



全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

Calculus

高等学校经济管理学科数学基础课程系列教材

微积分 (上册)

主 编 赵家国 彭年斌

副主编 赵海玲 钟 越



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果
高等学校经济管理学科数学基础课程系列教材

微 积 分

Weijifen

(上册)

主 编 赵家国 彭年斌
副主编 赵海玲 钟 越



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本教材是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。教材根据经济管理类本科数学基础课程教学基本要求和近几年全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲的内容和要求编写而成,以培养和提高学生的数学素养、创新意识、分析和解决实际问题的能力为宗旨,以培养经济管理类应用型人才为主要目标。

本教材力求通俗、直观、简洁、准确,主要内容有函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学。为了培养和提高学生的应用能力和动手能力,在相应章节编写了数学实验和数学建模内容,并借助 Matlab 软件,实现计算机上完成函数作图、极限、导数、积分等运算,解决一些简单的数学建模问题。

本书可作为独立学院、高职高专和成人教育学院本专科经济管理类专业的微积分课程教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上册/赵家国,彭年斌主编. —北京:高等教育出版社,2010.8

ISBN 978 - 7 - 04 - 030074 - 1

I. ①微… II. ①赵…②彭… III. ①微积分 - 高等学校 - 教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 140609 号

策划编辑 兰莹莹 责任编辑 李华英 封面设计 赵 阳 责任绘图 黄建英
版式设计 王艳红 责任校对 王 楠 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京市白帆印务有限公司

开 本 787 × 960 1/16
印 张 17.5
字 数 320 000

购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010 年 8 月第 1 版
印 次 2010 年 10 月第 2 次印刷
定 价 24.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 30074 - 00

高等学校经济管理学科数学 基础课程系列教材编委会

主 任：周厚隆 彭年斌

副主任：王国政 喻秉钧

委 员（按姓氏笔画排列）：

王 婷	李 琼	李世伦	李建军	李秋敏
严 峻	余步雷	张现强	张秋燕	张高勋
陈骑兵	胡清林	赵家国	赵海玲	钟 越
秦春艳	钱 茜	黄玉杰	葛丽艳	喻秉钧
喻懋文	强静仁			

前 言

微积分是以极限为研究工具，以变量和函数为研究对象，以微分运算和积分运算为主要研究内容的一门学科。它是17世纪由牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）分别独立地创立和奠基的。它开创了数学的新时代，同时作为反映客观世界内在本质的科学真理，成为划时代的科学瑰宝。20世纪最杰出的数学家之一冯·诺伊曼（1903—1957，匈牙利人）指出：“微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分。”恩格斯（1820—1895）也曾指出：“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。”

本教材是全国教育科学“十一五”规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。教材根据经济管理类本科数学基础课程教学基本要求和近几年全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲的内容和要求编写而成，以培养和提高学生的数学素养、创新意识、分析和解决实际问题的能力为宗旨，以培养经济管理类应用型人才为主要目标。根据我国高等教育发展的特色，特别关注了三本院校数学基础课程的特点，积累我们历年在大学数学基础课程教学第一线的实践和经验，形成了本教材以下的编写特色：

1. 在教材内容的取舍上，编写的原则是重思路、重方法、重应用、重实践。一般从实际例子引入概念和理论，通过体验产生直觉，从思想方法上引导学生，培养他们直观、通俗、合理的思维能力，不强调严密的逻辑推理；对于基本运算，要求掌握方法、明确步骤、强化练习；在应用和实践中，注意发掘数学模型，满足经济管理中的需要，在数学课堂上创造出操作平台，在动手中得到数学结果。

2. 在教材文体风格上，力求通俗、直观、简洁、准确。尽量采用通俗而准确的语言发掘直观模型和图形，描述问题简洁明确、深入浅出。

3. 本教材尽量适应多层次的教学需求。对使用本教材的教师，使他们有发挥自我教学才能的空间，根据学生实际驾驭教材，做出自己的教学选择；对使用本教材的学生，既有一定的基本要求，又使他们有发挥自我能力的广阔的思维空间。

4. 本教材尝试与数学实验、数学建模有机结合的教学方式，推动传统教

II 前言

学方式与多媒体现代教育技术的融合。在每章后编写了数学实验与数学建模的有关内容，搭建了数学成为“数学技术”的平台，以加强对实践能力培养。我们以 Matlab (7.0 版) 软件为工具，通过操作，可以在计算机上完成函数作图、极限、导数、积分等运算，可以解决一些简单的数学建模问题。暂时还不具备条件进行数学实验、数学建模教学的院校，可以省略这些内容，这不影响本教材的系统性和完整性。

本书由赵家国、彭年斌主编，第一章至第四章由赵家国老师主笔，其中数学实验有关部分、练习和习题由赵海玲、钟越老师编写；第五章、第六章由彭年斌老师主笔，其中数学实验有关部分由张秋燕老师编写；全书由赵家国老师统稿。由于作者水平所限，教材中难免有错误和不妥之处，请读者不吝赐教，我们表示深切的感谢！

编者

2010 年 1 月于成都

目 录

第一章 函数	1
§ 1.1 函数的概念	1
一、实数与变量	1
二、函数的概念	3
三、特性函数类	5
四、函数关系的建立	8
练习 1.1	8
§ 1.2 复合函数与反函数	10
一、复合函数	10
二、反函数	10
练习 1.2	12
§ 1.3 初等函数	12
一、基本初等函数	12
二、初等函数	16
练习 1.3	17
§ 1.4 经济管理中的常用函数	17
练习 1.4	19
* § 1.5 数学实验基础——Matlab 简介与画函数图形	20
一、Matlab 的基本操作命令	20
二、M 程序和 M 函数	21
三、二维图形（一元函数图形）的绘制	24
练习 1.5	26
习题一	27
第二章 极限与连续	29
§ 2.1 极限的概念	29
一、数列极限的定义	29
二、函数极限	32
三、极限概念小结	35
四、无穷小量	36

练习 2.1	36
§ 2.2 极限的性质	37
一、极限的唯一性	37
二、极限的局部有界性	37
三、极限的局部保号性	38
练习 2.2	38
§ 2.3 无穷大量	38
一、无穷大量的概念	38
二、无穷大量与无穷小量的关系	40
练习 2.3	40
§ 2.4 极限的四则运算	41
一、无穷小量的运算	41
二、极限的四则运算	42
练习 2.4	45
§ 2.5 极限存在的两个准则、两个重要极限	46
一、夹逼准则	46
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	47
三、单调有界准则	48
四、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	49
练习 2.5	51
§ 2.6 无穷小量的比较	51
一、无穷小量阶的概念	51
二、利用等价无穷小量计算极限	52
练习 2.6	53
§ 2.7 连续函数	54
一、连续函数的概念	54
二、连续函数的运算和初等函数的连续性	56
三、函数的间断点及其分类	59
四、闭区间上连续函数的性质	61
练习 2.7	63
* § 2.8 极限的数学实验、连续函数的数学模型举例	65
一、数 e 的感性认识	65
二、极限的数学实验	66
三、连续函数的数学模型举例——椅子的平稳问题	68

练习 2.8	70
习题二	70
第三章 导数与微分	73
§ 3.1 导数的概念	73
一、背景实例	73
二、导数的定义	74
三、用定义求导数的例子	77
四、导数的几何意义	78
五、函数可导与函数连续的关系	79
练习 3.1	80
§ 3.2 导数的四则运算法则	81
练习 3.2	82
§ 3.3 反函数求导法则	83
练习 3.3	84
§ 3.4 复合函数求导法则	84
一、复合函数求导法则	84
二、隐函数求导法则	86
三、对数求导法则	87
四、求导公式与运算法则小结	87
练习 3.4	89
§ 3.5 高阶导数	89
练习 3.5	91
§ 3.6 微分及其计算	92
一、微分的概念	92
二、微分的计算	94
练习 3.6	96
* § 3.7 导数与微分的数学实验	96
一、导数的数学实验	96
二、微分在近似计算中的应用	97
练习 3.7	99
习题三	99
第四章 微分中值定理及其应用	102
§ 4.1 微分中值定理	102
一、罗尔 (Rolle) 中值定理	102
二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	104

三、柯西 (Cauchy) 中值定理	106
* 四、泰勒 (Taylor) 中值定理	107
练习 4.1	110
§ 4.2 未定式的定值——洛必达 (L'Hospital) 法则	111
一、基本型未定式的定值	111
* 二、其他未定式的定值	114
练习 4.2	115
§ 4.3 函数的单调性、极值与最值	116
一、函数的单调性	116
二、函数的极值	118
三、函数的最大值和最小值	120
练习 4.3	122
§ 4.4 曲线的凹凸性与拐点	124
一、曲线的凹凸性	124
二、曲线的拐点	125
练习 4.4	127
§ 4.5 曲线的渐近线	127
一、渐近线的概念	127
二、渐近线的求法	127
练习 4.5	129
* § 4.6 函数作图	129
练习 4.6	132
§ 4.7 微分学在经济管理中的应用	132
一、边际分析——变化率问题	132
二、弹性分析——相对变化率问题	133
三、经济管理中的优化问题	136
练习 4.7	138
* § 4.8 一元函数微分学的数学模型举例	139
一、星级宾馆的定价问题	139
二、四人追逐问题	140
练习 4.8	142
习题四	142
第五章 不定积分	145
§ 5.1 不定积分的概念与性质	145
一、原函数与不定积分	145

二、不定积分的几何意义	147
三、不定积分的性质	148
四、基本不定积分公式	149
练习 5.1	151
§ 5.2 换元积分法	152
一、第一类换元法 (凑微分法)	152
二、第二类换元法	158
练习 5.2	163
§ 5.3 分部积分法	164
练习 5.3	168
* § 5.4 有理函数的积分	169
一、有理真分式分解为简单分式之和	169
二、有理函数的积分	170
练习 5.4	173
* § 5.5 不定积分的数学实验	173
练习 5.5	175
习题五	175
第六章 定积分及其应用	177
§ 6.1 定积分的概念和性质	177
一、定积分的概念	177
二、定积分的性质	183
练习 6.1	187
§ 6.2 微积分基本定理	187
一、变上限函数及其导数	188
二、微积分基本定理	190
练习 6.2	192
§ 6.3 定积分的计算	193
一、定积分的换元积分法	194
二、定积分的分部积分法	200
练习 6.3	202
§ 6.4 反常积分与 Γ 函数	203
一、无穷区间上的反常积分	204
二、无界函数的反常积分	207
* 三、 Γ 函数	210
练习 6.4	211

§ 6.5 定积分的应用	212
一、微元法	212
二、定积分的几何应用	213
三、定积分在经济管理中的应用举例	220
练习 6.5	223
* § 6.6 定积分的数学实验与一元函数积分学的数学模型举例	224
一、数值积分	224
二、一元函数积分学的数学模型举例	228
练习 6.6	230
习题六	231
练习与习题参考答案	234
附录 初等数学常用公式	259
参考文献	264

第一章

函 数

函数反映了现实世界中变量变化的一种相互依存关系，是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象。本章将介绍函数（一元函数）的概念及各种表现形态和特征，它是学习本课程的基础，也是数学应用实践中建立数学模型的基础。

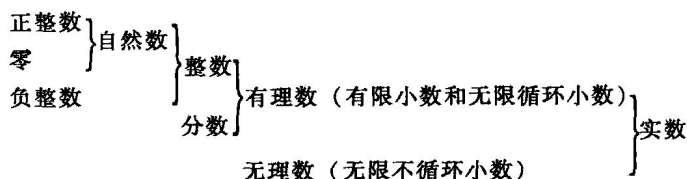
§ 1.1 函数的概念

一、实数与变量

1. 实数与数轴

现代数学的一个基本概念是集合。集合是研究对象中某些成员的汇集，是一个不言自明的概念。集合一般用大写字母表示，如 E, A, B 等。构成集合的成员叫做集合的元素，一般集合的元素用小写字母表示，如 a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$ ，读为“ a 属于 A ”。不含任何元素的集合叫空集，记为 $\emptyset$ 。用元素来给出一个集合的方式是：在大括号内，或者列出所有元素，或者指出元素所具有的特征。关于集合之间“包含”、“相等”以及“子集”等概念在中学已经学过，这里就不重述了。今后我们涉及的主要是以数为元素构成的数集。

按照人类认识规律，人们认识数是从自然数开始的，经过长期的历史演变和科学总结，人们逐渐认识了实数，形成了实数系：



全体有理数所构成的集合和全体无理数所构成的集合的总体就是实数集合. 一般地, 自然数集合用大写字母 $\mathbf{N}$ 表示; 正整数集合用 $\mathbf{N}^*$ 表示; 整数集合用大写字母 $\mathbf{Z}$ 表示; 有理数集合用大写字母 $\mathbf{Q}$ 表示; 实数集合用大写字母 $\mathbf{R}$ 表示. a 是实数可以记为 $a \in \mathbf{R}$, 即 a 属于集合 $\mathbf{R}$. 类似地, “不属于” 可以用符号 $\notin$ 表示. 例如, $\sqrt{2}$ 是实数而不是有理数可以表示为: $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. 本教材中所涉及的数都限定在实数范围内.

在以后的数学表述中, 有两个常用逻辑量词符号. 符号 $\forall$ 称为全称量词, 表示“任意”, 指某集合中的任意一个、对所有的、对每一个元素. 符号 $\exists$ 称为存在量词, 表示“存在”, 指某集合中存在一个、总有一个、至少有一个元素.

为了直观形象地理解“数”, 我们给出数轴的概念. 一条直线, 如果给定了原点 O 、方向 (一般, 取由左向右的方向为正向)、单位, 则称它为数轴. 数轴由点组成, 数轴上每一个点 A , 对应着一个实数 a (若点 A 位于原点之右, a 表示它到原点的距离; 若点 A 位于原点之左, a 是一个负数, 其相反数表示点 A 到原点的距离), 这个实数 a 叫做该点 A 的坐标, 记为 $A(a)$; 反之, 每一个实数, 作为坐标, 也对应着数轴上的一个点, 由此, 数轴上的点与实数集合中的数是一一对应的. 如图 1.1 中, 数轴上点 A 的坐标是 a , 为了简练, 有时我们也直接称“点 a ”.

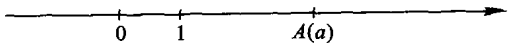


图 1.1

任意两个实数都可以比较大小; 有理数与无理数在实数中都是稠密的.

2. 绝对值与绝对值不等式

距离的概念在数学上是十分重要的. 实数 a 的绝对值定义为: 点 a 到原点的距离. 我们知道, 实数 a 的绝对值可以表示为

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

绝对值有三个基本性质.

- (1) 非负性: $|a| \geq 0$;
- (2) 对称性: $|a - b| = |b - a|$;
- (3) 三角形不等式: $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$, 或 $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

此外, 下面是两个重要的绝对值不等式:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0);$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a \quad (a \geq 0).$$

想一想, 在几何上, $|a|$ 和 $|x - y|$ 表示什么?

3. 变量

思考一下, 一个物体从空中自由落下 (图 1.2), 在下落过程中, 有有什么量? 有哪些量是变化的, 取不同的值? 哪些量是不变的, 始终取同一个值?

一般地, 有下面的定义.

【定义 1】 在某一过程中, 取同一值的量称为**常量**, 可以取不同值的量称为**变量**.

常量和变量的概念不是绝对的, 一个量在某个问题中是常量, 而在另一个问题中又可能是变量. 常量也可以看作变量的一个特例.

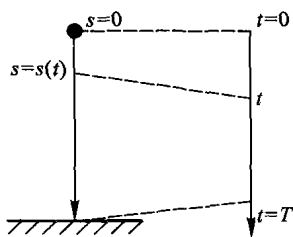


图 1.2

4. 区间和邻域

在微积分中, 一般总假定变量在一些实数集中取值, 下面来认识一些叫做区间的实数集, 其中 a, b 为固定实数, ∞ 为无穷符号.

集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**, 记为 $[a, b]$.

集合 $\{x | a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记为 (a, b) .

类似可以定义半开半闭区间: $[a, b)$, $(a, b]$.

集合 $\{x | a \leq x < +\infty\}$ 是**无穷区间**, 记为 $[a, +\infty)$.

其他无穷区间如 $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ 等.

开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 又称为以点 a 为中心, 以 δ 为半径的点 a 的**邻域**, 记为 $U(a, \delta)$. 有时, 不需要指出半径, 点 a 的邻域记为 $U(a)$. 在邻域内去掉中心 a , 称为点 a 的**去心邻域**, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$.

二、函数的概念

1. 函数的定义

在前面自由落体例子中, 时间 t 与路程 s 都是变量, 但它们的变化方式不尽相同. 记开始下落瞬间的时间是 $t = 0$, 路程 $s = 0$, 当落体落到地面上时 $t = T$, $s = S$, 如 t 在 $[0, T]$ 上取某一个值, 则此时的路程 s 就可以通过公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 求得. 因此我们可以说 t 是在 $[0, T]$ 上自由取值的, 而 s 依赖于 t , 是随 t 而唯一确定的. 一般地, 有下面的定义.

【定义 2】 (函数) 在某一过程中有两个变量 x, y , 已知实数集 $X \neq \emptyset$, 若对于 X 上任意 x , 按照某一法则 f , 有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称对应关系 f 是 X 上变量 x 的**函数**, 记为 $y = f(x)$, $x \in X$. x 在 X 上任意取值, 称为**自变量**; 非空实数集 X 叫做函数的**定义域**; y 随 x 而唯一确定, 称为**因变**

量; y 也可以称为 x 的函数, 而集合 $Y = \{y | y = f(x), x \in X\}$ 叫做函数的值域. 函数 f 建立了从集合 X 到集合 Y 的一个对应关系. 现在我们讨论的函数仅一个自变量, 所以也可以说成是一元函数.

由函数的定义可知, 构成函数概念有两个要素, 一是定义域, 二是对应关系. 给定一个函数, 就要给出这两个要素. 如 $f(x) = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$. 当函数用一个公式给出时, 我们书写中通常省略后面的定义域, 此时总认为使公式有意义的自变量取值范围就是定义域, 如 $f(x) = \sin x$. 判断两个函数是否是相同的函数, 仍然用定义域和对应关系这两个要素来检验. 如在下列函数中,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x; & g(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x) \sin x; \\ u(x) &= \frac{x \sin x}{x}; & v(x) &= \sqrt{\sin^2 x}, \end{aligned}$$

$f(x)$ 与其余各个函数是否是相同的函数呢? 请读者自己判断.

上面我们已经提到, 当函数用公式给出时, 函数的定义域就是使公式有意义的自变量取值范围, 但是如果公式是用来表述实际问题的, 那么定义域的确还须使实际问题有意义. 如自由落体例子中, $s = \frac{1}{2}gt^2$, 定义域只能是 $t \in [0, T]$.

【例 1】 求函数 $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ 的定义域和值域.

解 为了使表达式有意义, 有 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$, 解之得到, 函数的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$, 函数的值域是 $[0, +\infty)$.

【例 2】 求函数 $y = \ln \frac{\sin x}{x}$ 的定义域.

解 只有当 $\frac{\sin x}{x} > 0$ 时, 这个函数表达式才有意义, 通过讨论可知, 函数的定义域是

$$\left\{ x \left| \begin{array}{l} (2n-1)\pi < x < 2n\pi, n=0, -1, -2, \dots; \\ 2n\pi < x < (2n+1)\pi, n=0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \right\}.$$

2. 函数的表示法

表示一个函数, 有以下各种方法.

(1) 公式法

表示一个函数最常见的是用公式来表示, 如 $y = f(x) = x^2$. 除了这种形式外, 也可以用多个式子综合表示一个函数, 即定义域的不同部分, 函数有不同的表达式, 称为分段函数. 如符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

是一个分段函数.

数列是以正整数为序号排列着的无穷个数. 记为 $\{y_n\}$. 如

$$\left\{y_n = \frac{1}{n}\right\}, \text{ 即 } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

其中 y_n 叫做数列的**通项**. 在不管顺序时, 它也可以看作是定义在正整数集上的函数, 记为 $y_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$. 直观地, 与数作为数轴上的点一样, 数列也说成是**点列**.

(2) 图形法

在平面直角坐标系下, 平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数 $y = f(x)$, $x \in X$ 的**图形**. 如大家熟知, $y = x^2$ 的图形是抛物线 (图 1.3).

函数的图形一般是一条曲线, 画出表示函数的曲线, 借助于形象思维, 是我们直观地分析和解决有关函数问题的重要手段.

(3) 列表法

列举出两个量对应取值的表格, 给出了对应关系, 也就得到了函数, 这就是函数的列表法表示方式. 例如, 观察一条河流的河床断面, 这个断面宽 50 m, 我们每隔 10 m 测量水深, 得到下面的数据表.

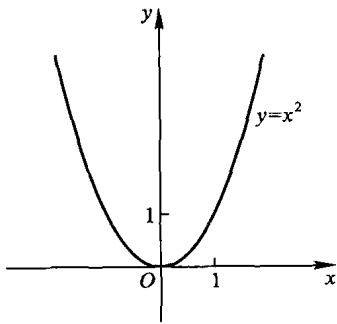


图 1.3

测量点 (m)	0	10	20	30	40	50
水深 (m)	0	5	15	20	10	0

这个表就表示了一个函数关系. 请思考这个函数的定义域和值域是什么?

(4) 隐函数

设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$, 若点 (x_0, y_0) 满足方程, 且在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$ 能够确定出一个满足方程的函数关系 $y = f(x)$, 则称此函数为由方程所确定的**隐函数**.

三、特性函数类

下面简单的介绍四类具有特殊性质的函数. 请注意它们的图形特点.