径的弧长作为度量角大小的单位的一种度量体系.

生活中度量一个东西的方法很多, 一般是使用它的同类来度量. 例如, 我们把周角的 $\frac{1}{360}$ 称为 1° 的角, 用它作为度量单位去度量角的大小, 这种度量角的体系, 得到了表示角的大小的“角度制”. 生活中, 我们也常常用不同类的东西去度量. 例如, 高度与气体压强本不是同一类概念, 物理学中却用水银柱的高度来度量气压.

设以 O 为轮心的车轮在平地上沿一直线滚动, 开始时, 车轮边缘上一点 A 与地面上点 A_1 重合, 经过 Δt 时刻, 车轮边缘上的点 B 与地面上的点 B_1 重合. 显然, 线段 A_1B_1 的长度等于 AB 弧的长度, 这个长度由以 OA 为始边, OB 为终边的角唯一确定. 因此, 我们可以用长度来表示角的大小, 这就是弧度制的实际背景. 当线段 A_1B_1 的长度等于车轮半径时, $\angle AOB$ 叫作 1 弧度的角. 如果车轮半径恰好是一个单位长度, 那么就是用单位长度去度量单位圆周. 由于弧长与半径的比值是一个常数, 因此不同的圆周, 用这样的方法去度量, 得到的结果相同. 用半径量弧长、用半径量圆心角的一个基本思想在于它把长度单位与角度单位统一起来. 它的优越性是十进制制下的实数, 形象的看是把数轴缠绕在单位圆上, 它有助于某些数学问题的表示和研究. 例如, 它帮助我们建立了一个很重要的极限 $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow 0$ 时).

再以周期概念为例. 在教科书中三次出现有关概念, 但对其要求逐级上升. 首先是感受生活中的一些周期现象; 其次是了解三角函数是周期函数; 最后是让学生体会运用三角函数模型来刻画和描述周期变化的现象, 解决一些实际问题.

4. 三角函数是重要的初等函数

三角函数是重要的初等函数, 它是描述周期现象的重要数学模型, 在数学和其他领域中有着重重要的作用. 在中学阶段, 三角函数的学习是发展学生函数观念的重要环节. 这是因为, 在学生学过的许多函数中, 三角函数是第一个具有周期性的函数, 它能发展学生的函数观念, 扩大学生关于一般函数理论知识的领域. 从生产和生活实际上来看, 三角函数的用途十分广泛. 例如, 代数、几何、解析几何与微积分等数学科目中, 都要用到三角函数知识. 在物理课程中的力学、光学、电学, 特别是对振动过程的研究, 也都要用到三角函数知识.

三角函数的定义, 强调了平面坐标, 淡化了三角函数线, 突出了角的终边与单位圆的交点坐标, 从而引出三角函数的概念. 坐标已经很直观了, 如果还要用三角函数线讲解就走了弯路, 这是一个非常好的创新点.

5. 学习三角函数的两个阶段

在初中阶段,学生学习了 $0^\circ\sim 90^\circ$ 的三角函数的概念,但对其性质没有作充分的研究,即没有把三角函数作为一个函数来加以研究,而关注的是三角函数值,并将其重点放在利用三角函数的定义解决直角三角形中的有关问题上。

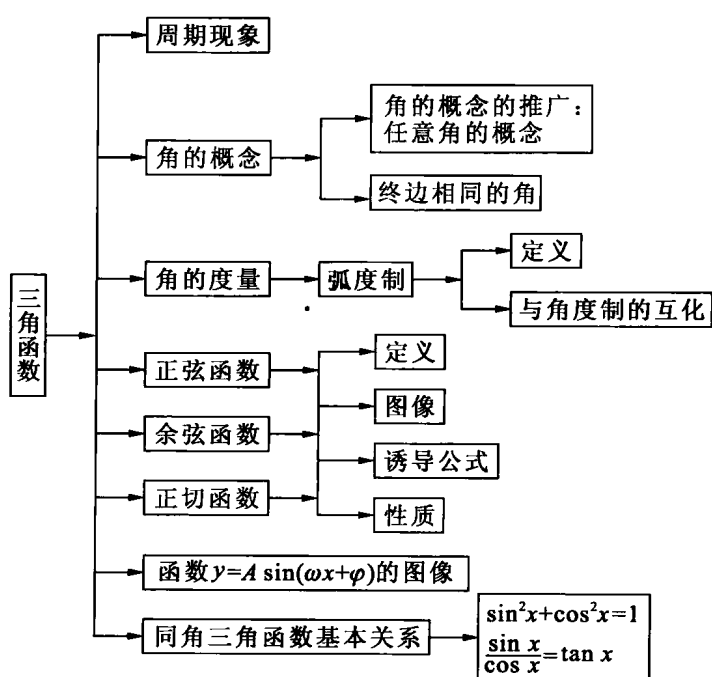
在高中阶段,系统地引入了任意角三角函数的概念,借助单位圆及三角函数的图像来研究作为实数变量的函数性质.学习诱导公式进而学习以和差公式为代表的一系列三角变形公式,并使学生会用三角函数知识解决一些简单的实际问题。

6. 强调信息技术的运用

教科书对适合借助信息技术学习的内容,提出了借助计算机或其他数学软件学习的建议.如,计算三角函数值、画正弦函数的图像、画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像,分析参数 A,ω,φ 的变化对函数的影响等.其主要目的是,可以把学生从繁琐复杂的技巧性运算中解脱出来,为学生借助信息技术去探索数学规律、解决一些实际问题提供平台,为帮助学生更好地理解数学概念、更深刻地揭示数学的本质营造较开放的研讨氛围,为从事一些富有开放性、探究性和创造性的数学活动提供实践的空间.另一方面,现代信息技术在改变学生的学习方式上发挥了更大的作用.提倡并鼓励学生使用现代信息技术手段,使静止图像变为动态图像,不仅有利于探索数学的结论,与此同时,还可以帮助学生处理一些繁杂的计算,可以赢得更多的精力和时间去探索和发现数学的规律.事实表明,现代信息技术在高中数学课程中还有较大的开发空间,如利用校内外的教育资源,通过网站去搜索一些与当前学习有关的资料等.这不仅有助于学生的自主学习,有助于学生自主学习能力的增长,而且也有助于学生去体验如何合理地使用信息技术。

三、教学内容及课时安排

1. 结构框图



2. 课时安排

本章教学时间约需 17 课时,具体分配如下,仅供参考.

§ 1 周期现象	约 1 课时
§ 2 角的概念的推广	约 1 课时
§ 3 弧度制	约 1 课时
§ 4 正弦函数	约 4 课时
§ 5 余弦函数	约 2 课时
§ 6 正切函数	约 1 课时
§ 7 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像	约 3 课时
§ 8 同角三角函数的基本关系	约 2 课时
本章小结建议	约 2 课时

四、评价建议

1. 重视对学生学习数学过程的评价

对学生数学学习的评价既要重视结果,又要注重学习过程的评价.其中包括:学生参与数学学习活动的热情、态度、自信心、勤奋、刻苦以及克服困难的毅力等思维品质.同时还包括,独立思考的习惯、与同伴合作交流的意识、数学认知发展的水平等.

2. 重视对学生能力的评价

学习能力的获得是提高其自主学习能力、终身学习能力以及实现可持续发展的关键.因此,对于能力的评价应贯穿学生数学知识的建构过程与解决问题的始终.例如,评价正弦函数性质的学习过程的着眼点,应放在学生是否从正弦函数图像中提取有效的信息,是否能够独立思考,并在此基础上能够与他人很好地交流与合作.评价时还应当关注学生能否在解决问题的过程中,对解决问题的方案进行质疑、调整和完善;注重学生能否将解决问题的方案与结果,用书面或口头等形式比较准确地表达并进行交流;关注学生对自己提出的问题和解决问题的过程进行自评和互评等.

再比如,在课题学习或建模学习过程中,应注意关注学生是否具有问题意识;是否善于发现和提出问题;是否选择有效的方法和手段来收集信息、联系相关知识、提出解决问题的思路,建立恰当的数学模型,开展有效的建模活动.

3. 评价方式、方法的多元化

众所周知,仅以分数作为评价学生数学学习的唯一标准,是有悖于教育目标的.对于教育现象的纷繁复杂,教育对象(学生)的千差万别,以及学生对数学学习的态度、合作交流的能力、对问题的敏锐程度、思考问题的习惯与深度等这一系列情形,我们难以用一张试卷、一个量化的分数去衡量.因此,定性评价是不可缺少的.

定性的评价学生的数学学习,可以通过观察、记录、与学生交流、解决或探究开放的问题、

教给学生数学学习研究的任务等方式,采用写评语、点评(包括“师对生”和“生对生”的点评)、倾听、欣赏、调查报告、课题研究成果等多种方法进行评价.教师要正确认识和对待学生在学习数学过程中出现的问题、产生的错误,这些都是在所难免的,也是正常的.在解决具体的数学问题中,往往有多种途径、多种思路、多种方案,教师不能轻易地说哪种“好”,哪种“不好”.面对学生理解的多样性,只要是合理的,我们都应给予鼓励和表扬,使学生开阔思路,扩大视野,并逐步引导他们把握事物的本质,增进对数学的理解.因此定性评价要从多角度、多方面地看到学生的进步,多用肯定、赞扬等鼓励性语言,使评价真正发挥激励和促进学生发展的功能.

五、课程资源参考

早期三角学不是一门独立的学科,而是依附于天文学,是天文观测结果推算的一种方法,因而最先发展起来的是球面三角学.希腊、印度、阿拉伯数学中都有三角学的内容,大都是天文观测的副产品.例如,古希腊门纳劳斯(Menelaus of Alexandria,公元100年左右)著《球面学》,提出了三角学的基础问题和基本概念,特别是提出了球面三角学的门纳劳斯定理;50年后,另一个古希腊学者托勒密(Ptolemy)著《天文学大成》,初步发展了三角学.而在公元499年,印度数学家阿耶波多(\bar{A} ryabhata I)也表述出古代印度的三角学思想;其后的瓦拉哈米希拉(Varahamihira,约505—587)最早引入正弦概念,并给出最早的正弦表;公元10世纪的一些阿拉伯学者进一步探讨了三角学.当然,所有这些工作都是天文学研究的组成部分.直到纳西尔丁(Nasired-Dinal Tusi,1201—1274)的《横截线原理书》才开始使三角学脱离天文学,成为纯粹数学的一个独立分支.而在欧洲,最早将三角学从天文学独立出来的数学家是德国人雷格蒙塔努斯(J. Regiomontanus,1436—1476).

雷格蒙塔努斯的主要著作是1464年完成的《论各种三角形》.这是欧洲第一部独立于天文学的三角学著作.全书共5卷,前2卷论述平面三角学,后3卷讨论球面三角学,是欧洲传播三角学的源泉.雷格蒙塔努斯还较早地制成了一些三角函数表.雷格蒙塔努斯的工作为三角学在平面和球面几何中的应用建立了牢固的基础.他去世以后,其著作手稿在学者中广为传阅,并最终出版,对16世纪的数学家产生了相当大的影响,也对哥白尼等一批天文学家产生了直接或间接的影响.

三角学一词的英文是 trigonometry,来自拉丁文 tuigonometuia.最先使用该词的是文艺复兴时期的德国数学家皮蒂斯楚斯(B. Pitiscus,1561—1613),他在1595年出版的《三角学:解三角形的简明处理》中创造这个词.其构成法是由三角形(tuiangulum)和测量(metuicus)两字凑合而成.要测量计算离不开三角函数表和三角学公式,它们是作为三角学的主要内容而发展的.

16世纪三角函数表的制作首推奥地利数学家雷蒂库斯(G. J. Rheticus,1514—1574).他1536年毕业于滕贝格(Wittenberg)大学,留校讲授算术和几何.1539年赴波兰跟随著名天文学家哥白尼学习天文学,1542年受聘为莱比锡大学数学教授.雷蒂库斯首次编制出全部6种

三角函数的数表,包括第一张详尽的正切表和第一张印刷的正割表.

17 世纪初对数发明后大大简化了三角函数的计算,制作三角函数表已不再是很困难的事,人们的注意力转向了三角学的理论研究.不过三角函数表的应用却一直占据重要地位,在科学研究与生产生活中发挥着不可替代的作用.

三角公式是三角形的边与角、边与边或角与角之间的关系式.三角函数的定义已体现了一定的关系,一些简单的关系式在古希腊人以及后来的阿拉伯人中已有研究.

文艺复兴后期,法国数学家韦达(F. Vieta)成为三角公式的集大成者.他的《应用于三角形的数学定律》(1579)是较早系统论述平面和球面三角学的专著之一.其中第一部分列出 6 种三角函数表,有些以分和度为间隔.给出精确到 5 位和 10 位小数的三角函数值,还附有与三角值有关的乘法表、商表等.第二部分给出造表的方法,解释了三角形中诸三角线量值关系的运算公式.除汇总前人的成果外,还补充了自己发现的新公式.如正切定律、和差化积公式等.他将这些公式列在一个总表中,使得任意给出某些已知量后,可以从表中得出未知量的值.该书以直角三角形为基础.对斜三角形,韦达仿效古人的方法化为直角三角形来解决.对球面直角三角形,给出计算的完整公式及其记忆法则,如余弦定理.1591 年韦达又得到多倍角关系式,1593 年又用三角方法推导出余弦定理.

1722 年英国数学家棣莫弗(A. De Moivre)得到以他的名字命名的三角学定理

$$(\cos \theta \pm i \sin \theta)^n = \cos n\theta \pm i \sin n\theta,$$

并证明了 n 是正有理数时公式成立;1748 年欧拉(L. Euler)证明了 n 是任意实数时公式也成立,他还给出另一个著名公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$,对三角学的发展起到了重要的推动作用.

近代三角学是从欧拉的《无穷分析引论》开始的.他定义了单位圆,并以函数线与半径的比值定义三角函数,他还创用小写字母 a, b, c 表示三角形三条边,大写字母 A, B, C 表示三角形三个角,从而简化了三角公式.使三角学从研究三角形解法进一步转化为研究三角函数及其应用,成为一个比较完整的数学分支学科.而由于上述诸人及 19 世纪许多数学家的努力,形成了现代的三角函数符号和三角学的完整的理论(摘自中国基础教育 21 世纪).

参考文献

梁宗巨等.世界数学通史(下).沈阳:辽宁教育出版社,2001

§ 1 周期现象

一、教学目标

1. 通过实例使学生了解自然界存在着丰富的周期现象.
2. 通过实例使学生经历数据分析以及观察散点图特征的学习过程,感受周期现象.

二、设计思路

1. 本节是三角函数一章的开篇,主要解决为什么要学习三角函数的问题.因为自然界中存在着大量的周期现象,而三角函数是刻画周期现象的一类重要模型,正是为了研究周期现象中蕴涵的数学规律,我们才学习三角函数.

2. 怎样研究周期现象呢?本节给出了一个完整的例子——潮汐现象.流程图见图 1-1.

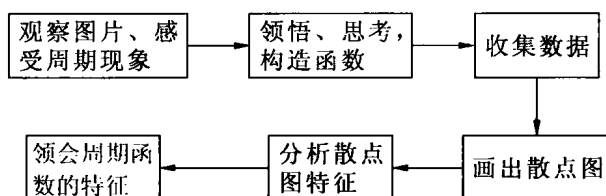


图 1-1

设计思路体现三个层次,第一个层次是感知,在“问题提出”中首先观察钱塘江潮的图片,使学生感受周期现象的存在.第二个层次是领悟、思考,在“分析理解”中构造水深 H 和时间 t 的函数,收集水深 H 和时间 t 的数据,画出散点图.第三个层次是通过对散点图的分析,领会周期现象的特征.

3. 教科书中的例 1、例 2 和例 3 使学生认识到自然界存在丰富的周期现象.

三、教学建议

这一节的重点是让学生通过身边大量的周期现象实例,来体验、感悟周期现象的特征.

1. 问题提出部分

由于自然界中存在大量的周期现象,因此,教科书中提出观察钱塘江潮图片中波浪的规律,除此之外还可以用课件展示单摆,弹簧振子,圆上一点的运动,太阳、地球、月亮的运行,以及音乐,波浪,四季变化,心脏的跳动等实例,使学生感受周期现象在生活和自然界中是广泛存在的.

2. 分析理解部分

为学生提供一种用数学研究问题的方法,先构造一个函数,通过收集数据,将数据转化成

散点图. 研究该函数的图像特征, 有条件的学校可以用 Excel 等软件完成. 教师可以根据教学实际增加几个实例, 用 Excel 制散点图非常方便, 不会占用太多的课时.

下面再提供一些具体实例, 供参考使用.

我们通常所说的“年”“月”“日”, 实际上是自然界存在的周期性天文现象. 例如, 太阳东升西落的周期就是“一日”; 月亮由圆到缺, 又由缺到圆, 这就是“一月”; 冬去春来, 循环往复, 这就是“一年”. 这些周期性现象向人们提示了时间的进程.

太阳表面的太阳黑子活动. 黑子是光球层上的巨大气流旋涡, 大多呈现近似椭圆形, 在明亮的光球背景反衬下显得比较暗黑, 但实际上它们的温度高达 $4\ 000\ ^\circ\text{C}$ 左右, 倘若能把黑子单独取出, 一个大黑子便可以发出相当于满月的光芒. 太阳表面上黑子出现的情况是不断变化的, 这种变化反映了太阳辐射能量的变化. 太阳黑子的变化存在复杂的周期现象, 平均活动周期为 11.2 年.

在医学上, 心脏收缩和舒张有规律地交替进行, 称为心动周期. 心房与心室每收缩和舒张一次, 即为一个心动周期. 正常心动周期的顺序为: 首先两心房收缩, 一般占 0.1 秒(以每分钟心跳 75 次计算); 继而心房舒张, 持续 0.7 秒. 当心房收缩时, 心室处于舒张状态, 持续 0.5 秒; 心房进入舒张后不久, 心室开始收缩, 持续 0.3 秒, 随后又进入舒张状态. 在正常情况下, 左、右心房或左、右心室的收缩和舒张活动几乎是同步进行的. 另一方面, 无论心房或心室, 收缩期均短于舒张期. 心动周期的持续时间与心跳频率有关, 心率过快, 心动周期时间就过短, 心房和心室的舒张时间也过少, 这样就会影响心脏内血液充盈程度, 降低每次心搏的输出量.

毛发的生长周期一般可分为生长期、休止期、退行期(或称脱落期). 头发的生长期约 3~5 年, 少数可达 10 年以上, 休止期可能不超过 2~3 个月, 退行期约 1~2 个月. 而眉毛、睫毛的生长期为 2 个月, 休止期可长达 9 个月. 毛发生长的速度受性别、年龄、部位和季节等因素的影响. 如头发每天生长约 0.3~0.4 毫米, 腋毛则为 0.2~0.38 毫米. 毛发生长以 15~30 岁时最旺盛. 夏季比冬季长得略快, 白天比晚上长得略快.

动物也有光周期现象. 在脊椎动物中表现得最典型的就 是鸟类. 很多鸟类的迁徙都是由日照长短的变化所引起. 由于日照长短的变化是地球上最严格和最稳定的周期变化, 所以是生物节律最可靠的信号系统. 鸟类在不同年份迁离某地和到达某地的时间都不会相差几日, 如此严格的迁徙规律是任何其他因素(如温度的变化、食物的缺乏等)都不能解释的. 因为这些因素各年相差很大. 同样, 各种鸟类每年开始生殖的时间也是由日照长度的变化所决定的. 温带鸟类的生殖腺一般在冬季时最小, 处于非生殖状态. 随着春季的到来, 生殖腺开始发育, 随着日照长度的增加, 生殖腺的发育越来越快, 直到产卵时生殖腺才达到最大. 生殖期过后, 生殖腺便开始萎缩, 直到来年春季才再次发育. 鸟类生殖腺的这种年周期发育是与日照长度的周期变化完全吻合的.

化学元素的性质取决于核外电子的分布, 而核外电子的分布是周期性地重复着类似的排列, 于是元素的性质也就出现了周期性的变化, 根据这些变化科学家制定了元素周期表以揭示