GAILULUNYUSHULITONGJI

QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

概率论与数理统计

全程学习指导与习题精解

（浙大四版）

主编　滕加俊

重点难点提示

典型例题分析

课后习题全解

考研真题精解

同步测试检验

权威全面全能

考试考研无敌

东南大学出版社
Southeast University Press

概率论与数理统计

全程学习指导与习题精解

浙 大 四 版

主　编:滕加俊

编　委:滕加俊　张　瑰　张　纯

寇冰煜　滕兴虎　吴　欧

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书是按照高等院校教材《概率论与数理统计》(浙江大学第四版)而编写的学习指导与习题精解参考书。全书按教材章节进行编写,每章分为基本要求、重点难点,主要概念与公式、典型例题分析、课后习题全解、考研真题精解等。本书可作为高等院校在校学生学习及自考之用,也可作为教师的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计全程学习指导与习题精解:浙大四版/滕加俊主编. 一南京:东南大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-5641-2697-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 053264 号

概率论与数理统计全程学习指导与习题精解(浙大四版)

主　　编	滕加俊	**责任编辑**	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	**电子邮件**	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	**出 版 人**	江建中
社　　址	南京市四牌楼2号	**邮　　编**	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	**电子邮件**	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	**印　　刷**	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	**印　　张**	21　**字　数**　350千
版　　次	2011年6月第1版第1次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-2697-1		
定　　价	29.80元		

前　言

《概率论与数理统计》在自然科学、社会科学、金融和经济学等方面都有广泛的应用，是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的一门重要的基础课程，也是大多数专业研究生入学考试的必考科目。为了帮助在校的大学生及考研的同学学好扎实的掌握《概率论与数理统计》的精髓及解题技巧，提高解答各种题型和应试能力，我们根据《概率论与数理统计》(浙大四版)编写了这本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 概念、定理及公式：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容；

2. 重、难点解答：列出相应各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了相应的解释说明，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

3. 课后习题全解：教材中课后习题丰富、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，因此我们对课后习题给出了详细的解答。由于微积分解题方法多种多样，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

4. 考研真题精解：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答，这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握《概率论与数理统计》的基本内容和解题方法。

本书由滕加俊、张瑰、张纯、滕兴虎、寇冰煜、吴欧、颜超、王璞等同志编写，杨传兵、王浩、卢月、邱颖萍、刘娟、胡俊、周雨濛、李茂广、李琳、陈庆、许肖燕等也参加了编写工作。在本书的策划、编写、审稿方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此深表感谢。由于编者水平有限，错漏不当之处，诚恳期望同行和读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　概率论的基本概念

第二章　随机变量及其分布

第三章　多维随机变量及其分布

第四章　随机变量的数字特征

第五章　大数定律及中心极限定理

第六章　样本及抽样公布

第七章　参数估计

第八章　假设检验

第九章　方差分析及回归分析

第十章　bootstrap 方法

第一章　概率论的基本概念

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 理解样本空间、随机试验、随机事件等概念；

(2) 熟练掌握事件之间的关系与事件之间的运算；

(3) 掌握概率的定义和性质，会利用性质计算概率；

(4) 掌握等可能概型(古典概型)，熟悉它的计算公式；

(5) 弄懂条件概率的定义，熟练掌握并应用乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式；

(6) 掌握独立性的概念，并记住在这个条件下相应事件的运算法则.

重点：

概率的乘法公式，全概率公式和贝叶斯公式.

难点：

有关事件概率的计算方法.

主要概念与公式

本章主要知识结构图如下：

- 概率论的基本概念
  - 随机试验
  - 样本空间、随机事件
    - 样本空间、事件定义
    - 事件间的关系
    - 事件的运算及运算法则
  - 频率与概率
    - 频率
    - 概率
      - 定义
      - 性质
    - 概率的计算
      - 古典概率
      - 几何概率
      - 条件概率三公式
        - 乘法公式
        - 全概率公式
        - 贝叶斯公式(逆概率公式)
  - 独立性
    - 事件独立性
    - 伯努利概型

1. 随机试验

在概率论中，我们把具有下列三个特点的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间、随机事件

(1) 样本空间与样本点

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间；样本空间的元素，即 E 的每个结果，称

为样本点.

(2) 随机事件

随机试验 E 的样本空间的子集称为 E 的随机事件,简称事件.

3. 事件的关系

设试验的样本空间为 S,A、B 是 S 的子集

(1) 包含关系:若 $A \subset B$,则称事件 B 包含事件 A,即事件 A 发生时事件 B 必发生;

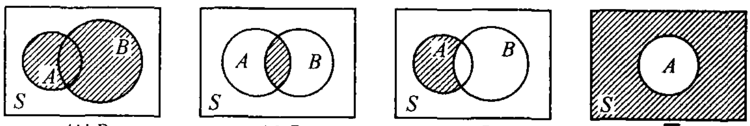
(2) 相等关系:若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A、B 相等,记为 $A = B$;

(3) 互斥关系:若 $A \cap B = \varnothing$,则称 A、B 互不相容(互斥),即事件 A、B 不同时发生.

4. 事件的运算

名　称	记　号	定义式	意　义
和事件	$A \cup B, A+B$	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$	事件 A 与事件 B 中至少一个发生
积事件	$A \cap B, AB$	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$	事件 A 与事件 B 同时发生
差事件	$A-B$	$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \overline{\in} B\}$	事件 A 发生且事件 B 不发生
逆事件	$\overline{A}$	$\overline{A} = S - A$	事件 A 不发生

图示:



$A \cup B$　　$A \cap B$　　$A-B$　　$\overline{A}$

5. 事件的运算法则

设 A、B、C 为事件,则有如下的运算法则:

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A$,$A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律:$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) 德摩根律:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

注 1　上述几个定律事实上就是集合论中集合运算的定律,将概率论中最基本的概念与集合的概念统一起来,就使得概率论也建立在集合论的基础上,最终被承认为数学的一个分支.

注 2　概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的,同学们将两者对应起来学习将会事半功倍.下列是两者的对应关系:

记号	概率论	集合论
S	样本空间　必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立(逆)事件	A 的余集

记号	概率论	集合论
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少一个发生	集合 A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与 B 的差集
$AB = \varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与 B 没有相同的元素

6. 频率与概率的定义及性质

(1) 频率

在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$.

(2) 概率

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，如果它满足以下条件：

① 非负性：对于每一事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

② 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S) = 1$；

③ 可列可加性：对于 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容的事件，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

注　$A_1, A_2, \cdots$ 两两互不相容，是指 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots)$

则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(3) 频率与概率的关系

从定义上看，频率与概率是两个完全不同的概念：频率不能脱离具体的 n 次试验，而概率是指一次试验中事件发生的可能性的大小，它与试验的次数 n 无关.

(4) 概率的基本性质

① 不可能事件的概率 $P(\varnothing) = 0$；

② 有限可加性：对于两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

③ 单调性：若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$；

④ 可减性：若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$；

⑤ 逆事件的概率：$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

⑥ 加法公式：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

7. 等可能概型(古典概型)

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具备以上两个特点的试验称为等可能概型(古典概型).

$$P(A) \overset{k}{\underset{j=1}{=}} P(\{e_j\}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件的总数}}$$

8. 条件概率及条件概率三公式

(1) 定义：

设 A、B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

(2) 条件概率三公式

① 乘法公式:设 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)$$

一般地,有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)\cdots P(A_{n-1} \mid A_1\cdots A_{n-2})P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1})$$

② 全概率公式:

设样本空间为 $S,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0$,则

$$P(A)=P(A \mid B_1)P(B_1)+P(A \mid B_2)P(B_2)+\cdots+P(A \mid B_n)P(B_n)$$

③ 贝叶斯公式(又称逆概率公式):设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0$, $P(A)>0$,则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A \mid B_j)P(B_j)},i=1,2,\cdots,n$$

乘法公式,全概率公式和贝叶斯公式称为条件概率三公式.

9. 独立性的定义与性质

(1) 两个事件的独立性:设 A、B 是两个事件,若成立

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A、B 相互独立(简称 A、B 独立).

(2) 三个事件两两相互独立:设 A、B、C 是三个事件,若下列三个等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$

同时成立,则称 A、B、C 三个事件两两相互独立.

(3) 三个事件相互独立:设 A、B、C 是三个事件,若下列四个等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

同时成立,则称 A、B、C 三个事件相互独立.

(4) n 个事件相互独立:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若任给 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n,k=2,3,\cdots,n$,有

$$P(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(5) 相互独立的随机事件的性质

① 设 A、B 是两事件,且 $P(B)\neq 0$,则 A、B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A \mid B)=P(A)$

② 若 A、B 相互独立,则以下各对事件也相互独立:

$$A 与 \overline{B},\overline{A} 与 B,\overline{A} 与 \overline{B}$$

重、难点解答

1. 随机试验的全部可能结果组成的集合称为样本空间,样本空间的子集称为事件,所以从本质上讲样本空间与事件还是一个集合,因此有关集合的理论在这里都可使用,例如集合之间的关系及运

算等.

2. 古典概率的计算关键是基本事件、样本空间的选定以及会数数，常用的数数方法有三种：

① 列举法(直接数数法)

② 集合对应法(乘法法则，加法法则，排列，组合等等)

③ 逆数法(先求出 $n(\overline{A})$，再求 $n(A) = n(\Omega) - n(\overline{A})$)

常用的古典概型有三种：袋中取球，随机取数以及随机占位，我们常常可以把问题化为这三种模式之一来考虑并求解.

有关事件的样本点的计算问题可复习排列组合等内容.

3. 对于划分(或完备事件组)的概念要注意理解，若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间的一个划分(或完备事件组)，则对于每次试验，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生.

4. 求某个事件的概率时，常遇到求"至少"或"至多"等事件的概率问题. 若从正面考察这些事件，它们往往是诸多事件的和或积，求解很繁琐，但"至少""至多"这些事件的对立事件却较简单，且其概率也容易求出. 此时，不妨逆向思考，先求其对立事件的概率，然后运用公式 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 即可求原来事件的概率.

5. 注意不要把事件的条件概率与积事件的概率混淆，即 $P(A \mid B)$ 与 $P(AB)$ 是不同的概念.

6. 条件概率的计算方法有两种，一是限制样本空间的办法，例如求 $P(B \mid A)$，注意到事件 A 已经发生，因此样本空间不属于 A 的点就可排除，样本空间可缩减为 $S' = A$，在 A 中计算事件 B 的概率. 二是直接运用公式 $P(B \mid A) = P(AB) \cdot P(A)$ 来计算条件概率.

7. 全概率公式与 Bayes 公式是使用广泛的重要公式. 全概率公式的基本思想是把较复杂事件的概率计算分解为较简单的事件概率，而 Bayes 公式往往用于从结果分析原因时的概率计算，帮助我们追查事件的起因. 注意在使用全概率公式或 Bayes 公式时，对样本空间进行划分，划分后的事件组必须是完备事件组(即划分).

8. 事件的独立性是很重要的概念，在概率论与数理统计中经常使用到，对于事件的独立性，我们往往并不根据其定义，而是根据实际背景来判定，要注意一组事件"相互独立"与"两两独立"是不同的.

9. 还要特别注意两事件"相互独立"与"互不相容"的区别. 一般地两事件独立与两事件互不相容是没有关系的.

典型例题分析

【例 1】 写出下列随机试验 E 的样本空间 Ω，如果 Ω 是有限集，计算样本空间的容量 V_Ω(Ω 中样本点的总数目).

(1) E：一个小班进行一次数学考试，记录平均成绩(百分制)；

(2) E：10 件产品中有 3 件次品，每次从该 10 件中任取 1 件(取后不放回)，直到将 3 件次品都取出为止，记录抽取的次数；

(3) E：连续生产某种产品，直到生产出 10 个正品为止，记录产品总件数；

(4) E：某射手向靶射击，直到击中为止，记录击中的各种情况；

(5) E：向 xOy 平面上的单位圆内($x^2 + y^2 < 1$)投点，记录落点坐标.

【分析】 写出样本空间，分析事件间的关系进行求解.

解　(1) 设 n 为小班里的人数

$$\Omega = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{100 \cdot n}{n} \right\}$$

$$V_\Omega = 100n + 1;$$

(2) $\Omega = \{3, 4, 5, \cdots, 10\}, V_\Omega = 8$；

(3) $\Omega = \{10, 11, 12, \cdots\}$，$\Omega$ 为无限集；

(4) 用 w_i 表示第 i 次击中，$\overline{w_i}$ 表示第 i 次击不中，则

$$\Omega=\{w_1,\overline{w_1}w_2,\overline{w_1}\ \overline{w_2}w_3,\cdots,\overline{w_1}\ \overline{w_2}\cdots\overline{w_{n-1}}w_n,\cdots\}$$

Ω 为无限集；

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$

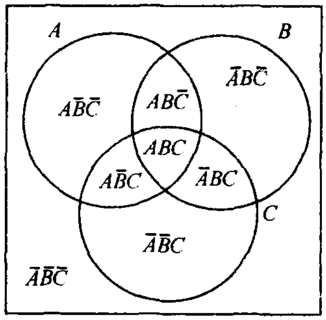
【例 2】 设 A、B、C 为三事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列事件

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) ABC 都发生；

(3) A、B、C 中不多于一个发生.

【分析】 弄清事件之间的关系，根据事件运算的定义按要求写出相应的表达式，注意第三问中“不多于一个”的理解.



解　如图易知

(1) 事件可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$；

(2) 事件可表示为 ABC；

(3) 本题有几种不同的表示法.

方法一：该事件可表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

方法二：可表示为 $\bar{A}\bar{B}\cup\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}$

方法三：可表示为 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$

注　方法三在实际应用中较为简便，因此常用此方法.

【例 3】 设方程 $x^2+bx+c=0$ 中的 b, c 分别是连掷两次一枚骰子先后出现的点数，求此方程有实根的概率和有重根的概率.

【分析】 b, c 的取值属于古典概型的计算，考虑到题意，当 $b^2-4c\geqslant 0$ 和 $b^2-4c=0$ 时，方程分别有实根和有重根. 因此本题中先考虑 b, c 之间的关系.

解　设 $A=$“$x^2+bx+c=0$ 有实根”，$B=$“$x^2+bx+c=0$ 有重根”

对于事件 A，有 $b^2-4c\geqslant 0$，即 $c\leqslant\dfrac{b^2}{4}$

对于事件 B，有 $b^2-4c=0$，即 $c=\dfrac{b^2}{4}$

b 的可能取值为 $1\sim 6$，而 c 在上述两类限制下的取值见下表

b	1	2	3	4	5	6
$c\leqslant\dfrac{b^2}{4}$		1	$1\sim 2$	$1\sim 4$	$1\sim 6$	$1\sim 6$
$c=\dfrac{b^2}{4}$		1		4		

由此可见，A 中所含的样本点有 19 个，B 中所含的样本点有 2 个.

而连续掷 2 次骰子，样本空间中样本点个数为 $C_6^1C_6^1=36$

因此计算得到

$$P(A)=\frac{19}{36}$$

$$P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

【例 4】 某种产品的商标为“MAXAM”，其中有 2 个字母已经脱落，

(1) 求脱落字母为“AA”和“MA”的概率；

(2) 求捡起后随意放回仍为“MAXAM”的概率.

【分析】 首先应讨论脱落的字母为哪两个，再按照脱落字母概率相等进行计算. 这是一古典概型问

题，正确求解本题的两小问需要理解字母的排列和组合之间的区别.

解　(1) 字母“MAXAM”中两个字母脱落的样本空间中样本点共有 $C_5^2=\frac{5\times4}{2}=10$ 个，分别为 $\{MA,MX,MA,MM,AX,AA,AM,XA,XM,AM\}$

故脱落字母为“AA”的概率为$\frac{1}{10}$

脱落字母为“MA”的概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(2) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 分别表示字母

$$MA,MX,MA,MM,AX,AA,AM,XA,XM,AM$$

脱落事件，则

$$P(A_i)=\frac{1}{10}(i=1,2,\cdots,10)$$

设 $B=\{$放回后仍为“$MAXAM$”$\}$，

则

$$P(B\mid A_i)=\frac{1}{2},i=1,2,3,5,7,8,9,10$$

$$P(B\mid A_4)=P(B\mid A_6)=1$$

$$P(B)=\frac{8\times\frac{1}{2}+2\times1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

注　本题注意排列与组合之间的区别，第一小问是字母之间的组合问题. 第二小问要求放回后仍为原来的商标，因此属于排列问题.

【例 5】 假定男性，女性出生率相同，在有三个孩子的家庭中，已知有一男孩，求三个孩子都是男孩的概率.

【分析】 这是条件概率问题，通常有两种计算方法：

(1) 公式法：由公式

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

来计算；

(2) 压缩样本空间法：例如求 $P(A\mid B)$ 时，由于事件 B 已发生，因此可将样本空间中不属于 B 的点排除掉，将样本空间压缩为 $S'=B$，然后在 S' 中计算 A 事件的概率即可. 这样就将条件概率问题转化为无条件概率问题进行计算.

解　方法一：公式法

设事件 $A=$“三个孩子中有一个是男孩”

事件 $B=$“三个孩子都是男孩”

由于样本空间中共有 $2^3=8$ 个样本点，故

$$P(A)=\frac{7}{8},P(AB)=\frac{1}{8}$$

利用条件概率公式，可得

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{7}$$

方法二：压缩样本空间法

由题意，三个孩子中有一个男孩，即原样本空间中“三个孩子都是女孩”这一基本事件可以除去.

因此样本空间中样本点个数由原来的 8 个减为 7 个，而“三个都是男孩”只是其中之一，故所求概率

为 $P=\frac{1}{7}$

【例6】 袋中装有 $2n-1$ 个黑球,$2n$ 个白球,一次取出 n 个球,发现都是同一种颜色的,求这种颜色都是白色的概率.

【分析】 同上题一样,可以按照两种方法求解条件概率问题.

解 方法一:公式法

记 $A=\{$取出 n 个球是同色球$\}$ $B=\{$取出 n 个球都是白球$\}$

按照古典概型计算得到

$$P(A)=\frac{C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n}}{C_{4n-1}^{n}}$$

$$P(AB)=P(B)=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{4n-1}^{n}}$$

因此,由条件概率公式可得

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\dfrac{C_{2n}^{n}}{C_{4n-1}^{n}}}{\dfrac{(C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n})}{C_{4n-1}^{n}}}=\frac{2}{3}$$

方法二:压缩样本空间法

由于袋中 $4n-1$ 个球中任取 n 个球共有 C_{4n-1}^{n} 种取法,但是在"取出 n 个球为同色球"条件下,缩减的样本空间仅含 $C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n}$ 个样本点,因此

$$P(B\mid A)=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n}^{n}+C_{2n-1}^{n}}=\frac{2}{3}$$

注 由例5,例6可见,方法二实际上是对方法一的简化,如例5中分子分母同时消去8,例6中,分子分母同时消去 C_{4n-1}^{n} 即为方法一.

【例7】 设有来自三个地区的各10名,15名,25名考生的报名表,其中女生的报名表分别为3份、7份和5份,随机地抽取一个地区的报名表,从中先后抽出2份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率.

【分析】 本题中关键在于理解条件概率公式和全概率公式.

解 设 $B_i=\{$报名表是第 i 个地区的考生的$\}$,$i=1,2,3$

$A_j=\{$第 j 次抽到的是女生表$\}$,$j=1,2$

由题设,有

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(A_1\mid B_1)=\frac{3}{10},P(A_1\mid B_2)=\frac{7}{15},P(A_1\mid B_3)=\frac{5}{25}$$

(1) 先抽到的是女生表的概率为

$$P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\mid B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2) 根据题意,所求概率为

$$P(A_1\mid\overline{A}_2)=\frac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)}$$

由全概率公式,有

$$P(A_1\overline{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\overline{A}_2\mid B_i)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}\right)$$

$$= \frac{2}{9}$$

且

$$P(\overline{A}_2) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(\overline{A}_2 \mid B_i)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right) = \frac{61}{90}$$

于是

$$P(A_1 \mid \overline{A}_2) = \frac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(\overline{A}_2)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}} = \frac{20}{61}$$

【例 8】设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别是 1% 和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该产品属于 A 生产的概率是多少？

【分析】本题是由结果(发现次品)分析原因(何厂生产)时的概率计算.因此可利用贝叶斯公式(又称逆概率公式).

使用贝叶斯公式时，注意对样本空间进行划分，使得划分后的事件组成为完备事件组(即满足互不相容性与完备性.)

解　设 A = {任取一件产品是由 A 厂生产的}

B = {任取一件产品是由 B 厂生产的}

C = {任取一件产品是次品}

由题意有

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.4$$

$$P(C \mid A) = 0.01, P(C \mid B) = 0.02$$

由于 A、B 构成样本空间的一个划分，由贝叶斯公式有

$$P(A \mid C) = \frac{P(A)P(C \mid A)}{P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid B)}$$

$$= \frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01 + 0.4\times 0.02}$$

$$= \frac{3}{7}$$

【例 9】设 A、B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1.

证明　$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

【分析】理解 A，B 事件独立的定义及性质.

证明　由于 A 的概率不等于 0 和 1，因此题中两个概率 $P(B \mid A)$，$P(B \mid \overline{A})$ 均存在.

(1) 必要性：由于事件 A，B 独立，所以事件 $\overline{A}$ 与 B 也独立，因此

$$P(B \mid A) = P(B),$$

$$P(B \mid \overline{A}) = P(B),$$

从而

$$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$$

(2) 充分性：由 $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$，且

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

因此有

$$P(AB)(1-P(A))=P(A)(P(B)-P(AB))$$
$$P(AB)=P(A)P(B)$$

即 A、B 独立.

综合(1) 与(2),原结论成立.

【例 10】 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件 ( )

A. A_1,A_2,A_3 相互独立　　B. A_2,A_3,A_4 相互独立

C. A_1,A_2,A_3 两两独立　　D. A_2,A_3,A_4 两两独立

【分析】 由选项,注意理解"相互独立"与"两两独立"的区别.对于三个事件 A,B,C,若

$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C)$$

则称它们"两两独立";若另外还成立

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称它们"相互独立".

解 这是一古典概型问题,样本空间为{正正,正反,反正,反反},其中事件 A_1,A_2,A_3,A_4 的样本点个数分别为 2,2,2,1,因而

$$P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$
$$P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(A_4)=\frac{1}{4}$$

因为 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3 包含的样本点个数分别为 1,1,1

故

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$$

根据公式不难验证:A_1,A_2,A_3 两两独立.

又

$$P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

因此 A_1,A_2,A_3 不相互独立,因此(C) 正确,(A) 不正确.

又 $P(A_3A_4)=0$

故 B、D 均不成立.因而选(C).

课后习题全解

1. 给出下列随机试验的样本空间 S:

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分);

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数;

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品",如连续查出 2 件次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查,记录检查的结果;

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

【分析】(1) 设 n 表示该小班的人数,则该班在一次数学考试中的总成绩为:$0,1,\cdots,100n$.

(2) 若生产 10 件产品均为正品,则记录的产品总件数为 10;若生产 10 件产品中有 1 件次品,则需继续生产,且若第 11 件产品为正品,则记录的产品总件数为 11,否则继续生产.

(4) 单位圆内的任意一点(x,y)与原点的距离都小于圆的半径 1,故单位圆内任一点坐标(x,y)满