Linear Algebra

线性代数

学习指导

秦玉明 朱忠华 高剑明 李晋秀 等 编

清华大学出版社

线性代数

学习指导

秦玉明 朱忠华 高剑明 李晋秀 等 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为工科大学生以及准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导书，也可作为教师的教学参考书。本书注重与学生的实际相结合，突出线性代数的重点与难点，让学生弄清楚各知识点之间的相互渗透与转换，注重解题的方法与技巧。

本书共分五章，每章分内容提要、本章要点、典型例题分析与评注、习题、答案及提示五部分。本书在章节的顺序安排和内容取舍上与教材略有不同，主要是为了方便学生总结归纳以及更好地掌握各知识点之间的相互渗透与转换，以便对线性代数的内容有一个全局性的认识和把握。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/秦玉明等编．—北京：清华大学出版社，2011.5

ISBN 978-7-302-25135-4

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①秦…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第052906号

责任编辑：佟丽霞　李　嫚
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：7.5　**字　数**：139千字
版　次：2011年5月第1版　**印　次**：2011年5月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：14.00元

产品编号：038438-01

前 言

本书是为工科大学生以及准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导书，也可作为教师的教学参考书，由东华大学应用数学系线性代数教学团队共同编写而成。教学团队由具有多年丰富教学经验的教授、副教授及讲师组成，对线性代数的教学内容和方法进行了深入研讨，充分总结了教学经验，力求把编者在多年教学实践中的经验和体会都融入本书中，以促进读者学好线性代数这门重要的基础课。

本书力求在较短的时间内，用不多的篇幅，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和公式，弄清重点、难点与知识结合点。一方面，通过对典型例题的分析与评注，帮助同学们梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；另一方面，精编适量的练习题，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固与提高的目的。

全书共分五章，每章分内容提要、本章要点、典型例题分析与评注、习题、答案及提示五部分。本书在章节的顺序安排和内容取舍上与教材略有不同，主要是为了方便学生总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

本书初稿第一章（行列式）由朱忠华、申冉执笔，第二章（矩阵）由吴笑千、贾红丽执笔，第三章（向量）由李晋秀、王勤执笔，第四章（线性方程组）由高剑明、姜健飞执笔，第五章（相似矩阵及二次型）由马红彩、邓爱平执笔。全书初稿由侯峻梅校对，最后由高剑明负责统稿，对初稿的内容进行了适当的删减或补充。内容确定后，由团队总负责人秦玉明教授对全书进行了统校。

总之，希望本书能对同学们的复习备考有更大的帮助。由于编者水平有限，疏漏错误之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2010 年 4 月

目录

第一章 行列式

内容提要

1. 行列式的定义

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中，$j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为这个排列的逆序数.

逆序数 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=$(j_2 前比 j_2 大的数的个数)+(j_3 前比 j_3 大的数的个数)+…+(j_n 前比 j_n 大的数的个数).

注：n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的代数和；

n 阶行列式的每一项都是位于不同行、不同列 n 个元素的乘积；

二阶和三阶行列式的计算适用对角线法则：

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. 行列式的性质与定理

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 行列式中若有两行(列)的元素完全相同或成比例,则行列式为零.

(5) 若行列式某一行(列)的元素都是两数之和,例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 行列式任一行(列)各元素加上(减去)另一行(列)对应元素的 k 倍,行列式的值不变.

(7) 行列式等于它任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即可以按第 i 行展开:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或者按第 j 列展开:

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

(8) 行列式中某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

和

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=0\quad(j\neq i).$$

3. 特殊行列式的值

(1) 上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 副上、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2a_3\cdots a_n\left(a - \sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)(a_i \neq 0).$$

(证明见例 1.11)

(4) 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

(5) 两类特殊的分块行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{11} & \cdots & d_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nm} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. 克拉默(Cramer)法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,称为**非齐次线性方程组**;否则称为**齐次线性方程组**.

(1) 对于非齐次线性方程组,若其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$,

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$是把 D 中第 j 列的元素用常数项代替后所得到的行列式;

若 $D=0$,则方程组无解或有无穷多解.

(2) 对于齐次线性方程组,方程组有非零解当且仅当系数行列式 $D=0$.

克拉默法则是行列式的重要应用,利用它可以简洁地表示方程组的解,还可以在不求解方程组的情况下判断方程组解的情况. 但应注意应用克拉默法则有两个前提:一是方程组方程的个数与未知量的个数必须相同,二是系数行列式不为零. 由于求解时要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式,其工作量常常很大,所以克拉默法则主要用于理论分析及较简单方程组的求解. 求解线性方程组的一般方法在后面还会详细介绍.

本章要点

本章的重点是行列式的计算，要求在理解行列式的概念、掌握行列式性质的基础上，熟练正确地计算低阶行列式，也要会计算简单的高阶行列式. 难点是高阶行列式的计算.

对于不同的行列式必须根据其自身的特点去寻找合适的计算方法，主要方法有两种：(1)利用行列式的性质将行列式化成较简单的且易于计算的特殊行列式(如三角行列式等)；(2)利用行列式的展开定理，将高阶行列式化成低阶行列式进行计算. 但在实际计算过程中，往往会两种方法交替使用.

n 阶行列式计算技巧有：消零化三角形法、拆项法、加边法、归纳法、递推公式法、利用范德蒙德行列式计算行列式等.

典型例题分析与评注

例 1.1 试证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证明：(**拆项法**)先用行列式的加法性质分拆第 1 列，再用初等变换化简：

$$
\begin{aligned}
\text{左} &= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右}.
\end{aligned}
$$

评注：本题利用行列式加法的性质来证明行列式，要注意拆项法的使用.

例 1.2 设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

求：(1)D 的代数余子式 A_{14}；(2)$A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}$；(3)$A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}$.

解：(1) $A_{14}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-(12-8+6)=-10$；

(2) $A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}$是 D 的第 4 行元素乘第 1 行的代数余子式之和，因此等于零，即 $A_{11}-2A_{12}+2A_{13}-A_{14}=0$；

(3) $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=144.$

例 1.3 已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,求：

(1) $A_{51}+2A_{52}+3A_{53}+4A_{54}+5A_{55}$；

(2) $A_{31}+A_{32}+A_{33}$及 $A_{34}+A_{35}$.

解：由行列式的性质可知

(1) $A_{51}+2A_{52}+3A_{53}+4A_{54}+5A_{55}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$；

(2) $A_{31}+A_{32}+A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$；$A_{34}+A_{35}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$

评注：例 1.2，例 1.3 都是考察行列式代数余子式的定义及行列式按行（列）展开的基本性质，即：行列式的值等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和．因此可根据所给的代数余子式乘积之和构造一个行列式，计算行列式的值即得所求结果．

例 1.4 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$．

解：（降阶法）按第 1 列展开，有

$$D_n \overset{c_1}{=\!=} a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n.$$

评注：本例将行列式按第 1 列展开，降阶化为两个三角行列式．

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$．

解：当 $n=1$ 时，$D_1=a_1+b_1$；当 $n=2$ 时，$D_2=(a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)\times(a_2+b_1)=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$；当 $n\geqslant 3$ 时，将第 1 行乘（-1）加到其余各行后，可得这些行对应成比例，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ a_3-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}=0.$$

综上所述，得

$$D_n=\begin{cases} a_1+b_1, & n=1, \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2, \\ 0, & n\geqslant 3. \end{cases}$$

例 1.6 n 阶行列式 D 中每一个元素 a_{ij} 分别用数 $b^{i-j}(b\neq 0)$ 去乘得到另一个行列式 D_1，试证明 $D_1=D$.

证明：首先将行列式 D_1 的每行分别提取因子 $b^1,b^2,\cdots,b^n$，再由每列分别提取因子 $b^{-1},b^{-2},\cdots,b^{-n}$ 可得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11}b^{1-1} & a_{12}b^{1-2} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b^{2-1} & a_{22}b^{2-2} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn}b^{n-n} \end{vmatrix}=(b^1b^2\cdots b^n)\begin{vmatrix} a_{11}b^{-1} & a_{12}b^{-2} & \cdots & a_{1n}b^{-n} \\ a_{21}b^{-1} & a_{22}b^{-2} & \cdots & a_{2n}b^{-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{-1} & a_{n2}b^{-2} & \cdots & a_{nn}b^{-n} \end{vmatrix}$$

$$=(b^1b^2\cdots b^n)(b^{-1}b^{-2}\cdots b^{-n})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D.$$

评注：例 1.5 和例 1.6 都是直接利用行列式的性质计算.

例 1.7 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$.

解法一：依次将第 i 列乘以 x^{i-1} 加到第 1 列($i=2,3,\cdots,n$)，再按第 1 列展开得

$$D_n=\begin{vmatrix} & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}$$

$$=(a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n.$$

解法二：直接按第 n 行展开

$$D_n=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+a_{n-1}(-1)^{n+2}x(-1)^{n-2}+\cdots+(-1)^{n+n}(a_1+x)x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n.$$

评注：以上两种解法都是利用行列式的性质将原行列式化为上(下)三角行列式或对角行列式计算的一种方法，这种方法称为三角化法. 三角化法是求解行列式(尤其是高阶行列式)非常普遍的一种方法.

解法三：(递推法)按第1列展开得

$$\begin{aligned}D_n &= xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n\\&=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n\\&=\cdots=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\&=x^{n-1}(a_1+x)+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\&=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.\end{aligned}$$

评注：此解法用的是**递推法**. 递推法是行列式，尤其是高阶行列式计算中常用的、有效的方法. 应用递推法的实质是数学归纳法.

例 1.8 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-2\\n&1&2&\cdots&n-1\end{vmatrix}$.

解：(三角化法)注意到从第1行开始，每一行与前一行中有 $n-1$ 个数是差1的，故依次将第 i 行乘以(-1)加到第 $i+1$ 行$(i=n-1,n-2,\cdots,1)$，再将第2，3，…，n 列全加到第1列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1-n&\cdots&1\\1&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\cdots&n\\0&1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1\\0&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1-n&\cdots&1\\1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}_{n-1}.$$

再将 $n-1$ 阶行列式的第1行乘(-1)加到其余各行后，将第1，2，…，$n-2$ 列全加到第 $n-1$ 列，得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1-n \\ & & -n & n \\ & \begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix} & & \vdots \\ -n & & & n\end{vmatrix}_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & -1 \\ & & -n & \\ & \begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix} & & \\ -n & & & \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-2}(-1)=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

评注：该题充分利用行列式的性质，将原行列式化为副上(下)三角行列式来计算.若直接化为三角行列式，计算很烦琐.

例 1.9 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+x & a & a & \cdots & a & a \\ -y & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -y & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y & x\end{vmatrix}$.

解：**(递推法)**将行列式按第 n 列展开，可得

$$D_n=xD_{n-1}+a(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}-y & x & & & \\ & -y & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -y & x \\ & & & & -y\end{vmatrix}=xD_{n-1}+ay^{n-1}.$$

因此，
$$\begin{aligned}D_n&=xD_{n-1}+ay^{n-1}=x(xD_{n-2}+ay^{n-2})+ay^{n-1}=x^2D_{n-2}+axy^{n-2}+ay^{n-1}\\&=\cdots=x^{n-1}D_1+ax^{n-2}y+\cdots+axy^{n-2}+ay^{n-1}\\&=x^{n-1}(a+x)+ax^{n-2}y+\cdots+axy^{n-2}+ay^{n-1}\\&=x^n+a(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}).\end{aligned}$$

例 1.10 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & hx^{n-4} & \cdots & h\end{vmatrix}$.

解：**(三角化法)**依次将第 i 列乘$(-x)$加到第 $i-1$ 列$(i=2,3,\cdots,n)$，得

$$D_n=\begin{vmatrix}h+x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h+x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h+x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h\end{vmatrix}=h(x+h)^{n-1}.$$

例 1.11 证明爪形行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2a_3\cdots a_n\left(a-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)\quad (a_i\neq 0).$$

证明：(三角化法)依次将第 i 列乘以 $\left(-\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}}\right)$ 加到第 1 列($i=2,3,\cdots,n+1$)，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2a_3\cdots a_n\left(a-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

例 1.12 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}\quad (\lambda_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n).$$

解：把第 1 行元素乘上(−1)加到其余各行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_1 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}\quad (\text{爪形行列式})$$

$$=\lambda_2\cdots\lambda_n\left(a_1+\lambda_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i\lambda_1}{\lambda_i}\right)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right).$$

评注：该题是将第 1 行元素乘上(−1)加到其余各行后得到一个爪形行列式，大家也可把爪形行列式看作一个基本行列式.

例 1.13 计算五阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.