最新题型解析思路365丛书

数学

（高　三）

开　明　出　版　社

最新题型解析思路 365 丛书

高 三 数 学

唐仁 高津 李刚 任新 编

开 明 出 版 社

（京）新登字 104 号

最新题型解析思路 365 丛书
高 三 数 学
唐 仁 高 津 李 刚 任 新 编
*
开明出版社出版发行
（北京海淀区车公庄西路 19 号）
新华书店首都发行所经销
廊坊日报社印刷一厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：11.125 字数：244 千
1995 年 1 月北京新 1 版 1995 年 1 月北京第 1 次印刷
印数：00,001－10,000
ISBN7－80077－245－4/G·178 定价：7.20 元

编 者 的 话

为配合教育改革，提高教学质量，使同学们尽早地、较好地、准确地适应最新题型，灵活运用课堂所学内容，训练思维、增长知识、开阔视野、提高应考能力、争取好成绩，我们组织北京市极富教学经验的高级教师编写了这套《最新题型解析思路365丛书》，把她奉献给广大同学和老师。

丛书以教学大纲为准绳，结合各科教材内容选题，由浅入深，先易后难。其中绝大部分题目适合一般学习水平的同学阅读，旨在巩固基础知识，启发解题思路，培养分析问题和解决问题的能力。另外，还选编了部分较难的题目，供较高水平的同学提高解题技巧，开阔知识领域，加深对所学知识的理解。

丛书的特点是：一、内容新。所选试题均是各种书中出现的最新题型试题。二、容量大。丛书每册均覆盖该年级学年教科书的全部内容，特别是难点和重点，具有针对性、启发性的解题思路。三、角度广。丛书取题多方位、多角度，涉及教科书和试题的方方面面，使同学们尽快地适应题型演变。四、易掌握。每题均从课本内容实际出发，深入浅出，易学易懂，启发思路，提高兴趣，从而达到巩固、深化所学知识的目的。

丛书所选题目，按照标准化考试要求，在能力型、潜隐型、客观型上，我们期望有所体现。每题均有答案，还附有

解题思路、方法和步骤，同学们可掌握解题的钥匙，做到举一反三，一通百通。

丛书各册均与学年课本内容对照编写。毕业班所选题目除对照学年课本外，有一部分内容为解题能力考核，分两卷编辑：一卷为标准化选择题；二卷为综合试题，以帮助同学们熟悉中考、高考试卷及题型。

我们衷心地期望这套丛书，能成为同学们的良师，老师们的益友。

丛书编委会

目　　录

代　　数

函数…………………………………………………（1）
复数…………………………………………………（35）
不等式………………………………………………（55）
数列与数学归纳法…………………………………（76）
排列、组合和二项式定理…………………………（103）
三角恒等变换………………………………………（119）

立 体 几 何

空间中“平”、“直”关系的证明……………………（148）
空间中的“角”和“距离”…………………………（155）
折叠问题……………………………………………（165）
多面体和旋转体的面积和体积……………………（173）
截面问题……………………………………………（182）
球及球与多面体、旋转体的“切”与“接”………（189）
立体几何中的最大值和最小值问题………………（196）

解 析 几 何

坐标方法……………………………………………（204）

方程的思想和方法在解析几何中的应用…………………（214）
位置关系…………………………………………………（224）
曲线系方程………………………………………………（237）
轨迹方程…………………………………………………（248）
最大、最小值问题………………………………………（261）
综合练习…………………………………………………（274）

代　　数

函　　数

重点和难点

本讲重点和难点是有关函数的概念、反函数、复合函数、函数一般性质：单调性、周期性、奇偶性、幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的定义、性质和图象.

函数概念

1. 下面给出四个函数

①$f_1(x)=x$；

②$f_2(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

③$f_3(x)=\sqrt{x^2}$；

④$f_4(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)x$.

这四个函数中表示同一个函数的是　　　　（　　）

（A）$f_1(x)$和$f_2(x)$　（B）$f_2(x)$和$f_3(x)$

（C）$f_1(x)$和$f_4(x)$　（D）$f_3(x)$和$f_4(x)$

思路与解答　判断两个函数是否是同一函数就是将函数在不改变定义域的前提下化简后，比较两个函数的定义域和对应规律是否相同，如果二者均相同就是同一函数，二者缺

一不可，否则就不是同一函数。此题显然选（C）。

2. 若函数$f(10^x)=2x-3$，则$f(x)=$________。

思路与解答　求$f(x)$就是由已知条件求出作用于10^x的运算及其顺序，其方法是换元法。令$10^x=u>0$，则$x=\lg u$，由$f(10^x)=2x-3$得$f(u)=2\lg u-3$，∴$f(x)=2\lg x-3$即所求函数。

巩固练习

（1）已知$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$的解析式。

（2）求实系数一次函数$f(x)$，使$f[f[f(x)]]=8x+7$

（3）已知$f(o)=1$，$f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，求$f(x)$。

答案与提示　（1）$f(x)=x^2-2$；（2）$f(x)=2x+1$；（3）$f(x)=x^2+x+1$。

3. 动点P从边长为1的正方形$ABCD$的顶点A出发顺次经过B、C、D再回到A，设x表示P点的行程，y表示FA的长，求y关于x的函数式。

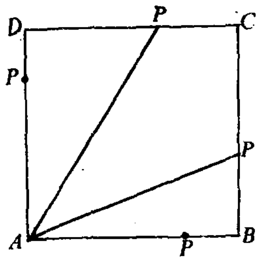


图1

思路与解答　由图1可知当P点在AB上运动时，$FA=x$；当F点在BC上运动时，由Rt△PBA求出

$$PA=\sqrt{AB^2+PB^2}$$
$$=\sqrt{1+(x-1)^2};$$

当F点在CD上运动时，由Rt△PDA求出　$PA=\sqrt{DA^2+PD^2}$
$=\sqrt{1+(3-x)^2}$；当F点在DA上运动时，$PA=4-x$。所以y关于x的表达式是:

$$y=\begin{cases} x & (0\leqslant x\leqslant 1); \\ \sqrt{x^2-2x+2} & (1<x\leqslant 2); \\ \sqrt{x^2-6x+10} & (2<x\leqslant 3), \\ 4-x & (3<x\leqslant 4). \end{cases}$$

巩固练习

（1）甲以每小时6公里的速度用2小时由A城到达B城，在B城休息1小时后再以每小时4公里的速度返回到A城，试写出甲在运动过程中到A城的距离S与运动时间t的函数关系式.

（2）扇形OAB的中心角$\angle AOB=45°$，半径为R，矩形$FQMN$内接于扇形（如图2），求矩形$FQMN$对角线长L的函数式，并求出L的最小值.

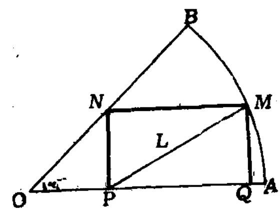


图2

答案与提示（1）

$$S(t)=\begin{cases} 6t & t\in[0,\ 2], \\ 12 & t\in(2,\ 3], \\ 12-4(t-3) & t\in(3,\ 6]. \end{cases}$$

（2）设$\angle AOM=\alpha$. $L=R\sqrt{\frac{3}{2}-\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha}$

$$L_{\min}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$$

函数的奇偶性和单调性

4. 下面给出四个函数

① $f_1(x)=\lg(x+1)+\lg(x-1)$;

② $f_2(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$;

③ $f_3(x)=\arcsin x$;

④ $f_4(x)=\lg|x+1|$.

两个函数的积是奇函数的是 ( )

(A) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ (B) $f_2(x)\cdot f_3(x)$

(C) $f_3(x)f_4(x)$ (D) 以上均不正确

思路与解答 注意到以上四个函数均不是恒为零的函数，所以欲使其积是奇函数需且需两个函数分别为一奇一偶。注意到$f_1(x)$定义域为$x>1$，所以非奇非偶；$f_4(x)$图象既不关于y轴对称，也不关于原点对称；所以$f_4(x)$也是非奇非偶；而$f_2(x)$，$f_3(x)$分别为奇函数。所以其积非奇函数。故应选（D）.

巩固练习

（1）判断下列函数的奇偶性

①$f(x)=\sin x\cos x$;

②$y=|x+3|-|x-3|$;

③$f(x)=\sqrt{x}$;

④$y=\lg(1+x)+\lg(1-x)$;

⑤$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

⑥$y=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$.

答案与提示 ①奇 ②奇 ③非奇非偶 ④偶 ⑤奇 ⑥奇。

5. 若偶函数$y=f(x)$在区间$(-\infty,0]$上为递增函数，且$f(0)=0$，试判断$y=|f(x)|$在区间$[0,+\infty)$上的单调性，并证明你的结论.

思路 由一个特例的图象$y=-x^2$可知$y=|f(x)|$在$[0,+\infty)$为递增函数。欲证明其结论，可根据单调函数的定义加以证明.

证明 任取$x_1<x_2\in[0,+\infty)$

则 $-x_2 < -x_1 \leqslant 0$，又 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上为递增函数，

$\therefore f(-x_2) < f(-x_1) \leqslant f(0)$，

又 $f(x)$ 为偶函数，

$\therefore f(-x_2) = f(x_2)$，$f(-x_1) = f(x_1)$，$f(0) = 0$

$\therefore f(x_2) < f(x_1) \leqslant 0$，

$\therefore |f(x_2)| > |f(x_1)|$

$\therefore y = |f(x)|$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上为递增函数。

6. 奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 内单调递减，又 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$，求 a 的取值范围。

思路与解答 欲求 a 的取值范围，只需列出关于 a 的不等式（组）。由 $f(x)$ 的定义域 $(-1, 1)$ 可知 $-1 < 1-a < 1$ 且 $-1 < 1-a^2 < 1$；由函数的奇偶性、单调性及 $f(1-a) < -f(1-a^2)$ 可得 $1-a > a^2-1$。

$$\therefore \begin{cases} -1 < 1-a^2 < 1, \\ -1 < 1-a < 1, \\ a^2-1 < 1-a, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < a < 2, \\ 0 < a < \sqrt{2} \text{ 或 } -\sqrt{2} < a < 0, \\ -2 < a < 1, \end{cases}$$

$\therefore 0 < a < 1$。即所求 a 的取值范围。

巩固练习：

（1）用定义证明 $f(x) = -\sqrt[3]{x} + 1$ 在 R 上是递减函数。

（2）已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x \leqslant 0$ 时，有 $f(x) = x^2 + 2x$，则当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) =$ ________。

答案与提示 （1）证明略；（2）$f(x) = -x^2 + 2x$

函数的周期性

7. 函数$f(x)=\sin^4x+\cos^4x$的周期是　　（　　）

（A）$\frac{\pi}{2}$　　（B）π　　（C）2π　　（D）2π

思路与解答　欲求$f(x)$的周期，一般是把$f(x)$化为易求周期的函数$f(x)=A\sin(\omega x+\phi)+b$或$f(x)=A\cos(\omega x+\phi)+b$等形式。于是有：

$$f(x)=(\cos^2x+\sin^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x.$$

$\therefore$ 周期$T=\frac{\pi}{2}$，应选（A）。

8. 试指出$f(x)=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期，并证明你的结论。

思路　由图象猜出周期$T=\frac{\pi}{2}$，欲证$\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的最小正周期必须证明两点。其一证明$\frac{\pi}{2}$是周期。其二证明$\frac{\pi}{2}$为最小正周期。

最小正周期为$T=\frac{\pi}{2}$.

证明　任取$x\in R$.

则　$f(x+\frac{\pi}{2})=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|$

$$=|\cos x|+|\sin x|=f(x).$$

$\therefore t=\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的一个周期。

设$f(x)$的最小周期为T_0，且$0<T_0<\frac{\pi}{2}$.

所以对于任意的$x\in R$永远有

$f(x+T_0)=|\sin(x+T_0)|+|\cos(x+T_0)|=|\sin x|+|\cos x|$,

于是当$x=0$时有$|\sin T_0|+|\cos T_0|=1$.

又$0<T_0<\frac{\pi}{2}$ $\therefore \sin T_0+\cos T_0=1$ ①

在单位圆中可知，当$0<T_0<\frac{\pi}{2}$时有

$\sin T_0+\cos T_0>1$ ②

①与②矛盾。所以假设不成立，故$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$.

巩固练习

（1）指出下列函数的最小正周期

① $y=\sin(ax+\frac{\pi}{6})\cos(ax-\frac{\pi}{6})$ $(a\neq 0)$；

② $y=\sin^6 x+\cos^6 x$；

③ $y=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$.

（2）证明$f(x)=\cos x$最小正周期为2π.

答案与提示 （1）①$T=\frac{2\pi}{2|a|}=\frac{\pi}{|a|}$. ②$T=\frac{\pi}{2}$. ③$T=\frac{\pi}{2}$；（2）证明略

复合函数的单调性、定义域和值域

9. 指出下列函数的单调区间

（1）$y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$；

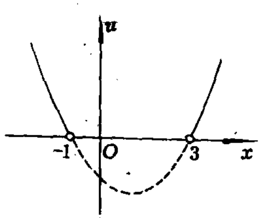
（2）$y = (x^2 + 2x - 3)^2$；

（3）$y = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$.

思路 单调区间是指定义域的一个子区间所以求函数单调性，首先应求出函数的定义域．复合函数的单调性取决于内函数和外函数的单调性．所以由内外函数的图象来确定复合函数的单调性更为简便．

解 （1）令$u = x^2 - 2x - 3$．$\therefore y = \log_2 u$

由$x^2 - 2x - 3 > 0$得函数定义域为$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$由$u = x^2 - 2x - 3$的图象（图3）可知$x \in$



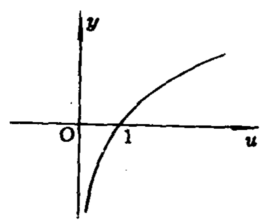


图4

$(-\infty, -1)$时u递减．且$u > 0$；由图4可知$u > 0$时，y递增．所以y的递减区间是$(-\infty, -1)$；同样可求出y的递增区间为$(3, +\infty)$．

（2）首先把原式化为等价的函数

$$y = |x^2 + 2x - 3|^2$$

注意到$u = |x^2 + 2x - 3| \geqslant 0$、而$y = u^2$在$[0, +\infty)$上为增函数．所以$y = |x^2 + 2x - 3|^2$的单调性取决于$u = |x^2 + 2x - 3|$的单调性．由$u = |x^2 + 2x - 3|$图5

可知所求函数的单调递增区间是 $[-3, -1]\cup[1, +\infty)$；递减区间是 $(-\infty, -3]\cup[-1, 1]$.

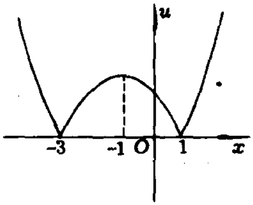


图5

（3） 令 $u=\sin x\geqslant 0$，则 $y=\sqrt{u}$. 分别由图象6和7可知当

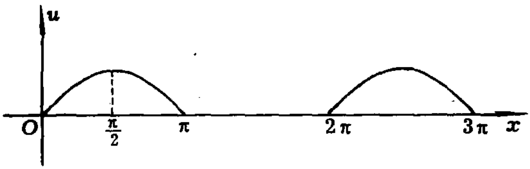


图6

$x\in[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$时，$u$递增，且$u\geqslant 0$；而$y=\sqrt{u}$在$[0, +\infty)$上递增，所以$y=(\sin x)^{\frac{1}{2}}$的递增区间是$[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$. 同样可求递减区间是$[2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi](k\in Z)$.

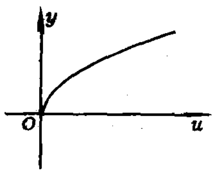


图 7

巩固练习

求出下列函数的单调区间.

（1） $y=\log_{\frac{1}{2}}\cos x$；　　（2） $y=\arcsin(x^2-2x)$；

（3） $y=\sqrt{|\log_2 x|}$　　（4） $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$

答案与提示 （1） 递减区间是$(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi]$；递增区间是$[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}), (k\in Z)$； （2） 递增区间是$[1, 1+$

$\sqrt{2}$]，递减区间是[$1-\sqrt{2}$，1]；（3）递增区间是[1，$+\infty$)，递减区间是(0，1]。（4）递减区间是(0，1]，递增区间是[1，2)。

10. 求函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)+1}$的定义域。

思路与解答 这是一个复合函数，复合函数的定义域就是内函数的值域与外函数的定义域的交集所对应的x值的集合。所以复合函数定义域的求法是由内函数的值满足外函数定义域的要求列出不等式解之即可。

由$\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)+1\geqslant 0$，

得$0<3x-5\leqslant 2$，

$\therefore \frac{5}{3}<x\leqslant\frac{7}{3}$，即所求复合函数的定义域。

巩固练习

求出下列函数的定义域：

（1）$y=\lg\sin x$；（2）$y=\arccos(x^2-1)$；

答案与提示 （1）$2k\pi<x<2k\pi+\pi$；$(k\in Z)$；（2）$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$。

11. 求下列函数的值域

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$；

（2）$y=\arcsin(x^2+x-\frac{1}{2})$。

思路 这是一个复合函数，$y=\dfrac{x+1}{x+3}=1-\dfrac{2}{x+3}$（且$x\neq 1$），其值域的求法就是由定义域出发按照复合过程顺次求出各层函数的值域。

解（1）原函数化为