普通高中课程标准实验教材

高中数学

选修 2-2

GAOZHONG SHUXUE

新课标新精编

XINKEBIAO XINJINGBIAN

主编 胡建军

配人教 A 版

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

选修 2-2

新课标新精编

顾　问　岑　申　王而治　金才华　许芬英

主　编　胡建军

编　者　朱恒元　戴三红　潘相治　胡建军

浙江教育出版社

ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

新课标 新精编:人教A版.高中数学.2-2:选修/胡建军编.—杭州:浙江教育出版社,2008.12(2009.6重印)

ISBN 978-7-5338-7792-7

Ⅰ.新… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第195037号

责任编辑 金馥菊　　封面设计 韩 波
责任校对 戴正泉　　责任印务 温劲风

普通高中课程标准实验教材

新课标 新精编 高中数学 选修2-2

主　　编 胡建军

出版发行 浙江教育出版社
(杭州市天目山路40号 邮编310013)
图文制作 杭州富春电子印务有限公司
印　　刷 余杭人民印刷有限公司
开　　本 880×1230 1/16
印　　张 5.5
字　　数 170 000
印　　数 9 001—14 000
版　　次 2008年12月第1版
印　　次 2009年6月第2次
标准书号 ISBN 978-7-5338-7792-7
定　　价 8.00元

联系电话:0571-85170300-80928
e-mail:zjjy@zjcb.com　网址:www.zjeph.com

前　　言

高中数学新课程旨在提高学生的科学素养，改变学生的学习方式，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神，配合人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用，帮助学生实现高中数学课程的教育目标，我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师，在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上，编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以"讲求循序渐进，重视科学思想与科学方法，强调实践意识与探究精神，渗透情感态度与价值观的教育"为原则，与人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点：

1. 同步性。本丛书的例题和练习均以课时为基本单位，根据新课程教学的要求和学生学习的特点进行编写，与教学同步，便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要，设置了"学法指导"、"基础例说·基本训练"、"应用·拓展·综合训练"、"自我评估"、"高考链接"等栏目。"学法指导"帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求。"基础例说·基本训练"分"例说"和"训练"两部分，"例说"以典型例题为载体，教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法；"训练"目的在于让学生通过训练，巩固所学知识，发展思维能力。"应用·拓展·综合训练"纵览全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。"自我评估"为全章知识的综合评估，分A，B两份试卷，其中A卷为基本要求，B卷为较高要求。"高考链接"选取近几年有代表性的高考真题，让学生试做，以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求以及学生在不同学习阶段的不同要求，本丛书选编的训练题都分为"A组"和"B组"两组，分别反映了课程的基础性目标和发展性目标，使不同层次的学生都能够充分获益，也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念，突出数学探究、联系实际，注重激发学生学习的兴趣，力求反映近年来高中数学教学和命题研究的最新成果，所选习题无论是在内容上，还是在形式上，都具有一定的新颖性。

由于时间匆促，加上作者对新课程的认识有待进一步提高，本丛书在编写时难免出现一些不足之处，敬请广大师生指正。

本次印刷时，对个别差错作了校正。

浙江教育出版社

2009年6月

目 录

第一章　导数及其应用

学法指导

本章主要内容有：导数的概念，基本初等函数的求导公式，导数的四则运算，导数在研究函数与生活优化问题中的应用，定积分的概念，微积分基本原理与定积分的简单应用.

学习目标

1. 通过分析实例，经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵. 会通过函数图象直观地理解导数的几何意义，会求函数在某点处的切线方程.

2. 会求基本初等函数的导数，掌握导数的运算法则，能利用基本初等函数的导数公式和导数的运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数的导数.

3. 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间；结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及给定区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值.

4. 了解导数在实际问题中的应用，结合实际问题（如：利润最大、效率最高、用料最省等）体会导数在解决实际问题中的作用.

5. 通过求曲边梯形的面积、变力做功等实例，了解定积分的实际背景；借助几何直观体会定积分的基本思想，了解定积分的概念；通过实例了解微积分基本定理；会运用定积分解决一些简单的几何问题和物理问题.

重点、难点

重点是理解导数的本质——导数就是瞬时变化率，理解导数的几何意义，会求简单函数的导数，利用导数研究函数的单调性，理解“以直代曲”“以不变代变”的思想方法，定积分的概念、几何意义，会计算简单的定积分.

难点是理解导数的概念，函数在某点取得极值的必要条件和充分条件，“以直代曲”的思想方法，定积分的概念，微积分基本定理的含义.

主要概念、定理、公式及规律

1. 导数的定义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$，称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，

即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 是 x 的一个函数，称它为 $f(x)$ 的导函数（简称导数）. $y=f(x)$ 的导函数有时也可记作 y'，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 k，即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x_0)$. 相应地，点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

3. 基本初等函数的导数公式

(1) 若 $f(x)=c$，则 $f'(x)=0$.

(2) 若 $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbf{Q}^*)$，则 $f'(x)=nx^{n-1}$.

(3) 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$.

(4) 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$.

(5) 若 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$.

(6) 若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=e^x$.

(7) 若 $f(x)=\log_a x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$.

(8) 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

4. 导数的运算法则

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是可导的.

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$.

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

(3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ $[g(x)\neq 0]$.

5. 复合函数的导数

复合函数 $f[g(x)]$ 的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数关系为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. 即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

6. 导数的应用

(1) 利用导数的符号判断函数的增减性

在某区间 (a,b) 内，若 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增；若 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减；若 $f'(x)=0$，则 $y'=f(x)$ 在这个区间内为常数函数.

(2) 函数的极值

求函数 $y=f(x)$ 的极值的方法是：

①若在 x_0 两侧 $f'(x)$ 符号相同，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

②若在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值.

③若在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值.

(3) 函数的最大值与最小值

求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤是：

①求函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上的极值.

②将函数 $y=f(x)$ 在各个极值点处的值与端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

7. 定积分的概念

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$，当 $n\to\infty$ 时，上述和式无限接近某个常数，这个常数叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$，这里 a 与 b 分别叫做积分下限与积分上限，区间 $[a,b]$ 叫做积分区间，函数 $f(x)$ 叫做被积函数，x 叫做积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积式.

8. 定积分的几何意义

如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 连续，且恒有 $f(x)\geqslant 0$，那么定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=a$，$x=b$ $(a\neq b)$，$y=0$ 和曲线 $y=f'(x)$ 所围成的曲边梯形的面积，这是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义.

9. 定积分的性质

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数).

(2) $\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (其中 $a<c<b$).

10. 微积分基本定理

如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数，并且 $F'(x)=f(x)$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$.

这个结论叫做微积分基本定理，又叫做牛顿—莱布尼兹公式.

学习方法指导

1. 导数是微积分的初步知识，是研究函数、解决实际问题的有力工具. 学习时要理解平均变化率、瞬时速度的概念，理解导数的概念，掌握导数的几何意义，掌握基本初等函数的导数公式和导数的运算法则. 通过实例，感受导数在解题中的作用. 充分体会数形结合、分类讨论、化归等数学思想.

2. 导数是研究函数的有力工具. 由 $f'(x)$ 的符号可知函数 $f(x)$ 的单调性，由 $f'(x)$ 绝对值的大小可知函数变化得急剧还是平缓. 利用导数可以将求函数的极值的问题转化为求方程 $f'(x)=0$ 的解及研究在方程解的两侧导函数 $f'(x)$ 的符号问题.

3. 定积分是一种特定形式的和式的极限. 许多实际问题可归结为求这种特定形式的和式的极限.

基础例说·基本训练

1.1 变化率与导数

1.1.1 变化率问题

例说

例1 求 $y=2x^2+1$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

分析 根据函数平均变化率的定义求解.

解 所求的平均变化率为 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{[2(x_0+\Delta x)^2+1]-(2x_0^2+1)}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$.

例2 一个球沿一个斜面自由滚下，其运动方程是 $s(t)=t^2$（s 的单位：m，t 的单位：s）. 求小球在 5～6 s 之间的平均速度、5～5.5 s 之间的平均速度和 5～5.1 s 之间的平均速度，并与用匀加速直线运动的速度公式求得的 $t=5$ s 时的速度进行比较.

分析 某时间段的平均速度即为该时间段位移的平均变化率.

解 $\bar{v}_1=\frac{s(6)-s(5)}{6-5}=36-25=11(\mathrm{m/s})$，

$\bar{v}_2=\frac{s(5.5)-s(5)}{5.5-5}=\frac{30.25-25}{0.5}=10.5(\mathrm{m/s})$，

$\bar{v}_3=\frac{s(5.1)-s(5)}{5.1-5}=\frac{26.01-25}{0.1}=10.1(\mathrm{m/s})$.

$\because$ 小球做匀加速直线运动，初速度 $v_0=0$，

$\therefore$ $s(t)=\frac{1}{2}at^2=t^2$，$\therefore$ $a=2$.

$\therefore$ 5 s 时的速度 $v=at=2\times5=10(\mathrm{m/s})$.

注意 当所取的末时刻越接近 5 s 时，求出的平均速度越接近 5 s 时的速度.

例3 过曲线 $f(x)=x^3$ 的图象上两点 $P(1,1)$ 和 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$ 作曲线的割线，求出当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率.

解　∵　$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-1=(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+3\Delta x$，

∴　割线 PQ 的斜率 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x^2+3\Delta x+3$.

∴　当 $\Delta x=0.1$ 时，

割线的斜率 $k=0.1^2+3\times0.1+3=3.31$.

注意　割线 PQ 的斜率即为函数 $f(x)=x^3$ 从 1 到 $1+\Delta x$ 时 y 对 x 的平均变化率.

训　练

A　组

1. 在平均变化率的定义中，自变量 x 在 x_0 处的增量 Δx 满足(　　).

(A) $\Delta x>0$　　(B) $\Delta x<0$

(C) $\Delta x=0$　　(D) $\Delta x\neq0$

2. 函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的改变量 Δy 为(　　).

(A) $f(x_0+\Delta x)$　　(B) $f(x_0)+\Delta x$

(C) $f(x_0)\cdot\Delta x$　　(D) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

3. 若函数 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率为 k_1，在 $x_0-\Delta x$ 到 x_0 的平均变化率为 k_2，则(　　).

(A) $k_1>k_2$　　(B) $k_1<k_2$

(C) $k_1=k_2$　　(D) 不确定

4. 已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上一点(1,1)及邻近一点 $(1+\Delta x,1+\Delta y)$，则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于(　　).

(A) 4　　(B) $4x$

(C) $4+2\Delta x$　　(D) $4+2\Delta x^2$

5. 若质点 M 按规律 $s=3+t^2$ 运动，则在时间段[2, 2.1]内的平均速度为(　　).

(A) 4　(B) 4.1　(C) 0.41　(D) 3

6. 已知函数 $y=x^3-2$，当 $x=2$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

7. 已知两个函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=\sqrt{x}$，当 $\Delta x=\dfrac{1}{4}$，x 从 2 到 $2+\Delta x$ 时，两个函数的平均变化率分别为________.

B　组

8. 过函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ 的图象上两点 $A(1,2)$，$B(1+\Delta x,2+\Delta y)$ 作曲线的割线 AB. 求当 $\Delta x=\dfrac{1}{4}$ 时割线的斜率.

9. 已知做自由落体运动的物体的运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$（s 的单位：m，t 的单位：s），求 t 从 3 s 变化到 3.1 s，3.01 s，3.001 s 各时间段内的平均速度(g 取 10 m/s²).

1.1.2　导数的概念

例　说

例 1　物体的运动方程是 $s=10t+5t^2$（s 的单位：m，t 的单位：s）. 求物体在 $t=10$ s 时的瞬时速度.

分析　瞬时速度即为物体在 $[t,t+\Delta t]$ 内的平均速度在 $\Delta t\to0$ 时的极限.

解　$v=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{s(10+\Delta t)-s(10)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{10\Delta t+5\Delta t^2+100\Delta t}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to0}(5\Delta t+110)=110(\text{m/s})$.

注意　(1) 要正确理解平均速度与瞬时速度的概念，并能加以区分.

(2) 本题也可用运动学公式求解.

例 2　求函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

分析　由导数定义，可得求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的步骤如下：

(1) 求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2) 求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3) 取极限，得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

解　∵　$\Delta y=\sqrt{1+\Delta x}-\sqrt{1}$，

∴　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$

$=\dfrac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)(\sqrt{1+\Delta x}+1)}{\Delta x\cdot(\sqrt{1+\Delta x}+1)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}$.

∴　$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}$，　∴　$y'|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$.

例 3　已知一个质点在水平轴上运动，它的运动方程是 $x=1-6t+t^2$（$t\geqslant0$）. 其中，x 的单位为 m，t 的单位为 s.

(1) 求质点在时刻 t 的速度；

(2) 求质点的初速度和初始位置；

(3) 何时何地质点改变它的运动方向？

(4) 求 $t=6$ s 时的质点位置和速度.

分析 根据变速直线运动瞬时速度的定义，求质点在任一时刻 t 的速度即为求时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 时 x 的增量与 t 的增量 Δt 之比，当 $\Delta t\to 0$ 时的极限.

解 (1) $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{[1-6(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2]-(1-6t+t^2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-6+2t+\Delta t)=2t-6.$

(2) 初速度 $v_0=(2t-6)|_{t=0}=-6(\text{m/s})$，

初始位置 $x_0=(1-6t+t^2)|_{t=0}=1(\text{m})$.

设水平轴为 x 轴，它的正方向向右，那么当质点向右运动时，速度 v 为正；质点向左运动时，速度 v 为负. 所以初始时刻，质点位于 x 轴右侧距原点 1 m 处，以 6 m/s 的速度向左运动.

(3) 当 $v=0$，即 $2t-6=0$ 时，$t=3$，也就是质点自开始运动经 3 s 后，开始改变运动方向.

此时，$x=(1-6t+t^2)|_{t=3}=-8(\text{m})$，

即质点位于 x 轴左侧距原点 8 m 处.

(4) 当 $t=6$ s 时，质点所在位置是

$x=(1-6t+t^2)|_{t=6}=1(\text{m})$，即质点回到了出发点，

此时的速度 $v=(2t-6)|_{t=6}=6(\text{m/s})$，

即质点以 6 m/s 的速度向右运动.

质点的运动情况如图 1-1 所示.

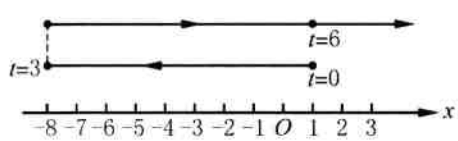

图 1-1

注意 本题也可运用物理学中匀变速直线运动的速度公式计算，其计算结果与上面用平均速度的极限求得的瞬时速度一致.

训 练

A 组

1. 函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数是(　　).

(A) 2　(B) 1　(C) 0　(D) $\dfrac{5}{2}$

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数为 $f'(1)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于(　　).

(A) $f'(1)$　(B) $3f'(1)$

(C) $\dfrac{1}{3}f'(1)$　(D) $f'(3)$

3. 已知 $f(x)=ax+4$. 若 $f'(1)=2$，则实数 a 的值为(　　).

(A) 2　(B) -2　(C) 3　(D) -3

4. 已知 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}$ 等于(　　).

(A) -1　(B) -2　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

5. 已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f(3)=2$，$f'(3)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-3f(x)}{x-3}$ 的值为(　　).

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 不存在

6. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 等于(　　).

(A) $-\dfrac{1}{a}$　(B) $\dfrac{2}{a}$　(C) $-\dfrac{1}{a^2}$　(D) $\dfrac{1}{a^2}$

7. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 11，则：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=$________；

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{2(x_0-x)}=$________.

B 组

8. 若球的体积随着半径 r 的增大而增大，则球的体积在 $r=2$ 时的瞬时变化率为________.

9. 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为 $f'(x_0)=A$，试求下列极限的值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$.

10. 用导数的定义求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=4$ 处的导数.

11. 设一个物体在 t s 内所经过的路程为 s m，且 $s=4t^2+2t-3$，试分别求物体在运动开始及第 5 s 末时的速度.

12. 物体按规律 $s(t)=at^2+1$ 作直线运动（s 的单位：m，t 的单位：s）. 若物体在 $t=2$ s 时的瞬时速度为 8 m/s，求实数 a 的值.

1.1.3 导数的几何意义

例 说

例 1 求曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线的斜率 k.

分析 函数在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率 k 即为函数在此点的导数.

解 $y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^2+1-1^2-1}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2.$

例 2 求过点 $P(-2,2)$ 且与曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线平行的直线.

分析 直线与曲线在点 M 处的切线平行，则直线与切线的斜率相等.

解 曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(1,1)$ 处的切线斜率 $k=y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3(1+\Delta x)^2-4(1+\Delta x)+2-3+4-2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3\Delta x+2)=2.$

所以所求直线的斜率为 2.

所以所求直线的方程为 $y-2=2(x+2)$，

即 $2x-y+6=0$.

例 3 已知 $y=f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，求 y' 和 $y'|_{x=1}$.

分析 求函数在某一点处的导数可先求出函数的导数，然后求该点的导数.

解 $\because$ $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}}$，

$\therefore$ $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot\Delta x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}.$

$\therefore$ $y'|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}.$

注意 函数的导数与函数在 x_0 处的导数不是同一个概念，函数在 x_0 处的导数是导函数在 $x=x_0$ 处的函数值.

训 练

A 组

1. 曲线 $y=-2x^2+1$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线的斜率为（　　）.
(A) -4　　(B) 0　　(C) 4　　(D) 不存在

2. 已知曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2$ 上一点 $P\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，则过点 P 的切线的倾斜角为（　　）.
(A) 30°　　(B) 45°　　(C) 135°　　(D) 165°

3. 曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(-2,5)$ 处的切线方程为（　　）.
(A) $4x+y+3=0$　　(B) $2x+y+3=0$
(C) $4x-y-3=0$　　(D) $4x+y-3=0$

4. 已知曲线 $y=ax^2+1$ 与直线 $y=x$ 相切，则实数 a 的值为（　　）.
(A) $\dfrac{1}{8}$　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1

5. 在曲线 $y=x^2$ 上某点处的切线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则该点是（　　）.
(A) $(0,0)$　　(B) $(2,4)$
(C) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{16}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$

6. 已知做自由落体运动的物体的运动方程是 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，物体在 $t=8$ s 时刻的速度是________（g 取 10 m/s²）.

B 组

7. 已知曲线 $y=x^3+x-2$，在其上一点 P 处的切线与直线 $y=-\dfrac{1}{4}x+1$ 垂直，则点 P 的坐标为________.

8. 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 在点 $P(1,2)$ 处的切线与直线 $y=x-3$ 平行，则 $b=$________，$c=$________.

9. 求曲线 $y=\frac{4}{x}-\sqrt{x}$ 在其上一点 $P(4,-1)$ 处的切线方程.

10. 求过点 $P(2,0)$ 且与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 相切的直线方程.

11. 求证：函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 图象上各点处的切线斜率小于 1.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

例说

例 1 求过曲线 $y=2\sin x$ 上的点 $P\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$，且与曲线在点 P 处的切线垂直的直线方程.

分析 利用导数的几何意义求出切线的斜率，即可得到所求直线的斜率.

解 $\because$ $y=2\sin x$，$\therefore$ $y'=2\cos x$.

$\therefore$ $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

$\therefore$ 曲线在点 P 处的切线的斜率为 $\sqrt{2}$.

$\therefore$ 所求直线的斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 所求直线的方程为 $y-\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

即 $x+\sqrt{2}y-2-\frac{\pi}{4}=0$.

例 2 求曲线 $y=x^2$ 过点 $P(2,3)$ 的切线方程.

分析 点 P 不在曲线上，因此点 P 不是切点. 先设切点的坐标为 (x_0,y_0)，然后利用待定系数法求解.

解 设切点的坐标为 (x_0,y_0)，则过该点的切线的斜率为 $y'|_{x=x_0}=2x|_{x=x_0}=2x_0$.

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-3=2x_0(x-2)$.

$\because$ 切点既在曲线上，又在切线上，

$\therefore$ $\begin{cases} y_0=x_0^2, \\ y_0-3=2x_0(x_0-2), \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_0=1, \\ y_0=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=9. \end{cases}$

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-3=2(x-2)$，

或 $y-3=6(x-2)$，

即 $2x-y-1=0$，或 $6x-y-9=0$.

注意 过曲线外一点求曲线的切线方程，通常转化为求以曲线上一点为切点的切线方程.

例 3 已知 $P(-1,1)$，$Q(2,4)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的两点，求与直线 PQ 平行的曲线 $y=x^2$ 的切线方程.

分析 解题的关键是求出切点的坐标.

解 $y=x^2$ 的导数为 $y'=2x$.

设切点为 $R(x_0,y_0)$，则 $y'|_{x=x_0}=2x_0$.

$\because$ 直线 PQ 的斜率 $k=\frac{4-1}{2+1}=1$，

又 $\because$ 切线平行于直线 PQ，

$\therefore$ $k=y'|_{x=x_0}=2x_0=1$，

$\therefore$ $x_0=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 切点 R 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

$\therefore$ 所求的切线方程为 $y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$，

即 $4x-4y-1=0$.

注意 本题也可利用直线与抛物线的位置关系，运用判别式求解.

训练

A 组

1. $f(x)=0$ 的导数为(　　).

(A) 0　(B) 1　(C) 不存在　(D) 不确定

2. $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的导数为(　　).

(A) $3x^2$　(B) $\frac{1}{3}x^2$　(C) $-\frac{1}{2}x^2$　(D) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

3. $y=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处的切线的斜率为(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{2}$

4. 若曲线 $y=x^n$ 在 $x=2$ 处的导数为 12，则 n 等于(　　).

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

5. 若 $f(x)=3\sqrt{x}$，则 $f'(1)$ 等于(　　).

(A) 0　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) 3　(D) $\frac{3}{2}$

6. $y'=0$ 表示函数 $y=c$ 图象上每一点处的切线斜率都为________.

7. 曲线 $y=x^2$ 过点 $P(2,1)$ 的切线方程为________.

8. 在曲线 $y=\frac{4}{x^2}$ 上求一点 P，使得曲线在该点处的切线的倾斜角为 $135°$.

9. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^{12}$；　　(2) $y=x\sqrt{x}$；

(3) $y=\frac{1}{x^4}$；　　(4) $y=\sqrt[5]{x^3}$.

B　组

10. 下列结论不正确的是(　　).

(A) 若 $y=0$，则 $y'=0$

(B) 若 $y=5x$，则 $y'=5$

(C) 若 $y=x^{-1}$，则 $y'=-x^{-2}$

(D) 若 $y=x^{\frac{1}{2}}$，则 $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

11. 曲线 $y=2x^4$ 上的点到直线 $y=-x-1$ 的距离的最小值为(　　).

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\frac{5\sqrt{2}}{16}$

12. 若物体的运动方程为 $s=t^3$，则物体在 $t=1$ 时的速度为________，在 $t=4$ 时的速度为________.

13. 已知直线 l_1 为曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线，l_2 为该曲线的另一条切线，且 $l_1\perp l_2$. 求：

(1) 直线 l_2 的方程；

(2) 由直线 l_1，l_2 和 x 轴所围成的三角形的面积.

14. 求曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 在横坐标为 x_0 的点处的切线方程，并求此切线被两条坐标轴所截线段的最短长度.

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

第1课时　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

例说

例1　求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$；

(2) $y=(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$；

(3) $y=x^2\cos x$；

(4) $y=\frac{\ln x+2^x}{x^2}$.

分析　可利用导数公式与导数的运算法则直接求导.

解　(1) ∵　$y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{7}{6}}$，

∴　$y'=(x^{\frac{7}{6}})'=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}$.

(2) ∵　$y=(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$=1-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1=x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$，

∴　$y'=(x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})'=(x^{-\frac{1}{2}})'-(x^{\frac{1}{2}})'$

$=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

(3) $y'=(x^2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'$

$=2x\cos x-x^2\sin x$.

(4) $y'=\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{2^x}{x^2}\right)'=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'+\left(\frac{2^x}{x^2}\right)'$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}+\frac{2^x\cdot\ln 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{(1-2\ln x)x+(\ln 2\cdot x^2-2x)\cdot 2^x}{x^4}$$

$$=\frac{1-2\ln x+(\ln 2\cdot x-2)\cdot 2^x}{x^3}.$$

注意　求较复杂的函数的导数时，先对函数作适当

的变形，然后求导.

例2 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(1,1)，且在点(2,−1)处与直线 $y=x-3$ 相切，求实数 a,b,c 的值.

解 ∵ $y=ax^2+bx+c$ 过点(1,1)，

∴ $a+b+c=1$. ①

∵ $y'=2ax+b$, $y'|_{x=2}=4a+b$,

∴ $4a+b=1$. ②

又∵ 曲线过点(2,−1)，

∴ $4a+2b+c=-1$. ③

将①②③联立，解得 $a=3,b=-11,c=9$.

注意 过曲线上某点的切线包含两层含义：①切线的斜率是该点处的导数；②该点的坐标满足曲线的方程.

例3 已知函数 $y=(1+x)^n$ 的导数 $y'=n(1+x)^{n-1}$，求证：$C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

证明 ∵ $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$,

两端对 x 求导，得

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$.

令 $x=1$，得

$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

∴ 原等式成立.

注意 某些问题用导数方法求解非常简捷. 如：2008年浙江省高考数学试题："若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$，则 $\tan\alpha=$________"，只需对条件的两边分别求导即可.

训练

A 组

1. 已知 $y=-\tan x$，则 y' 等于(　　).

(A) $-\dfrac{1}{\cos^2x}$　　(B) $\dfrac{\tan x}{\cos x}$

(C) $\dfrac{1}{1+x^2}$　　(D) $-\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 已知 $f(x)=x^{-5}+3\sin x$，则 $f'(x)$ 等于(　　).

(A) $-5x^{-6}-3\cos x$　　(B) $x^{-6}+3\cos x$

(C) $-5x^{-6}+3\cos x$　　(D) $x^{-6}-3\cos x$

3. 已知 $f(x)=ax^3+9x^2+6x-7$. 若 $f'(-1)=4$，则实数 a 的值为(　　).

(A) $\dfrac{19}{3}$　(B) $\dfrac{16}{3}$　(C) $\dfrac{10}{3}$　(D) $\dfrac{13}{3}$

4. 已知物体的运动方程是 $s=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$ (s 的单位：m，t 的单位：s)，则瞬时速度为0的时刻是(　　).

(A) 0 s、2 s或4 s　　(B) 0 s、2 s或16 s

(C) 2 s、8 s或16 s　　(D) 0 s、4 s或8 s

5. 若函数 $f(x)=e^x\sin x$，则此函数图象在点(4, $f(4)$)处的切线的倾斜角为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) 0　(C) 钝角　(D) 锐角

6. 已知 $f(x)=ax^2-b\sin x$，且 $f'(0)=1$，$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，则实数 $a=$________，$b=$________.

7. 已知 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$，则不等式 $f'(x)<0$ 的解集为________.

8. 曲线 $y=\cos x$ 在点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线的斜率为________.

9. 已知曲线 $y=2\sqrt{x}+1$.

(1) 求曲线在点 $P(9,7)$ 处的切线方程；

(2) 曲线上哪一点处的切线与直线 $2x+y-3=0$ 垂直？

10. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4-3x^2-5x+6$；

(2) $y=x\cdot\tan x$；

(3) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$；

(4) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

B 组

11. 曲线 $y=x\sin x$ 在点 $P\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=\pi$ 所围成的三角形的面积为(　　).

(A) $\dfrac{\pi^2}{2}$　　(B) π^2

(C) $2\pi^2$　　(D) $\dfrac{1}{2}(2+\pi)^2$

12. 设 $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=f'_0(x)$, $f_2(x)=f'_1(x)$, $\cdots$, $f_{n+1}(x)=f'_n(x)$, $n\in\mathbf{N}$，则 $f_{2008}(x)$ 等于(　　).

(A) $\sin x$　　(B) $-\sin x$

(C) $\cos x$　　(D) $-\cos x$

13. 给出下列求导式：

①$(2x^3-\cos x)'=6x^2+\sin x$；

②$\left(2-\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}$；

③$[(3+x^2)(2-x^3)]'=2x(2-x^3)+3x^2(3+x^2)$；

④$\left(\frac{1+\cos x}{x^2}\right)'=\frac{2x(1+\cos x)+x^2\sin x}{x^2}$；

⑤$\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)'=\frac{3x^2\sin x-x^3\cos x}{\sin^2 x}$；

⑥$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

其中正确的是(　　).

(A) ①②③⑤　　(B) ②④⑤⑥

(C) ①②⑤⑥　　(D) ①②③④⑤⑥

14. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $f'(0)$等于(　　).

(A) $a_0n!$　(B) a_0　(C) a_{n-1}　(D) 0

15. 已知函数 $f(x)=ax+be^x$ 的图象在点 $P(-1,2)$处的切线与直线 $y=-3x$ 平行，求函数 $f(x)$的解析式.

16. 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$.

(2) $y=\frac{2}{1-\sqrt{x}}+\frac{2}{1+\sqrt{x}}$.

17. 已知抛物线 $y=ax^2+bx-7$ 通过点(1,1)，且抛物线在点(1,1)处的切线方程为 $4x-y-3=0$，求实数 a，b 的值.

第2课时　简单的复合函数的导数

例说

例4　指出下列函数是怎样复合而成的：

(1) $y=\sin^3 x$；　　(2) $y=(1+\sin^2 x)^4$；

(3) $y=2^{\log_3(x^2-1)}$.

分析　由复合函数的定义知，选择中间变量是以基本初等函数为标准的.

解　(1) $y=u^3$，$u=\sin x$.

(2) $y=u^4$，$u=1+v^2$，$v=\sin x$.

(3) $y=2^u$，$u=\log_3 v$，$v=x^2-1$.

例5　求下列函数的导数：

(1) $y=(2+\sin x)^2$；

(2) $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$；

(3) $y=e^{-3x^2+x}$.

分析　复合函数的求导关键是选择适当的中间变量，然后根据复合函数的求导法则由外向里逐层求导.

解　(1) 设 $y=u^2$，$u=2+\sin x$.

$\therefore$　$y'_x=y'_u\cdot u'_x$

$=2u\cdot\cos x=2(2+\sin x)\cos x$

$=\sin 2x+4\cos x$.

(2) 设 $y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=ax^2+bx+c$.

$\therefore$　$y'=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{2}\cdot u^{-\frac{1}{2}}\cdot(2ax+b)$

$=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2ax+b)$

$=\frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{2(ax^2+bx+c)}$.

(3) 设 $y=e^u$，$u=-3x^2+x$.

$\therefore$　$y'=y'_u\cdot u'_x=e^u\cdot(-6x+1)$

$=e^{-3x^2+x}\cdot(-6x+1)$.

注意　中间变量需转换成自变量的函数. 如第(1)题，不应写作 $y'_x=2u\cdot\cos x$.

例6　(1) 求函数 $y=(2x^2-3)\sqrt{1+x^2}$ 在点 $x=1$ 处的导数；

(2) 已知 $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^8$，求$\frac{f'(1)}{f(1)}$.

解　(1) $\because$　$y=(2x^2-3)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$，

$\therefore$　$y'=(2x^2-3)'(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$+(2x^2-3)[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]'$

$=4x\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(2x^2-3)\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x$

$=4x\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{1+x^2}}$，

$\therefore$　$y'|_{x=1}=4\sqrt{2}+\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

(2) ∵ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^8$，

∴ $f'(x)=8(x+\sqrt{1+x^2})^7\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'$

$=8(x+\sqrt{1+x^2})^7\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=8(x+\sqrt{1+x^2})^7\cdot\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$=\dfrac{8(x+\sqrt{1+x^2})^8}{\sqrt{1+x^2}}$.

∴ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{8}{\sqrt{1+x^2}}$， ∴ $\dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.

训练

A 组

18. 指出下列函数是怎样复合而成的：

(1) $y=\cos^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(2) $y=(1+\lg^2 x)^4$；

(3) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；

(4) $y=\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

19. 函数 $y=(x+1)^2(x-1)$在 $x=1$ 处的导数为(　　).

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

20. 函数 $y=\cos^{-2}x$ 的导数为(　　).

(A) $y'=-2\cos x\sin x$

(B) $y'=\sin 2x\cos^{-4}x$

(C) $y'=-2\cos^2 x$

(D) $y'=-2\sin^2 x$

21. 函数 $y=4(2-x+3x^2)^2$ 的导数为(　　).

(A) $8(2-x+3x^2)$

(B) $2(-1+6x)^2$

(C) $8(2-x+3x^2)(6x-1)$

(D) $4(2-x+3x^2)(6x-1)$

22. 已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为$\dfrac{1}{2}$，则其切点的横坐标为(　　).

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) $\dfrac{1}{2}$

23. 已知函数 $f(x)=(1-2x^3)^{10}$，则 $f'(1)$等于(　　).

(A) 0　(B) -1　(C) -60　(D) 60

24. 已知函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，则 $y'|_{x=2}=$________.

25. 函数 $y=(3-x)^5$ 在 $x=3$ 处的导数为________.

26. 已知曲线 $y=8\sin^3 x$，求曲线在点 $P\left(\dfrac{\pi}{6},1\right)$处的切线方程.

27. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^2\sin x$；

(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$；

(4) $y=\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$.

B 组

28. 函数 $y=\log_a(2x^2-1)$的导数为(　　).

(A) $\dfrac{4x}{2x^2-1}\log_a e$　(B) $\dfrac{4x}{2x^2-1}$

(C) $\dfrac{1}{2x^2-1}\log_a e$　(D) $(2x^2-1)\log_a e$

29. 二次函数 $y=f(x)$的图象过原点，且它的导数 $y=f'(x)$的图象是过第一、二、三象限的一条直线，则函数 $y=f(x)$的图象的顶点在(　　).

(A) 第一象限　(B) 第二象限

(C) 第三象限　(D) 第四象限

30. 函数 $y=\cos^2(3x-\pi)$的导数为________.

31. 设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)$ $(0<\varphi<\pi)$. 若 $f(x)+f'(x)$是奇函数，则 $\varphi=$________.

32. 已知函数 $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^{10}$，求$\frac{f'(1)}{f(1)}$.

33. 求函数 $f(x)=\cos x\cos 2x\cos 4x$ 的导数.

34. 已知函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，求$f'(0)$.

第3课时 习题课

例说

例7 求函数 $y=2^x\cos x-x^2\log_{2008}x$ 的导数.

分析 本题需运用基本初等函数的求导公式与求导的运算法则求解.

解 $y'=(2^x)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot 2^x$

$-[(x^2)'\cdot\log_{2008}x-(\log_{2008}x)'\cdot x^2]$

$=2^x\cdot\ln 2\cdot\cos x-\sin x\cdot 2^x$

$-2x\log_{2008}x+\frac{1}{x\cdot\ln 2\,008}\cdot x^2$

$=2^x(\cos x\cdot\ln 2-\sin x)-x(2\log_{2008}x-\frac{1}{\ln 2\,008})$.

例8 求 $y=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的导数.

分析 本题可运用 $y=u^2$，$u=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；或 $y=u\cdot v$，其中 $u=v=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；或运用三角公式先变形为 $y=\frac{1-\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$，然后求导.

解法1 设 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+\frac{\pi}{3}$，

则 $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$

$=(u^2)'_u\cdot(\sin v)'_v\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'_x$

$=2u\cdot\cos v\cdot 2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2$

$=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

解法2 设 $u=v=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

则 $y=uv=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

$\therefore\ y'=u'v+uv'$

$=\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'$

$=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

解法3 把 $y=\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$变形为

$y=\frac{1-\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$.

$y'=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]'$

$=\frac{1}{2}\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)'$

$=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

注意 在解法2中，$u=v=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$仍为复合函数，故在求导时，$u$，$v$ 对 x 还需求导，即 $u'=v'=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'$.

例9 已知 $0<x<1$，求函数 $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$的导数.

分析 本题可利用导数的运算法则求解，但较繁琐.若对函数解析式两边取对数的方法求解，则较简捷.

解 $\because\ 0<x<1$，$\therefore\ y>0$.

对 $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$的两边取对数，得

$\ln y=\ln\left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

$=\ln x+\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$.

对上式两边求导，可得

$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^2}$，

$\therefore\ y'=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^2}\right)y$.