命题专家亲解历年真题

2012 人大考研

2012年 历年考研数学真题名家解析与指导

主编／李恒沛　高文森

以知识点为纲，重视基本概念、基本方法和基本理论

全书按照考试大纲规定内容编写，每章分为内容导读和考题选析两部分：内容导读概述内容，引领复习，帮助考生系统掌握，考题选析精选历年试题，一题多解，开拓思路，并指出典型错误。

中国人民大学出版社

2012年历年考研数学真题名家解析与指导

主　编　李恒沛　高文森
副主编　徐　兵　郝志峰　陆淑珍

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2012年历年考研数学真题名家解析与指导/李恒沛，高文森主编．—北京：中国人民大学出版社，2011.3
ISBN 978-7-300-13323-2

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②高… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第023469号

2012年历年考研数学真题名家解析与指导

主编　李恒沛　高文森

2012 Nian Linian Kaoyan Shuxue Zhenti Mingjia Jiexi yu Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn（中国1考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	山东省高唐印刷有限责任公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　　次**	2011年4月第1版
印　　张	23.5	**印　　次**	2011年4月第1次印刷
字　　数	682 000	**定　　价**	43.00元

前 言

从 1987 年开始，全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试，至今二十余年．对于数学考试而言，具有相对的稳定性．为了更好地帮助考生备考，我们从历年考题中精选出一部分，从中归纳出考试内容的重点、难点及经常考的题型，以便了解试题的特点，把握命题的方向．全国硕士研究生入学数学统考试题是参加命题的专家、教授的智慧和劳动的结晶，是一份十分宝贵的资料，本书就是在此基础上，结合多年命题、授课及辅导体会精心编写而成的，相信对广大考生从容应考，十分有益．

从已往的数学试题来看，主要着重于对基本概念、基本方法和基本理论的测试．无论考试的形式如何，题目的类型怎样，考生只要掌握了以上“三基”，就能运用自如，在考试中考出好的成绩．全书正文按照《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》规定的内容，主要包括高等数学、线性代数和概率统计等三章，各章由两部分组成，一为内容导学，概括这一章全部内容，并举例说明，引领考生复习，达到系统掌握的目的；二为考题选析，从历年的试卷中挑选出一定数量的考题，逐题进行分析、解答（或证明）与注释，力求简明扼要，一题多解，开拓思路，使考生做到举一反三，触类旁通．同时指出考生在解题过程中出现的典型错误，提醒考生注意并引以为戒．为了提高广大考生的复习效率，建议考生开始阅读本书之前，先参阅《数学考试大纲》，明确考试内容及要求，接下来要仔细阅读有关教材和参考书（推荐考生阅读由中国人民大学出版社出版、李恒沛、侯书会、高文森等主编的《考研数学新编考试参考书》），这些做完之后，再认真阅读本书，最后为了考量复习效果，建议用该出版社出版的《考研数学模拟冲刺试卷》来检验，考生不妨亲自动手做一做，孰对孰错，再与书中答案对照一下，这样就会达到更好的应试效果．

本书习题按填空题、选择题和解答题（含证明题）题型分类．每道题前用数码表明试题使用的年份及卷种．例如，某题号后括号内的数码为（96，1），表明该题为 1996 年数学一试卷中的一道题，数码（00，2）表明该题为 2000 年数学二试卷中的一道题，余下类推．在长期的教学、辅导及阅卷过程中，发现不少考生对选择题、填空题及证明题采取“蒙”的办法，十分没有把握，原因是对基本概念理解有误，基本定理、公式记的不牢，因而失分较多．为了帮助考生提高判断及推理能力，本书已将如何正确处理上述三类题的方法和技巧，作一简要阐述、归纳，辟为单独一章，以备考生复习参考．

本书的编者都是长期在高等院校中从事教学、科研的教授，大多数是教育部考试中心原数学命题组成员，多年参加考研命题、辅导，他们都具备丰富的命题、辅导经验．

本书在编写、编辑和出版过程中，得到中国人民大学出版社有关编辑的大力支持，在此一并表示谢意．鉴于时间仓促，编写水平有限，书中如有不妥之处，敬请广大考生和教师指正．预祝考生一帆风顺，考研成功！

编 者

2011.3

目 录

第零章

选择题、填空题与证明题

历年考研数学试题都设有选择题、填空题与证明题，这三类题在试卷结构中占有相当重要的位置，特别是选择题和填空题的分值是相对固定的，大体上占总分的五分之二. 从阅卷的情况来看，这部分的得分率较低，加上证明题的失分，因而卷面总分不易上去. 究其原因不外乎两方面，一方面是考生对基本概念和基本理论把握得不牢，运算的失误率较高；另一方面是考生处理这三类题的方法比较欠缺. 对待选择题，采取“蒙”的方式；对待填空题，粗枝大叶，计算不仔细；至于证明题，思路不明，难以下手. 诚然，上述几种情形，只是出现在部分考生部分试卷上，但不可忽视. 本章旨在通过一些典型例题，提出一些应对方法，以期提高考生求解（证）这类考题的效率和能力.

一、关于选择题

选择题主要考查基本概念和基本理论. 方法得当，可以做到事半功倍，快捷有效，提高答对率. 考研数学试卷的选择题是单项选择题，即四个选项中有唯一的一个选项是正确的. 下面介绍几种常用的解题方法.

1. 观察法

观察法就是应用基本概念或理论，直接选出正确的答案.

例 1 考虑二元函数的下面 4 条性质：

① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续；

② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续；

③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微；

④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

A. ②⇒③⇒① B. ③⇒②⇒① C. ③⇒④⇒① D. ③⇒①⇒④

分析 由基本定理知选项 A 正确.

（这是 2002 年数学一试卷中的一道试题.）

解 应选 A.

例 2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

A. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

分析 因

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

解 应选 A.

（这是 2007 年数学一试卷中的一道试题.）

例 3 设 A，B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$ B. $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$ D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

分析 因当 $0<P(A)<1$ 时，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充要条件.

解 应选 C.

（这是 1998 年数学一试卷中的一道试题.）

2. 演绎法

由已掌握的概念或定理，经过简单推导就可得到正确答案.

例 4 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

A. α，β，γ B. α，γ，β C. β，α，γ D. β，γ，α

分析 将 α，β，γ 与 x^k 比较：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}}\xlongequal{\text{取 } k=1}1,$$

即 α 是 x 的 1 阶无穷小；

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{k}\cdot\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{x^{k-3}}\xlongequal{\text{取 } k=3}\frac{2}{3},$$

即 β 是 x 的 3 阶无穷小；

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2k}\cdot\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{x^{k-2}}\xlongequal{\text{取 } k=2}\frac{1}{4},$$

即 γ 是 x 的 2 阶无穷小.

解 应选 B.

（这是 2004 年数学一试卷中的一道试题.）

例 5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆 B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆 D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

分析 因 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，

$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$，

故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 皆可逆.

解 应选 C.

（这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.）

例 6 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

A. 8 B. 16 C. 28 D. 44

分析 一般地，若随机变量 X 和 Y 相互独立，则数学期望

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y).$$

方差 $$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y).$$

对于本题 $a=3$，$b=-2$，$D(X)=4$，$D(Y)=2$.

故 $\quad D(3X-2Y)=44$.

解 应选 D.

（这是 1997 年数学一试卷中的一道试题.）

3. 排除法

排除法就是否定四个选项中的三个，余下的一个必为正确的选项. 使用这种方法时，举反例是快捷有效的.

例 7 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

分析 B. 的反例：令 $f(x)=x^2$，取 $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$；

C. 的反例：令 $f(x)=\cos x+1$，取 $F(x)=\sin x+x$；

D. 的反例：令 $f(x)=x$，取 $F(x)=\frac{x^2}{2}$.

解 应选 A.

（这是 1999 年数学一～四试卷中的一道试题.）

例 8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则

A. 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

B. 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

C. 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$

D. 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$

分析 A. 的反例：令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=[3,\ 4]$，

则有 $\quad |\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}3 & 4\\6 & 8\end{vmatrix}=0$；

C. 的反例：令 $\boldsymbol{A}=[1\quad 2]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，

则有 $\quad |\boldsymbol{AB}|=0$；

D. 的反例：令 $\boldsymbol{A}=[1\quad 2]$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

则有 $\quad |\boldsymbol{AB}|=3\neq 0$.

故选项 B 正确.

事实上，因 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶矩阵，$|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})<m$. 由

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant \min(m,\ n),$$

知当 $m>n$ 时，必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant n<m$.

解 应选 B.

（这是 1999 年数学一试卷中的一道试题.）

例 9 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则

A. $X+Y$ 服从正态分布 $\qquad$ B. X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

C. X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布　　　　D. X^2/Y^2 服从 F 分布

分析　当随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且二者相互独立时，A、B、C、D 四选项均成立. 当未给出 X、Y 相互独立这一条件，A、B、D 均不一定成立.

解　应选 C.

（这是 2002 年数学三试卷中的一道试题.）

二、关于填空题

从历年考研试题来看，填空题基本上是计算题（计算量不大），用来考查考生基本概念与基本运算的能力. 因为只看答案，没有过程，所以不允许出一点错，否则不得分.

1. 推算法

直接利用概念、公式计算.

例 1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

分析　利用 L'Hospital 法则，求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}\cdot\sin x}{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}e^{\cos x}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{3}{2}e.$$

解　应填 $\dfrac{3}{2}e$.

（这是 2009 年数学三试卷中的一道试题.）

例 2　曲线

$$\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^{1-t}e^{-u^2}\,du,\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$$

在点 (0，0) 处的切线方程为________.

分析　曲线上点 (0，0) 对应 $t=1$，切线的斜率

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t\ln(2-t^2)-\dfrac{t^2\cdot 2t}{2-t^2}}{-e^{-(1-t)^2}}\right|_{t=1}=2$$

于是所求切线方程为 $y=2x$.

解　应填 $y=2x$.

（这是 2009 年数学二试卷中的一道试题.）

例 3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

分析　由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

于是由定义知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 和 0. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为 1.

解　应填 1.

（这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.）

例 4　设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$________.

分析 由题设，知 $E(X)=D(X)=\lambda=1$. 又 $E(X^2)=D(X^2)+(E(X))^2=2$，从而有

$$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\frac{e^{-1}}{2}=\frac{1}{2e}.$$

解 应填$\frac{1}{2e}$.

（这是 2008 年数学一试卷中的一道试题.）

2. 图示法

由题意画出图形，从几何图形直观寻求答案.

例 5 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

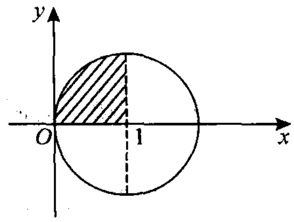

图 0—2—1

分析 令 $y=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$，显见这是圆心在点 (1，0)、半径为 1 的圆的方程，该圆的面积 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$，由定积分的几何意义，如图 0—2—1，知

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{S}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

解 应填$\frac{\pi}{4}$.

本题采用配方、置换的方法也可做，但计算量偏大.

（本题是 2000 年数学一试卷中的一道试题.）

例 6 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$，$x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$ ________.

分析 先画草图，如图 0—2—2 所示.

$$S=\int_1^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x-2x\right)\Big|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

解 应填 $\ln 2-\frac{1}{2}$.

（这是 1996 年数学二试卷中的一道试题.）

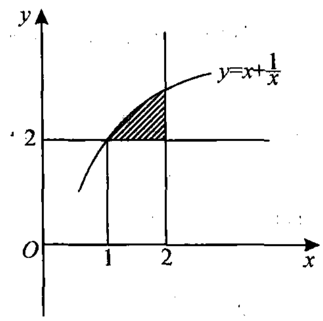

图 0—2—2

3. 对称法

利用函数的奇偶性、区域对称性，使计算简化.

例 7 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ________.

分析 注意到被积函数的奇偶性及积分区间的对称性，知

$$\begin{aligned}原式&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x\\&=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

解 应填$\frac{\pi}{8}$.

（这是 2001 年数学二试卷中的一道试题.）

例 8 设曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$ ________.

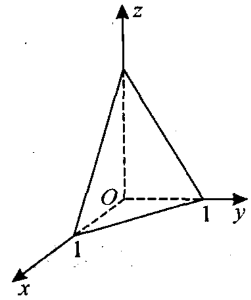

图 0—2—3

分析 如图 0—2—3，因Σ关于 yz 平面对称，x 关于 x 为奇函数，故有 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$.

由变量的轮换对称性，知

$$\iint_{\Sigma} |y| \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} |x| \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} |z| \mathrm{d}S,$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} |y| \mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} 1 \cdot \mathrm{d}S = \frac{1}{3}\text{（曲面}\sum\text{的面积）}$$

用σ表示Σ在第一卦限部分的面积，$\sigma=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而

$$\text{原式}=\frac{1}{3}(8\sigma)=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

解 应填$\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

（这是2007年数学一试卷中的一道试题.）

例9 设L为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$，则$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

分析 因L关于x轴（y轴）对称，$2xy$关于y（关于x）为奇函数，故$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s=0$.

又 $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow 3x^2+4y^2=12,$$

于是 $$\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12a.$$

解 应填$12a$.

（这是1998年数学一试卷中的一道试题.）

例10 设区域D为$x^2+y^2\leqslant R^2$，则$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

分析 因积分域D：$x^2+y^2\leqslant R^2$，关于x轴、y轴对称，由x和y的轮换对称性，有

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\text{原式}=\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

或直接利用极坐标计算也较方便.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

解　应填$\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

（这是 1994 年数学一、二试卷中的一道试题.）

三、关于证明题

证明题就是依据已有的概念、定理、公式，用逻辑推理的方法证明给定的命题结论. 一般比较抽象，考生感到困难，难以下手. 下面针对考题，给出常见的一些方法.

1. 数学归纳法

设 P 是与正整数 n 有关的数学命题.

1° 当 $n=1$，命题 P 成立；

2° 设 $n=k$，命题 P 成立，能推出 $n=k+1$ 命题也成立，则命题 P 对一切正整数 n 成立.

例 1　设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1, 2, \cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

分析　利用归纳法.

证　由 $x_1=10$，$x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$，则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 为单减数列. 又显见 $x_n>0(n=1, 2, \cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有下界，故根据极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}$成立，于是得 $a^2-a-6=0\Rightarrow a=3(a=-2$ 舍去)，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

（这是 1996 年数学一、二试卷中的一道试题.）

2. 辅助函数法

由欲证命题的结论，适当地构造一个辅助函数，利用已知的定理、公式，问题就解决了.

例 2　设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

分析　构造辅助函数，利用函数单调性或利用 Lagrange 中值定理.

证法 1　令 $\varphi(x)=f(x+x_2)-f(x)$，则

$$\varphi'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=x_2f''(x+\theta x_2)<0,\ 0<\theta<1,$$

从而 $\varphi(x)$ 单减，又 $x_1>0$，有 $\varphi(x_1)<\varphi(0)$，即 $f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0)$，亦即

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2).$$

证法 2　不妨设 $x_1\leqslant x_2$ ($x_2\leqslant x_1$ 类似可证)，则由 Lagrange 中值定理得

$$f(x_1)-f(0)=x_1f'(\xi_1),\ 0<\xi_1<x_1,$$
$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=x_1f'(\xi_2),\ x_2<\xi_2<x_1+x_2,$$

由题设 $f''(x)<0$，又 $\xi_1<\xi_2$，知 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，

即有　$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)$，

故得　$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

（这是 1992 年数学一～三试卷中的一道试题.）

3. 反证法

若命题结论不成立，则由此导出矛盾，即与已知命题假设相抵触. 说明“命题结论不成立”的假设不对，从而肯定命题是成立的.

例 3　设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a, b)$ 和 $\eta\in(a, b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

分析 先用反证法证明存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$. 再证存在$\eta\in(a,b)$，使$f''(\eta)=0$.

证 若不存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=0$，则在(a,b)内恒有$f(x)>0$或$f(x)<0$，不妨设$f(x)>0$($f(x)<0$，类似可证)，则

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0,$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

从而$f'(a)f'(b)\leqslant 0$，此与题设矛盾. 故在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=0$.

由$f(a)=f(b)=f(\xi)$及Rolle定理，知存在$\eta_1\in(a,\xi)$，$\eta_2\in(\xi,b)$，使$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$，再由Rolle定理知存在$\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使$f''(\eta)=0$.

(这是1996年数学三试卷中的一道试题.)

例4 设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{I}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{\xi}$是$n$维非零列向量，$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{\xi}$的转置. 证明

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$的充要条件是$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$；

(2) 当$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$时，$\boldsymbol{A}$是不可逆矩阵.

分析 由题设导出(1)；用反证法证明(2).

证 (1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{I}-(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$即$\boldsymbol{I}-(2-\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$，亦即

$$(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1)\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},$$

因为$\boldsymbol{\xi}$是非零列向量，$\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，

故$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$的充要条件是$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-1=0$，即$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$.

(2) 用反证法. 当$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$时$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，若$\boldsymbol{A}$可逆，则有$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，从而$\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，这与$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{I}$矛盾，故$\boldsymbol{A}$是不可逆矩阵.

(这是1996年数学一、二试卷中的一道试题.)

4. 综合法

利用已知定义、定理及不等式证明一些命题，上述三种方法往往不是单独使用的，而是相互关联、综合使用的.

例5 设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1$，$\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

分析 $f(x)$有两个零点，相当于其原函数$F(x)$有三个零点，往下证明，综合利用反证法及微分中值定理(或定积分中值定理)证得.

证法1 令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，

则有$F(0)=0$，$F(\pi)=0$. 又因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以存在$\xi\in(0,\pi)$，使$F(\xi)\sin\xi=0$. 因若不然，则在$(0,\pi)$内或$F(x)\sin x$恒为正或$F(x)\sin x$恒为负，均与$\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=0$矛盾. 但当$\xi\in(0,\pi)$时，$\sin\xi\neq 0$，故$f(\xi)=0$.

由上证得 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0\quad(0<\xi<\pi)$.

再对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别用罗尔定理，知至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

即 $$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

证法 2 由 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=0$. 因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 恒为正，或 $f(x)$ 恒为负，均与 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

若在$(0,\pi)$内 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\xi_1$，则由 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 推知，$f(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内异号，不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$. 于是再由 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$ 与 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 及 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调性知：

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

得出矛盾.

从而推知，在 $(0,\pi)$ 内除 ξ_1 外，$f(x)=0$ 至少还有另一实根 ξ_2，故知存在 ξ_1，$\xi_2\in(0,\pi)$，$\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

注：证法 1 中的 ξ 和证法 2 中的 ξ_1 也可用积分中值定理得到.

（这是 2000 年数学一～四试卷中的一道试题.）

例 6 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

分析 由设证 (1)；利用 (1) 及夹逼定理得 (2).

解 (1) 因为 $|\cos x|\geqslant0$，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数，在每个周期上积分值相等，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=n\int_0^\pi|\cos x|\mathrm{d}x=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2(n+1).$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$2n\leqslant S(x)<2(n+1).$$

(2) 由 (1) 知，当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x\to+\infty$，由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

（这是 2000 年数学二试卷中的一道试题.）

第一章

高等数学

一、内容导读

高等数学是研究生入学数学考试最重要的内容.《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(简称《数学考试大纲》)规定，无论是数学试卷一、试卷二（工学类)，还是数学试卷三（经济学类、管理学类)，都要求考高等数学，其在数学试卷一中约占 56%，数学试卷二中约占 78%，数学试卷三中约占 56%. 因此，如何复习高等数学，考生非常关注. 为了帮助考生有效地进行复习，下面按照考试大纲规定的考试内容的顺序一一阐述.

(一) 函数、极限、连续

函数是高等数学的研究对象，极限是研究的方法，而且贯穿于微积分的始终. 连续是用极限研究函数的一种性态，可以说是由极限派生而来的. 连续函数是重要的一类函数. 本单元考查重点，是函数（含表示方法)、极限（含左极限与右极限)、连续（含左连续与右连续）的概念及性质，函数间断点类型的判断，函数的表示（用变量替换转换其表达形式)，求极限的若干方法，运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题. 本单元试题类型包括：① 函数记号的转换；② 分段函数的运算；③ 简单反函数的定义域及其表示；④ 考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件；⑤ 判断函数间断点及其类型；⑥ 无穷小的比较；⑦ 判断函数的性质（有界性，单调性，奇偶性，周期性)；⑧ 利用闭区间上连续函数性质证明一类题；⑨ 求极限（包括用极限的定义，等价无穷小，极限的运算法则，极限存在准则，两个重要极限，函数的连续性，L'Hospital 法则，导数定义，定积分定义以及级数收敛的必要条件等方法).

下面仅就几种重点题型，举例加以说明.

例 1 试证函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的，但当 $x\to0$ 时不成为无穷大.

分析 在点 $x=0$ 的某邻域内，函数无界与当 $x\to0$，$f(x)\to\infty$ 是两个容易混淆的概念，函数无界未必就是无穷大（无穷大显见是无界的).

证 对于无论多大的正数 G，总有充分接近于 $x=0$ 的点，使得 $|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>G$. 例如，若取 $x=\frac{1}{n\pi}$，则 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|=n\pi$. 所以，若 $n\pi>G$，即 $n>\frac{G}{\pi}$，则存在点 $x=\frac{1}{n\pi}$，有 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>G$，即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的.

又如，若取 $x=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，则当 $n\to\infty$ 时 $x\to0$，但此时 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\to0$，因此函数 $f(x)$ 并不趋于无

穷大.

例2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，试证在 $[0, a]$ 上至少存在一点 x，使 $f(x)=f(x+a)$.

分析 引入辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，欲证存在一点 $x\in[0, a]$，使 $f(x)=f(x+a)$，即要证 $F(x)=0$，而要达到这一点，只需对函数 $F(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上引用零点存在定理.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，由题设，易知 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续. 又

$$F(0)=f(0)-f(a),$$
$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0).$$

若 $f(0)-f(a)=0$，则 $f(0)=f(a)=f(2a)$，即当 $x=0$，a 时，有 $f(x)=f(x+a)$；

若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(0)\cdot F(a)<0$，由零点存在定理，知必有一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

例3 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

分析 由题设，知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=0 \quad \text{（否则上述极限不存在）}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0) \quad (f(x)\text{连续})$$

从而 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

下面求 $f''(0)$，或用 L'Hospital 法则，或用 Taylor 展式，最后利用重要极限求出欲求之极限.

解法 1 由题设，有 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3,$$

从而有 $f(0)=0$，$f'(0)=0$ （连续性，导数定义），

因当 $x\to 0$，有 $$\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]\sim x+\frac{f(x)}{x},$$

故知 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3,$$

即有 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=2\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4,$$

即 $$f''(0)=4,$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$$

解法 2 由题设，有 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=3, \qquad ①$$

推知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，而由 Taylor 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

可得$\frac{f(x)}{x}=\frac{f''(0)}{2}x+o(x)$，代入①，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f''(0)}{2}+o(1)\right)=3\Rightarrow f''(0)=4.$$

故 $$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}[1+2x+o(x)]^{\frac{1}{2x+o(x)}\cdot\frac{2x+o(x)}{x}}=\mathrm{e}^2.$$

注：① 例 1 说明函数无界与无穷大是两个不同的概念，不能混为一谈．无穷大必无界，而无界却未必无穷大．函数无界相对函数有界而言，从函数有界的定义可以立即得出函数无界的定义．函数有界的定义：$\exists M>0$，$\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$；于是有函数无界的定义：$\forall G>0$，$\exists x_0\in I$，有 $|f(x_0)|>G$.（其中 I 表示某区间）．从某种意义上来说，函数"有界"与"无界"可以认为是一对孪生的概念，这样就容易理解，也便于记忆．

② 例 2 是一道证明题，用的是常规方法，但却是很重要的方法，那就是"辅助函数"法．引入什么样的函数，至关重要，通常是从结论出发，由已知条件，寻找理论根据（定理、公式），这样作出的辅助函数即可达到证明的目的．

③ 例 3 是一道关于极限的综合题，在解题过程中，涉及极限概念，等价无穷小，连续性，L'Hospital 法则，导数定义，Taylor 公式，重要极限等，知识点较多，但只要充分理解题设条件，把据住极限存在性这一主体思路，还是容易入手的．事实上，由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3$ 立知 $f(0)=0$（因 $f(x)$连续，若 $f(0)\neq0$，则上述极限不存在）进而由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知 $f'(0)=0$．注意到，在涉及与二阶导数或二阶以上导数有关的命题时，应用 Taylor 公式往往是有效的，本题在求 $f''(0)$ 时，用了 Taylor 公式比较方便．解法 2 比解法 1 更直接一些．

（二）一元函数微分学

本单元考查重点是导数（微分）的概念，导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程与法线方程，可导（可微）与连续；微分运算（按定义求导数，各种函数形式的导数，分段函数求导数，高阶导数等）；微分中值定理（含 Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理以及 Taylor 定理）并用之于证明某些函数不等式，函数方程及其相关命题；导数应用（函数单调性、极值判别法，函数图形凹凸性、拐点判别法，求曲率）并用之于绘图（会求渐近线）；会用 L'Hospital 法则求极限．本单元的试题类型包括：① 求已知函数（包括显式、隐式、参数式以及变上限积分所确定的函数等）的导数（微分，高阶导数）；② 判定函数在一点的可导性（包含连续性、极限存在性）；③ 利用导数确定函数性态（单调性，极值，凹凸性，拐点），描绘函数图形（含渐近线）；④ 利用导数方法，求实际问题中的最大值、最小值问题；⑤ 利用微分中值定理，证明函数属性的命题；⑥ 证明函数不等式（利用函数单调性，微分中值定理）．如果说上一单元的证明题主要用到闭区间上连续函数的性质，那么本单元的证明题几乎都要用到微分中值定理了，就这方面的问题举例以说明之．

例1 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上具有二阶导数，且 $|f(x)|\leqslant1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，试证：至少存在一点 $\xi\in(-2, 2)$，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.