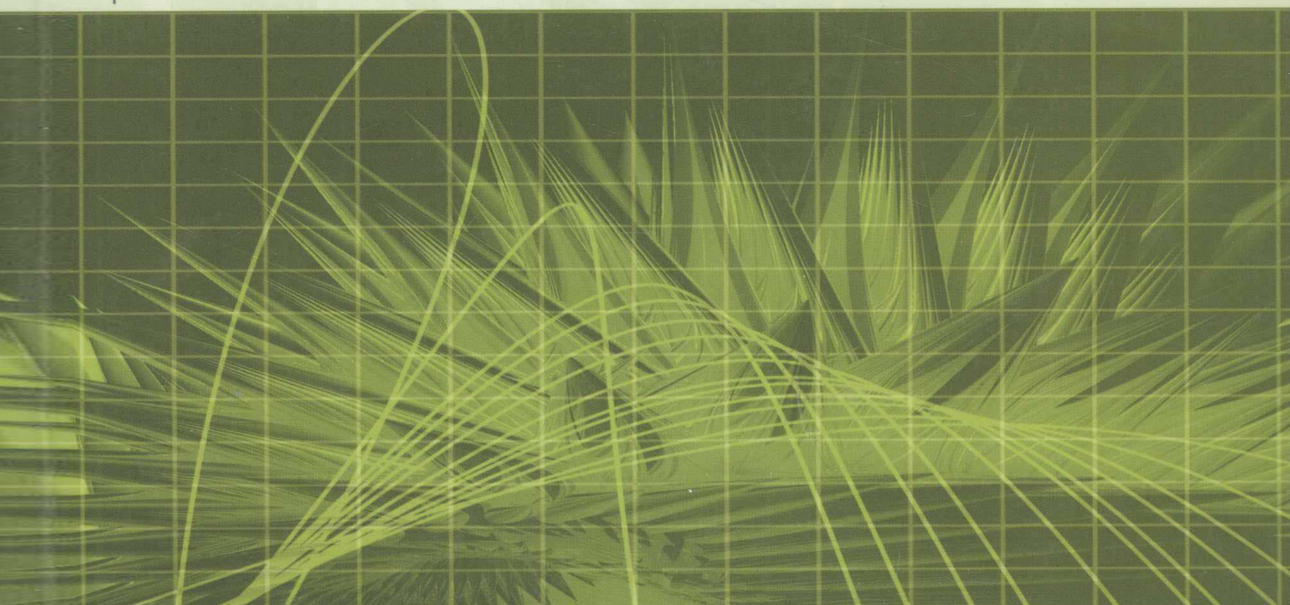
21世纪高职高专基础课教材系列

概率论与数理统计

主　编　张晓东
副主编　孙秀亭　徐　强



同济大学出版社

21 世纪高职高专基础课教材系列

概率论与数理统计

主　编　张晓东
副主编　孙秀亭　徐　强

同济大学出版社

内容提要

本书根据教育部最新制订的"高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求"编写，从高职高专教学的特点出发，系统讲解随机事件与概率、随机变量与概率分布、随机变量的数字特征、随机向量与重要定理、样本与统计量分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等内容. 本书具有内容编排起点低、进展平缓，突出重点、分散难点，注重与实际相结合等鲜明特色.

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校工科各专业数学基础课教材，也可供管理专业、财经专业及非数学类理科专业的学生和工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张晓东主编. —上海：同济大学出版社，2006.12

ISBN 7-5608-3389-6

Ⅰ. 概… Ⅱ. 张… Ⅲ. ① 概率论—高等学校：技术学校—教材 ② 数理统计—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 135168 号

21 世纪高职高专基础课教材系列

概率论与数理统计

主　编　张晓东

副主编　孙秀亭　徐　强

责任编辑　曹　建　责任校对　谢惠云　封面设计　李志云

出版发行　同济大学出版社

(上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　14

字　数　280 千

印　数　1—5 100

版　次　2006 年 12 月第 1 版　　2006 年 12 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 7-5608-3389-6/O·289

定　价　23.00 元

前　言

概率论与数理统计是以随机现象的统计规律性为研究对象的数学学科，它的起源和博弈问题有关，其奠基人是瑞士数学家伯努利(Bernoulli)，而它的飞速发展则是在17世纪微积分学建立以后，特别是第二次世界大战时期．大工业与管理的复杂化所产生的运筹学、系统论、信息论、控制论等无不建立在概率论与数理统计的基础上．这门学科起初在数学专业作为选修课开设，后来逐渐成为必修课．开设专业由最初的数学专业，逐步拓展为理、工、农、医科，直至包括经济管理类的绝大多数专业．现在，这门课程已被国家教育部定为研究生入学考试的数学课程之一．

概率论与数理统计的理论与方法几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门．例如，气象、水文、地震预报、人口控制及预测等都与概率论紧密相关；产品的抽样验收，新研制药品能否在临床中应用的判定，均需要用到假设检验；寻求最佳生产方案要进行实验设计和数据处理；电子系统的设计，火箭卫星的研制与发射都离不开可靠性估计；处理通信问题，探讨太阳黑子的变化规律，化学反应的研究，生物学中群体的增长问题，传染病流行问题等也均需要用概率统计知识来处理．

目前，概率论与数理统计理论进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展．在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题都大量采用概率统计的方法．因此，法国数学家拉普拉斯(Laplace)说："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题．"英国的逻辑学家和经济学家杰文斯对概率论赞美地说："概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为．"

本书是以教育部最新制定的"高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求"为依据编写的．全书从高职高专教学的特点出发，在内容编排上做到起点低，进展平缓；在教学上做到突出重点，分散难点；在应用上做到必需够用，注重与实际相结合；在素质教育上注重培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力，以促进大学生的全面发展，为社会输送素质优良的高级技术人才．

本书包括随机事件与概率、随机变量与概率分布、随机变量的数字特征、随机向量与重要定理、样本与统计量分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析共8章内容．本书在体例上的主要特点有：

(1) 每章开头均配有学习目的、重点和难点，作为全章内容的导入，使学生初步了解学习这一章的主要内容.

(2) 书中习题共分两类：练习、习题. 其中，练习以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用. 习题配在每章最后，供课内、外作业选用. 有些题带有一定的灵活性，难度较高，仅供学有余力的学生选用.

(3) 每章在内容后面均安排有内容小结，供复习这一章时参考.

(4) 每章附有 1～2 篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，借以扩大学生的知识面，激发学习兴趣，培养应用数学的意识.

本书的教学时数在 48 学时左右，每周 3 课时. 教材中带“ * ”号的内容为选学内容，供教师选讲或学有余力的学生课外阅读.

参加本书编写的有张晓东(第 1 章、第 7 章)，李永利(第 4 章)，孙秀亭(第 2 章、第 5 章)，徐强(第 6 章)，王怀领(第 8 章)，杜洁(第 3 章和全书的阅读材料). 全书的框架结构安排、统稿和定稿由张晓东承担. 在成书过程中，我们得到有关兄弟院校领导和同仁的热情帮助与大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者批评指正.

作　者

2006 年 12 月

目　　次

第1章　随机事件与概率

【学习目标】

◎ 了解随机事件和样本空间的概念；

◎ 掌握事件的基本关系与运算；

◎ 了解频率与概率的统计定义；

◎ 掌握古典概率的计算；

◎ 理解条件概率的概念，掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式；

◎ 理解事件的独立性及相应的概率，会用伯努利概型定理求有关的概率.

【重点】

随机事件、样本空间的概念；事件的基本关系与运算；概率的定义、性质；条件概率的概念；概率的加法公式、乘法公式、全概率公式.

【难点】

事件的基本关系与运算；古典概型下事件的概率计算；全概率公式.

1.1　随机事件与样本空间

人们在生产实践和科学实验中，对自然界和社会上所观察到的现象大体分为两类：一类是事前可以预料的，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称之为**必然现象**或**确定性现象**；另一类是事前不可预料的，即在相同条件下重复进行观察或试验时，有时出现有时不出现的现象，称之为**偶然现象**或**随机现象**.

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面，这种必然性表现在大量重复试验或观察中呈现出来的固有规律性，称为随机现象的**统计规律性**.

概率论与数理统计正是研究随机现象统计规律性的数学学科，其理论和方法的应用是非常广泛的，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门. 例如，使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报、产品的抽样检验等；在研究新产品时，为寻求最佳生产方案可以进行试验设计和数据处理；在可靠性工程中，使用概率统计方法可以给出元件或系统的使用可靠性

以及平均寿命的估计；在自动控制中，可以通过建立数学模型以便通过计算机控制工业生产；在通讯工程中，可以提高系统的抗干扰能力和分辨率等.

现在，让我们一起步入这充满随机性的神奇世界，开始探索和研究概率论的理论及知识.

对自然现象的一次观察或进行一次试验，统称为一个试验. 如图 1-1，掷一枚硬币，观察出现正面还是反面；如图 1-2，测试在同一工艺条件下生产出的灯泡的寿命；如图 1-3，掷一枚骰子，观察掷出的点数. 这些例子，尽管内容各异，但它们有如下共同的特点：

(1) 试验在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，而且所有可能结果事先是明确的；

(3) 正在进行的试验在最终结果揭晓前，无法预言会发生哪一个可能结果.

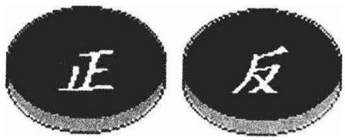


图 1-1

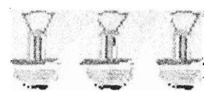


图 1-2

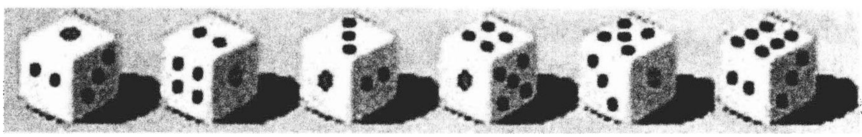


图 1-3

这类具有特定含义的试验称为**随机试验**. 本书此后凡提到试验都是指随机试验，简称试验. 通常把试验的每个可能结果称为**随机事件**，简称**事件**，并用 A, B, C, $\cdots$ 或 A_1, A_2, A_3, $\cdots$ 表示.

注　这里所指的事件与通常意义下的事件有所不同. 在通常意义下，事件往往是指已经发生的情况. 例如：9·11 事件，某某矿难事件. 在概率论中，事件不是指已经发生了的情况，而是指对某种或某些情况的陈述，它可能发生也可能不发生. 是否发生，要到有关试验有了结果以后才能知道.

下面讨论随机事件的分类.

如前所述，在掷骰子试验中，观察掷出的点数. 事件 $A_i = \{$掷出 i 点$\}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 都是试验的直接结果，相对于观察目的不可再分解，我们称这样的随机事件为**基本事件**. 事件 $B = \{$掷出奇数点$\}$ 或事件 $C = \{$掷出大于 2 且小于 5 的点$\}$，它们都是由两个或一些基本事件组合而成的，我们称这样的随机事件为**复合事件**.

另外，事件 $D = \{$掷出小于 7 的点$\}$ 是复合事件，它在任一试验中一定发生，

像 D 这类复合事件称它为**必然事件**，用字母 Ω 表示，即 $D=\Omega$. 事件 $E=\{$掷出大于 8 的点$\}$，它在任一试验中一定不发生，像 E 这类事件特别称它为**不可能事件**，用字母 $\varnothing$ 表示，即 $E=\varnothing$.

综上所述，随机事件分为基本事件和复合事件，必然事件和不可能事件，实际上同属确定性范畴，都不应是随机事件，但为了方便将它们作为随机事件的极端情形予以处理.

现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具.

我们把随机试验下全部基本事件的集合称为**样本空间**，构成样本空间的每一个基本事件称为**样本点**.

例 1 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H(Heads)、反面 T(Tails) 出现的情况，其对应样本空间为{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}.

例 2 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命，其对应的样本空间为 $\{t \mid t \geqslant 0\}$.

例 3 掷一枚均匀的骰子，观察掷出的点数，其对应的样本空间为{1,2,3,4,5,6}.

上述例子表明，样本空间也可以看成一个事件，其构成表明它等同于必然事件，故样本空间通常用 Ω 表示，样本点通常用 ω 表示. 因而，任一事件实际上都是样本点的集合，而且是样本空间的子集.

练习 1.1

1. 一正方体，六个面分别涂上红、黄、蓝、白、黑、绿六种颜色，任意抛掷一次，观察其朝上一面的颜色. 试指出这一试验的样本点和样本空间是什么.

2. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 将一枚硬币投掷两次，观察正面、反面出现的情况；

(2) 两枚硬币同时投掷一次，观察正面、反面出现的情况；

你发现有什么规律吗?

3. 已知一箱产品共 30 件，内含正品 25 件，次品 5 件，进行一次取出 5 件的试验. 设 $A_i=$“被取出的 5 件中恰有 i 件次品”$(i=0,1,2,3,4,5)$，$B=$“被取出的 5 件中最多有 3 件次品”，$C=$“被取出的 5 件中至少有 3 件次品”. 试问哪些是基本事件?哪些是复合事件?

1.2 事件的关系及运算

同一试验下往往会有多个事件发生，而这些事件又不是孤立存在的. 分析事件之间的关系，弄清事件的构成特征，对于解决问题非常重要.

事件间的关系与运算可借助直观图形予以示意，图示方法通常是用平面上

的某个矩形区域表示样本空间 Ω，而作为样本空间子集的事件则由其子区域表示，必要时还要再画上阴影.

(1) 事件的包含

若事件 A 发生必有事件 B 发生，则称 A **包含于** B，或 B **包含** A，记为 $A \subset B$. 例如，将一枚硬币投掷两次，事件 $A =$ "恰好有一次正面朝上"，事件 $B =$ "正面朝上"，则两事件的关系为 $A \subset B$.

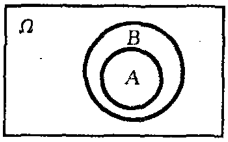


图 1-4

事件 A 包含于 B，意味着属于 A 的基本事件一定属于 B，反之则不一定. 其直观形象如图 1-4 所示. 方形图表示样本空间 Ω，圆形图表示事件 A,B.

事件具有如下性质：对任意事件 A，都有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

(2) 事件的相等

若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 和事件 B **相等**，记为 $A = B$. 例如，掷一枚均匀的骰子，事件 $A =$ "掷出的点数小于 2"，事件 $B =$ "掷出的点数恰好为 1"，则两事件的关系为 $A = B$.

两事件相等意味着它们有相同的基本事件，在试验中必将同时发生. 或者说事件 A,B 由完全相同的试验结果构成，是同一事件的两种不同的表述.

(3) 事件的和

由事件 A 与 B 至少有一个发生构成的事件，称为事件 A 与 B 的**和**(**并**)事件，记为 $A+B(A \cup B)$. 例如，甲乙两人同时向同一个目标射击，事件 $A =$ "甲击中目标"，事件 $B =$ "乙击中目标"，事件 $C =$ "目标被击中"，则三事件之间的关系有 $C = A + B$.

和事件由 A,B 中的所有基本事件构成，即 A 或 B. 其直观形象如图 1-5 中的阴影部分所示.

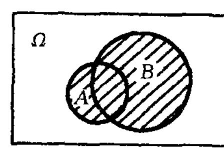


图 1-5

和事件的概念可推广到 3 个或更多个事件的情形，即 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生.

(4) 事件的积

由事件 A 与 B 同时发生构成的事件，称为事件 A 与 B 的**积**(**交**)事件，记为 $AB(A \cap B)$. 例如，甲乙两人同时向同一个目标射击，若甲乙两人同时击中目标，那么目标被摧毁. 设事件 $A =$ "甲击中目标"，事件 $B =$ "乙击中目标"，事件 $C =$ "目标被摧毁"，则有 $C = AB$.

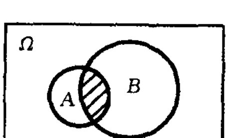


图 1-6

积事件由 A、B 中的所有公共基本事件构成，即 A 且 B. 其直观形象如图 1-6 中的阴影部分所示.

积事件的概念也可推广到 3 个或更多个事件的情形，即 $A_1A_2\cdots A_n$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

(5) 事件的差

由事件 A 发生且事件 B 不发生构成的事件，称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$. 例如，掷一枚均匀的骰子，事件 $A=$“掷出小于8的点数”，事件 $B=$“掷出的点数为偶数”，事件 $C=$“掷出的点数为奇数”，则三事件之间的关系为 $C=A-B$.

差事件 $A-B$ 由属于 A 而不属于 B 的所有基本事件构成，其直观形象如图 1-7 中的阴影部分所示.

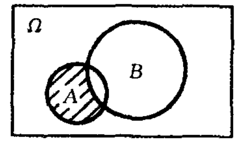


图 1-7

(6) 互斥事件

若事件 A 与 B 在一次试验中不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 为**互斥事件(互不相容事件)**. 例如，掷一枚均匀的骰子，事件 $A=$“出现偶数点”，事件 $B=$“出现奇数点”，事件 $A_i=$“出现 i 点”$(i=1,2,3,4,5,6)$，则 A 与 B 互斥，A_i 两两互斥.

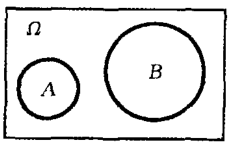


图 1-8

事件 A,B 互不相容意味着它们没有公共的基本事件，其直观形象如图 1-8 所示.

互斥事件的概念也可推广到 3 个或更多个事件的情形，即若有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$ 成立，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

注 在同一试验中，基本事件都是两两互不相容的，两事件不互斥则为相容.

(7) 对立事件

若事件 A 与 B 在一次试验中既不能同时发生，但又必定有一发生，即 $AB=\varnothing$，且 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与 B 为**对立事件(互逆事件)**. 例如，掷一枚均匀的骰子，事件 $A=$“出现偶数点”，事件 $B=$“出现奇数点”，则 A 与 B 就是对立事件.

事件 A,B 对立意味着它们没有公共的基本事件，而所有它们的和又恰好充满样本空间，其直观形象如图 1-9 所示.

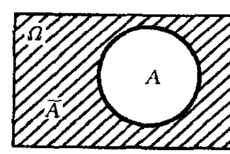


图 1-9

事件 A 的逆事件通常记作 $\bar{A}$. 显然，逆事件具有如下性质：$A\cup\bar{A}=\Omega, A\cap\bar{A}=\varnothing$.

注 对立事件一定是互斥事件，反之则不一定. 例如，掷一枚均匀的骰子，事件 $A=$“出现偶数点”，事件 $B=$“出现奇数点”，事件 $A_i=$“出现 i 点”$(i=1,2,3,4,5,6)$，则 A 与 B 对立且互斥，事件 $A_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 两两互斥但不对立.

(8) 互斥完备事件组(样本空间的划分)

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 在一次试验中既不能同时发生，但又恰好有一个发生，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成**互斥完备事件组**或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是**样本空间的一个划分**，其直观形象如图 1-10 所示. 例如，掷一枚均匀的骰子，事件 $A=$“出现偶数

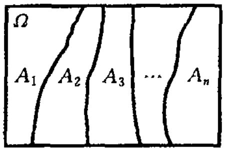


图 1-10

点”，事件 $B=$“出现奇数点”，事件 $A_i=$“出现 i 点”$(i=1,2,3,4,5,6)$，则 A 与 B 构成一个完备事件组，六个基本事件 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 也构成一个完备事件组.另外，事件 A 与 A_1,A_3,A_5 构成一个完备事件组，事件 B 与 A_2,A_4,A_6 也可构成一个完备事件组，它们分别是样本空间的一个划分.但事件 A 与 A_1,A_3 不能构成一个完备事件组，事件 B 与 A_1,A_2,A_4,A_6 也不能构成一个完备事件组.

注　任一事件 A 与其对立事件组成一个完备事件组.

(9) 事件的运算律

交换律：$A+B=B+A, AB=BA$；

结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，

$(AB)C=A(BC)$；

摩根律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，

$\overline{\bigcup_i^n A_i}=\bigcap_i^n \overline{A}_i, \overline{\bigcap_i^n A_i}=\bigcup_i^n \overline{A}_i$.

例 1　设 A,B,C 为三个事件，请表示出下列事件.

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 中不多于一个发生.

解　由题设知，

(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) ABC；

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$.

例 2　设事件 A,B,C 分别表示甲、乙、丙三人体检合格，试用 A,B,C 表示下列事件：$D=$“三人均合格”，$E=$“三人中至少有一人合格”，$F=$“三人中恰好有一人合格”，$G=$“三人中至多有一人不合格”.

解　由题设知 $D=ABC$；$E=A+B+C$；

$$F=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C\text{（图 1-11）；}$$

$$G=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC\text{（图 1-12）.}$$

注　解此类题目时，若事件由简单事件构成，可由事件的运算定义直接写出；若事件比较复杂，可借助图形分析后再解决.

例 3　如果 x 表示一个沿数轴随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系：$A=\{x \mid x\leqslant 20\}$，$B=\{x \mid x>3\}$，$C=\{x \mid x<9\}$，$D=\{x \mid x<-5\}$，$E=\{x \mid x\geqslant 9\}$.

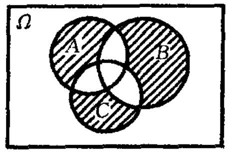


图 1-11

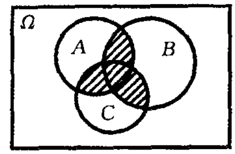


图 1-12

解　由图 1-13 知，$D \subset C \subset A$，$E \subset B$；

D 与 B，D 与 E 互不相容；

C 与 E 为对立事件；

B 与 C，B 与 A，E 与 A 相容.

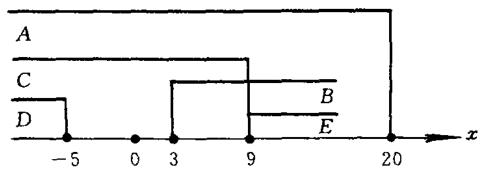


图 1-13

练习 1.2

1. 设 A,B,C 为三个事件，请表示下列事件，并画出示意图.

(1) 只有 A 发生；

(2) A,B,C 中至少有一个发生；

(3) A,B,C 中至多有两个发生；

(4) A,B,C 中至少有两个发生.

2. 设 A,B 为任意两个事件，下列关系成立吗？

(1) $(A+B)-B=A$；

(2) $(A+B)-A \subset B$；

(3) $(A-B)+(B-A)=0$；

(4) $(A-B)+B=A+B$.

3. 什么是对立事件？什么是互斥事件？它们有何联系与区别？

4. 随机抽检 3 件产品，设 $A=$"3 件产品中至少有一件是次品"，$B=$"3 件产品中至少有两件是次品"，$C=$"3 件产品都是正品"，那么 $\overline{A}$，$A+B$，AC 各表示什么事件？

5. 从某学院质检系中任选一名学生，设事件 $A=$"被选出的是男生"，$B=$"被选出的是大三学生"，$C=$"被选出的是运动员"，试问(1) 事件 $AB\overline{C}$ 表示什么？(2) 事件 ABC 表示什么？(3) 等式 $ABC=C$ 表示什么？(4) 关系式 $C \subset B$ 表示什么？

1.3　随机事件的概率

一个随机事件在一次试验或观察中可能发生也可能不发生，呈现出一种偶

然性，但在大量重复试验或观察中其发生可能性的大小是客观存在的，呈现出明显的规律性. 因此，我们把度量事件 A 在试验中发生可能性的大小的数叫做**概率**，记为 $P(A)$. 这样，概率 $P(A)$ 较大，预示着相应事件 A 发生的可能性较大. 反之，概率 $P(A)$ 较小，预示着相应事件 A 发生的可能性较小.

关于概率的计算，通常与试验条件密切相关. 本书只给出在实际中用得较多的统计定义和古典定义，至于几何定义和公理化定义，请学有余力的读者查阅所列参考文献的相关内容.

1.3.1 概率的统计定义

由上述概率的定义知，对于事件发生的可能性大小，需要用一个数量指标去刻画，这个指标应该是随机事件本身所具有的属性，不能带有主观性，且能在大量重复实验中得到验证，并符合实际情况. 为此，引入频率及其稳定性的概念.

在 N 次重复试验中，事件 A 发生的次数 M（频数）与试验次数 N 之比 $\frac{M}{N}$，称为事件 A 的**频率**，记为 $f_N(A)$. 于是，$f_N(A) = \frac{M}{N}$.

所谓**频率稳定性**是指当试验次数 N 很大时，随机事件 A 发生的频率总是在某个固定常数的附近摆动，这一结论已为实践和理论两方面所证实. 例如，对于一枚均匀的硬币，理论上我们当然认为出现正面和反面的可能性一样大，即出现正面和反面的频率都是 50%. 为验证这一点，历史上，有人做过成千上万次投掷硬币的试验，其结果如下：

实验者	投掷次数 N	出现正面次数 M	$f_N(A)$
德・摩根(DeMorgan)	2048	1061	0.5181
浦丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮而逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮而逊(Pearson)	24000	12012	0.5005

从上表容易看出，投掷次数越多，频率就越接近 0.5. 也就是说硬币正面朝上呈现出明显的频率稳定性，正是频率的稳定性为概率的量化提供了可行途径.

定义（概率的统计定义） 在相同的条件下进行的大量重复试验中，如果随着试验次数 N 的不断增加，事件 A 的频率 $f_N(A)$ 始终围绕某一常数 p 作稳定而且微小的波动，则称常数 p 为事件 A 的概率，即 $P(A) = p$.

概率的统计定义为求概率开辟了道路，特别在实际中，当概率不易求出时，人们常取实验次数很大时事件的频率作为概率的估计值，并称此概率为**统计概率**. 例如，在人口的抽样调查中，根据抽取的一部分人去估计全体人口的文盲比

例；在工业生产中，依据抽取的一些产品的检验结果去估计该产品的废品率；在医学上，依据积累的资料去估计某种疾病的死亡率等.

容易验证，统计概率具有如下性质：对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，且 $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$.

1.3.2 概率的古典定义

利用概率的统计定义求概率不但要做大量重复试验，而且所求概率随频率的变化而变化，给概率计算带来一定困难. 因此，需要研究新的方法计算概率.

我们看如下问题：

(1) 一盒灯泡 100 个，要抽取一个检验其质量（使用寿命），任意取一个，则 100 个灯泡被抽取的机会均等.

(2) 投掷一颗匀称的骰子，出现 1,2,3,4,5,6 点的可能性都是 $\frac{1}{6}$.

这两个试验的共同特点是：

(1) 每次试验，只有有限种可能的试验结果，或者说组成样本空间的样本点总数为有限个（**有限性**）；

(2) 每次试验中，各基本事件（样本点）出现的可能性相同（**等可能性**）.

通常把同时满足上述两个条件的这种随机试验叫做**古典型随机试验**，简称**古典概型**.

定义（概率的古典定义） 对于给定的古典概型，若样本空间中样本点的总数为 n，事件 A 包含的样本点数为 m，则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

习惯上称此概率为**古典概率**，这样就把求概率问题转化为计数问题. 显然，排列组合成为计算古典概率的重要工具.

容易验证，古典概率也具有如下性质：对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，且 $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$.

例 1 某箱食品共 30 袋，内含不合格食品 7 袋，从中任取 5 袋. 试求被取的 5 袋中恰有 2 袋是不合格品的概率.

解 设 A = “被取的 5 袋中恰有 2 袋是不合格食品”，则由题设知样本空间中样本点的总数为 C_{30}^{5}，事件 A 包含的样本点数为 $C_7^2 C_{23}^3$，于是所求概率为

$$P(A) = \frac{C_7^2 C_{23}^3}{C_{30}^5} = 0.2610.$$

注 (1) 在概率计算中，概率通常取精确到 0.0001 的近似值，理应使用近