最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

初中·平面几何

中央民族大学出版社

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

初中　平面几何

张　程　章建跃　李　英
张秀平　刘仁权　朱文芳

中央民族大学出版社

责任编辑：凌　弘
封面设计：金　文

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧
初中　平面几何
*
中央民族大学出版社出版
（北京西郊白石桥路 27 号）
（邮政编码：100081　电话：68472815）
新华书店北京发行所发行
北京京海印刷厂印刷

787×1092　32 开　6　印张　110 千字
1997 年 6 月第 3 次印刷
印数：19001—25000 册

ISBN 7-81001-435-8/G·179
定价：5.50 元

目　录

一、三角形的全等与相似……………………………………(1)
二、三角形中的边角不等关系……………………………(14)
三、面积与等积变换(1) …………………………………(25)
四、面积与等积变换(2) …………………………………(38)
五、三角形的心……………………………………………(52)
六、圆的问题(1) …………………………………………(68)
七，圆的问题(2) …………………………………………(85)
八、解三角形………………………………………………(99)
九、几何变换………………………………………………(117)
十、凸图形和覆盖问题简介………………………………(133)
习题解答或提示……………………………………………(148)

一、三角形的全等与相似

学习平面几何的主要目的是培养学生的空间想象能力和逻辑推理能力，平面几何的主要特征之一就是图形，而其中最基本的图形是三角形，从而研究三角形就成了平面几何的主要任务之一。关于三角形我们想分两部分来介绍。这一讲我们主要涉及三角形的全等和相似。下一讲我们介绍三角形的不等关系。

（一）全等三角形

在平面几何中，有很多问题都可以借助于三角形的全等来解决。比如证明线段相等、角相等、平行垂直关系等。竞赛里要用的知识一般不超出中学课本，只是题目本身更复杂更灵活一些，需要学生具有较敏锐的观察力和丰富的想象力。

例1： 如图1-1，在正$\triangle ABC$的边AB、BC上分别取点D、E，使$AD=BE$，连结AE、CD交于点M，作$CN\perp AE$于N，求证$CM=2MN$。

分析： 我们知道$\triangle CMN$是直角三角形，于是只要证明$\angle 1=30°$，即$\angle 2=60°$。而$\angle 2=\angle 3+\angle 4$，于是我们只要证明$\angle 4=\angle 5$即可，这就使问题变得非常明显地要证$\triangle ABE\cong\triangle CAD$。

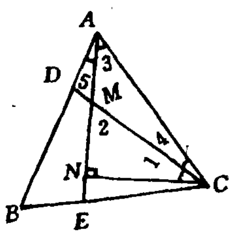

图 1-1

证明：$\because \triangle ABC$是正三角形，$\therefore AB=CA$，$\angle B=\angle CAD=60^\circ$，由已知$BE=AD$，故$\triangle ABE\cong\triangle CAD$。从而$\angle 5=\angle 4$。于是$\angle 2=\angle 3+\angle 4=\angle 3+\angle 5=60^\circ$。又$\triangle CNM$是直角三角形，$\therefore CM=2MN$。

注：本题用到了这一结论：在直角三角形中，若有一角为30°，则此角所对直角边等于斜边的一半。

本例在图形中就有我们直接需要的三角形，但在竞赛中，这种题目并不多见，更常见的情况是需要我们添加一些辅助线，构造我们所需要的全等三角形。

例2：如图1-2，$\triangle ABC$是等腰三角形，在AB上取点D，在AC的延长线上取点E，使$BD=CE$，连结DE交BC于G，求证：$DG=GE$。

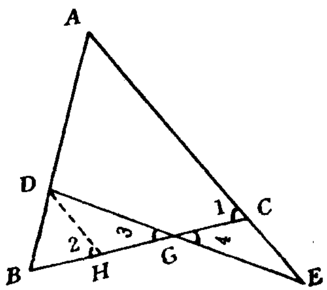

图 1-2

分析：要证$DG=GE$，只要证明它们所在的两个三角形全等即可，但很明显这两个三角形是不全等的。（$\triangle BDG$比$\triangle GEC$"大"），于是要求我们构造出两个全等三角形来。一般容易想到下面几种方法：

1．把$\triangle BDG$变"小"一点。

2. 把$\triangle GEC$变“大”一点。

3. 把$\triangle BDG$变“小”一点，同时把$\triangle GEC$变“大”一点。

证明：过D作$DH\parallel AE$交BC于H。于是$\angle 1=\angle 2$，而$\triangle ABC$是等腰三角形，故$\angle B=\angle 1$于是$\angle B=\angle 2$，即$\triangle DBH$也是等腰三角形，$\therefore BD=DH$。又由已知：$BD=CE$，$\therefore DH=CE$。再由$DH\parallel AC$知$\angle HDG=\angle E$，又$\angle 3=\angle 4$（对顶角），$\therefore \triangle DHG\cong\triangle ECG$，$\therefore DG=GE$。

注：第二种方法过E作AB的平行线，第三种方法过D、E分别作BC的垂线，请读者自己添加辅助线并证明。

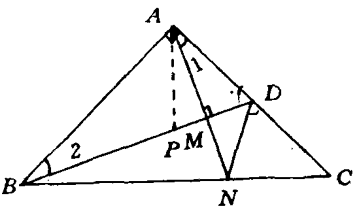

图 1-3(a)

例3：如图1-3(a)．BD是等腰直角三角形ABC腰上的中线，$AM\perp BD$与M，延长AM交BC于N。求证：$\angle ADB=\angle CDN$。

分析：怎样添加辅助线方能使含有AD、DC的两个三角形全等呢？我们把$\triangle AMD$变“大”使之和$\triangle CDN$全等；或者作另外一个三角形与$\triangle CDN$全等。且此三角形的一个角与$\angle ADM$相等。

证法一：作$\angle BAC$的角平分线交BD于P。则$\angle PAD=\angle BAP=\angle C=45°$，且$AD=DC$。考虑两个直角三角形$AB$

M和AMD，易知$\angle 1=\angle 2$。又$\angle BAP=\angle C$，$AB=AC$，$\therefore$ $\triangle ABP\cong\triangle CAN$。$\therefore AP=CN$，于是$\triangle APD\cong\triangle CND$。$\therefore$ $\angle ADB=\angle CDN$。

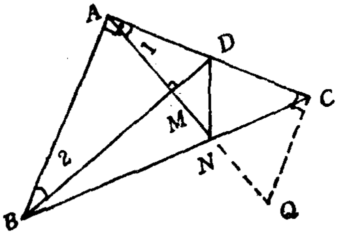

图 1-3(b)

证法二：作$CQ\perp AC$交AN的延长线于Q。如图 1-3(b)

由证法一知$\angle 1=\angle 2$。又 $AB=AC$，$\angle BAD=\angle ACQ=90°$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CAQ$

$\therefore\angle ADB=\angle CQA$且$AD=CQ$

于是$CD=CQ$，又$\angle DCN=\angle QCN=45°$

$\therefore\triangle DCN\cong\triangle QCN$。$\therefore\angle CDN=\angle Q$

$\therefore\angle ADB=\angle CDN$。

注：本题用到了两对三角形全等。当我们要证一对三角形全等还缺一个条件时，常常再选另一对全等三角形。这在证明里是常见的。

在几何证明题里，添加正确的辅助线是很困难的也是很关键的。我们一般是从结论入手，用逆推法逐步探索，便可较容易地添加正确的辅助线。

例4：如图1-4。在$\triangle ABC$中，BM是AC边上的中线，D

是BC边上一点，且$2BD=DC$。连线AD交BM于E，求证：$BE=EM$

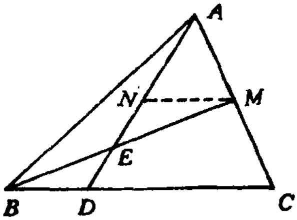

图 1-4

分析：要证明$BE=EM$，就要找一对全等三角形，只要过M作BC的平行线就可以了。

证明：过M作$MN \parallel BC$交AD与N。易知MN为$\triangle ADC$的中位线，故$MN=\frac{1}{2}DC$。而$BD=\frac{1}{2}DC$，$\therefore MN=BD$。又$MN \parallel BC$，$\therefore \angle NME=\angle DBE$，$\angle MNE=\angle BDE$，$\therefore \triangle MNE \cong \triangle BDE$。于是：$BE=EM$。

注：在三角形中，过一边的中点作另一边的平行线便为三角形的中位线。这一很简单的东西有时会成为解题的重要途径。它很容易地把中线和中位线联系在一起。

例5：如图1-5所示，BE、CF是$\triangle ABC$的两条高，D、

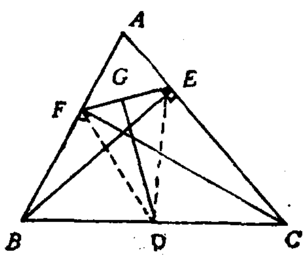

图 1-5

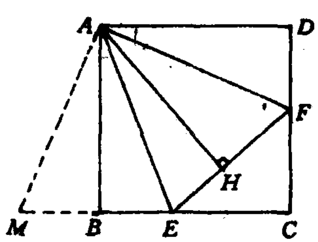

图 1-6

G分别是BC，FE的中点，求证$DG \perp FE$。

分析：很自然，我们要把DE，DF连起来，于是问题转化为证明$\triangle DEF$为等腰三角形，即证$DE=DF$。而在直角三角形BCF和BCE中，D为斜边中点，故$DF=DE=\frac{1}{2}BC$。

证明：从略。

注：这虽然不是三角形全等问题，但这一方法在我们证明三角形中边相等时是很有用的。

例6：如图1-6。在正方形$ABCD$内作$\angle EAF=45°$，E、F分别在BC，CD上。$AH \perp EF$。求证：$AH=AB$

分析：乍看之下，似乎只要证明$\triangle ABE \cong \triangle AHE$就行了。这里面有一条公用边和一对直角。然而仔细找一找另外一对边或一对角，就会发现实在不大容易找到。题目里给的条件$\angle EAF=45°$也还没用上。怎样才能把这个条件用上呢？看：$\angle DAF+\angle BAE=45°$，如果能把这两个角放在一起就好了。试试看！

证明：延长CB至M使$BM=DF$，连结AM。

$\because BM=DF$，$AB=AD$，$\angle ABM=\angle D=90°$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF$，$\therefore AM=AF$，$\angle BAM=DAF$

于是$\angle MAE=\angle EAF=45°$

而AE是公用边，$\therefore \triangle AME \cong \triangle AFE$

又AB，AH分别为两三角形的对应高。

$\therefore AB=AH$。

注：(1) 本题中要证相等的两条线段不容易找到它们是对应边的两个全等三角形，于是我们找两个全等三角形，使

得它们为具有相同性质的对应线段，本题中为对应高，还可以为对应角平分线、中线、中位线等等。

(2) 把两个图形搬在一起在几何中是一个常用手法，是证明题中的一个重要手段。在以后关于平移和旋转这一讲中还有更详细的论述。在本题中实际上是相当于把$\triangle ADF$绕A点顺时针旋转90°。

例7：如图1-7。在正方形$ABCD$中，E是BC延长线上一点，F为BC中点，过F作AF的垂线与$\angle DCE$的角平分线交于G点。求证：$AF=FG$。

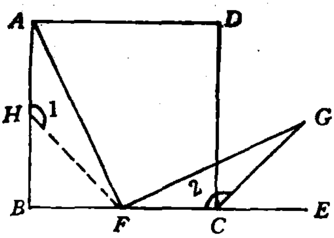

图 1-7

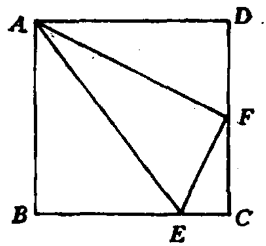

图 1-8

分析：由图形的位置容易看出，我们需要在AB边上找一点H，使得$\triangle AHF$与$\triangle FCG$全等。很明显，要找的这一点应为AB的中点。

证明：取AB的中点H，连结HF。

$\because AF\perp FG$，$AB\perp BC$，$\therefore \angle HAF=\angle CFG$。

又$HB=BF$，CG为$\angle DCE$的平分线，

$\therefore \angle BHF=\angle ECG=45^\circ$，$\therefore \angle 1=\angle 2=135^\circ$

而$AH=FC$，$\therefore \triangle HAF\cong\triangle CFG$。

$\therefore AF=FG$。

例8：如图1-8、在正方形$ABCD$中，F是CD边中点，$\angle EAF=\angle FAD$，E在BC边上。求证：$AE=EC+CD$。

分析：关于证明一条线段等于两条线段之和，一般来说，我们有两种思考方法，一种是把长线段分成两段，证明它们与两条短线段分别相等；另一种思考方法就是把两条短线段中的一条延长至和长线段相等，证明延长的那段和另一条短线段相等，或将某一条短线段延长，使延长的那段和另一条短线段相等，证明整个线段和长线段相等。

对于第一种想法，由于有$\angle DAF=\angle FAE$，且$\angle D=90°$，于是作$FP\perp AE$于P，便有$\triangle DAF\cong\triangle PAF$。见图1-8(a)。对于第二种想法，延长$BC$至$Q$，使$CQ=CD$，如图1-8(b)。易证$\triangle CQF\cong\triangle DAF$。往下的证明便简单了。

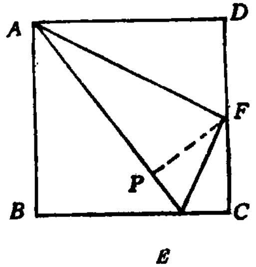

图 1-8(a)

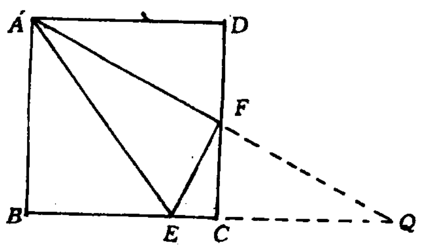

图 1-8(b)

证明：从略。

例9：如图1-9等腰三角形ABC顶角$\angle A=100°$，BE为$\angle B$的角平分线。求证：$BC=BE+EA$。

分析：同上例。这里我们采用第二种方法。

证明：延长BE至G使$EG=AE$。在BC上取点F使$BF=B$

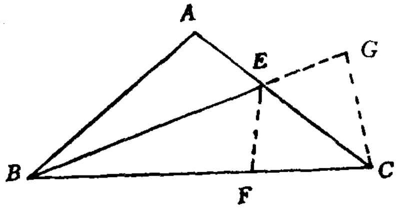

图 1-9

A。连结EF、CG。易知$\triangle ABE \cong FBE$。即 $AE = FE$。从而 $EG = FE$，$\angle BEF = \angle BEA$。由角之间的数量关系易知：

$\angle BEA = \angle BEF = \angle FEC = \angle CEG = 60°$

$\therefore \triangle FEC \cong \triangle GEC$，即$\angle CFE = \angle G = 80°$

于是$\angle BCG = 80°$，故$\triangle BCG$为等腰三角形

$\therefore BC = BG$。

以上我们介绍了全等三角形的几个典型例题和方法，希望读者做一下总结，并在做题时多加体会。

（二）相似三角形

例10：如图1-10。在$\triangle ABC$中AB边上任取一点 C_1，连结CC_1，分别过顶点A、B作CC_1的平行线，这两条平行线分别交BC、AC的延长线于B_1，A_1。求证：$\dfrac{1}{AA_1} + \dfrac{1}{BB_1} = \dfrac{1}{CC_1}$。

证明：$\because CC_1 \parallel AA_1$，$\therefore \triangle BCC_1 \backsim \triangle BA_1A$。

$$\therefore \frac{CC_1}{A_1A} = \frac{BC_1}{BA} \tag{1}$$

同理：$$\frac{CC_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{AB} \tag{2}$$

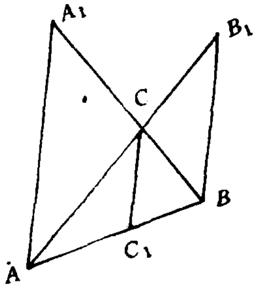

图 1-10

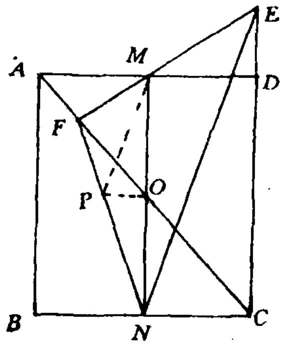

图 1-11

将(1)(2)两式相加得：

$$\frac{CC_1}{A_1A}+\frac{CC_1}{B_1B}=\frac{BC_1}{BA}+\frac{AC_1}{AB}=1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}.$$

例11：如图1-11．在矩形$ABCD$中，点M、N分别是AD、BC的中点．E是CD延长线上一点，连结EM并延长交AC于F，求证：$\angle FNM=\angle MNE$．

分析：要证明角相等或线段成比例，一般要用全等或相似，而本题中的全等形不大容易构造，因而我们利用相似形．过O点作$OP\parallel BC$交FN于P，则相似形立刻就出来了．

证明：AC的中点为O，过O作$OP\parallel BC$交FN于P，则$\triangle FOP\backsim\triangle FNC$，于是$\frac{FP}{FN}=\frac{FO}{FC}$．

同理，由$OM\parallel CD$知$\frac{FO}{FC}=\frac{FM}{FE}$．

$\therefore \quad \frac{FP}{FN}=\frac{FM}{FE}$，于是$PM \parallel NE$

$\therefore \angle PMN=\angle MNE$。

易知$\triangle PNM$为等腰三角形，$\therefore \angle FNM=\angle PMN$

即：$\angle FNM=\angle MNE$。

注：(1) 本题事实上是用了平行线分线段成比例定理及其逆定理。

(2) 在利用相似形解题时，有时并不是一下子就能看透其中的因果关系，不妨把有关系的东西写出来，看一看哪个式子是有用的。

例12：如图1-12。在直角$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，CH为AB边上的高。$\angle A$的角平分线交BC于D，AD与CH交点为E，过E作AB的平行线交BC于F。求证：$CD=BF$。

分析：由上题的注(2)，先把题目中已知的关系：直角三角形、角平分线、平行线所得的比例关系列出，再找其中的关系。

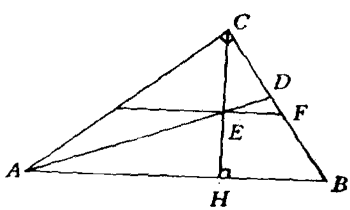

图 1-12

证明：由$EF \parallel AB$知：$\frac{CE}{EH}=\frac{CF}{FB}$

又AD是$\angle A$的平分线，$\therefore \frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$。

再由$\triangle ABC$是直角三角形及CH是高，知

$\triangle ACH \backsim ABC$，$\therefore\ \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AH}{AC}$

在$\triangle ACH$中，仍由AE是$\angle A$的角平分线得：$\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{HE}{EC}$

$$\therefore \frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{AH}{AC}=\frac{HE}{EC}=\frac{FB}{FC}.$$

取两端两个式子并加以变形，得$\dfrac{CD}{DF+FB}=\dfrac{FB}{DF+CD}$

整理得：$CD=BF$。

关于相似形的题目很多，花样也是灵活多变，希望同学们能够通过做题熟练掌握。

练 习 二

1．在锐角$\triangle ABC$中，D为BC的中点，分别以AB、AC为斜边向外作等腰直角三角形ABH，AGC。求证：$HD=DG$，$HD\perp DG$。

2．已知任意$\triangle ABC$，以AB、BC、AC为一边依次向$\triangle ABC$外作正$\triangle ABP$，$\triangle BCM$，$\triangle CAN$。

求证：$AM=BN=CP$。

3．在正$\triangle ABC$内取一点D，使得$BD=AD$，BF是不同于BC的线段，$\angle FBD=\angle DBC$，且$BF=AB$，求$\angle BFD$的度数。

4．$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，D为AB上一点，$DE\perp BC$

于E，$BE=AC$。若$BD=\frac{1}{2}$，$BC+DE=1$。

求证：$\angle ABC=30°$。

5．已知直角$\triangle ABC$，$\angle A$为直角，过AB、AC依次向形外作正方形$ABDE$，$ACFG$。CD、BF分别交AB、AC于K，L。

求证：$AK=AL$。

6．已知AD是等腰$\triangle ABC$底边BC上的高。过D作AC的垂线，垂足为E，点M是DE的中点。

求证：$AM\perp BE$。

7．AD是等腰$\triangle ABC$底边BC上的高。BN、BM三等分$\angle B$，即$\angle DBN=\angle NBM=\angle MBA$。$BN$，$BM$分别交$AD$于$N$，$M$。连结$CN$并延长交$AB$于$E$。

求证：$\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{EB}$。