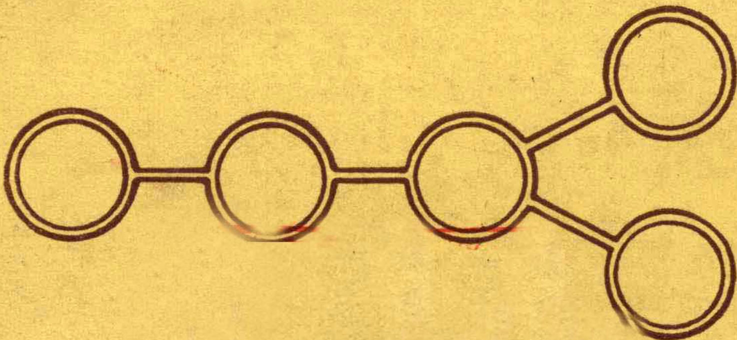
运筹学基础与应用

李吉桂　周太华　麦瑞玲



广东高等教育出版社

运筹学基础与应用

李吉桂　周太华　麦瑞玲　编著

广东高等教育出版社

内容简介

本书的前身——《数学规划法基础》，曾作为大学本科相关专业的教材而使用过多年。线性规划部分也在管理类专业的大专班上讲授过多次。这次出版，为了扩大适用面，删除了要求过高，推理过繁的理论证明，增加了应用性较强的章节。并改名为《运筹学基础与应用》。全书分十六章，每章配有习题，书末附有参考文献。书中提及的主要算法均配有计算机程序（另附）。本书第1至第8章可作为本（专）科的"线性规划"教材，（用一学期，每周4学时，下同）；第9至16章可作为管理类专业的"运筹学"教材或教学参考书。本书也是从事管理专业的各界人士的较好的参考资料。

运筹学基础与应用

李吉桂　周太华　麦瑞玲　编著

*

广东高等教育出版社出版发行

广东省佛冈县印刷厂印刷

787×1092毫米　32开14.75印张319千字

1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷

印数1——3000册

ISBN 7—5361—0520—7/O·22

定价：6.15元

序　言

运筹学是一门应用学科，它为国民经济各个部门的管理人员在制定决策时提供科学根据，它在生产管理、工程技术、军事作战、财政经济和科学试验等方面都有广泛的应用。利用运筹学处理问题有两个重要特点：其一是从全局的观点出发研究每个部门内部的功能关系。全局的观点是指把整个部门作为一个有机的整体，用系统科学的语言来说，就是把整个部门作为一个大系统，其所属的各个职能机构作为大系统内的子系统，而每个子系统又可以分为若干个更小的子系统，各个子系统之间互相联系、互相影响、互相制约。我们说从全局观点研究部门内部的功能就是指对各个子系统进行分析研究，找出使部门的整体功能达到最佳的管理决策。其二是建立数学模型或模拟模型，求得最优解。即指建立一个反映部门整体状态的数学模型或模拟模型，用以分析它的特征或找出它的最佳结构，为部门的管理提供科学的决策。在建立模型和求解过程中，需要许多的数学概念、数学理论、数学方法和数学技巧，涉及数学的许多分支。因此，许多运筹学家都是来自数学专业，或有相当高的数学理论水平的。诚然，运筹学的应用和发展，也大大地推动和深化整个数学学科。今天，运筹学已成为数学学科的一个组成部分。

运筹学的基本思想，可以追溯到我国古代。例如，战国时代的孙膑弈马；北宋时期的丁渭建宫等都是运用运筹学思想的例子。但是，运筹学成为一门学科却是本世纪三十年代以后的事情。第二次世界大战期间，为了解决军用物资的有效分配问题，英、美两国建立了运筹学小组。事实证明，运

筹学小组在当时起了很好的作用。第二次世界大战以后，由于工、农业的发展，人们又尝试把运筹学方法应用到某些企业的经营管理上去，结果取得了巨大的效益。这使人们逐渐加深了对运筹学的认识，并逐渐形成一门新的学科，以后，它以崭新的面目和思想不断发展。

此外，近二十年来，由于计算机技术的高度发展，使由运筹学建立起来的复杂模型的运算困难问题得以解决，换言之，使运筹学的理论得到了应用，从而也大大地推动了运筹学的迅速发展。

我国自五十年代中、后期以来，对运筹学中的数学规划、排队论、对策论、决策论、统筹法等分支展开了研究和应用工作，做出了很好的成绩。特别地，对线性规划和统筹法的研究和应用成绩突出，为世界各国专家所公认。

运筹学涉及的内容相当广泛，一般来说，包括数学规划、排队论、对策论、决策论、统筹法、存贮论和网络技术等。但因篇幅所限，本书主要介绍数学规划，即线性规划、非线性规划和动态规划。同时，又考虑到在国民经济各个部门中出现的问题往往是多方面的，涉及的面也比较广，仅用一类数学方法很难完满地解决遇到的问题。因此，本书在后面几章介绍网络技术、存贮论、排队论和决策论等专题。

本书作者李吉桂副教授、周太华副教授、麦瑞玲讲师长期从事这个领域的教学和科研工作，积累了丰富的经验，他们于1981年编写了《数学规划法基础》讲义，本书就是在此讲义的基础上，经过多年的教学实践，反复修改、增补而写成的。本书的出版将有助于运筹学的教学、科研工作。

张谋成

1990．4．21

目　　录

第一章 线性规划问题

线性规划是数学规划中研究较早的一个分支，它不仅在实际中被广泛地应用，而且运筹学其他分支的有些问题，也可以化为线性规划问题来处理．这一章，我们将通过一些简单的例子介绍线性规划所研究的问题，标准形式及其基本性质等，为以后各章作好必要的准备．

§1.1 引 言

什么是线性规划问题？为了回答这个问题，我们先来研究下面的例子．

例1 某工厂制造 A、B 两种产品，已知制造A种产品 1 公斤需要劳动力 7 人（指标准工作日，下同），原料 5 公斤，电力 2 度；制造B种产品 1 公斤需要劳动力 5 人，原料 8 公斤，电力 5 度．在一个生产周期内，工厂能够使用的劳动力最多有3500人，原料最多有4000公斤，电力最多有2000度；又已知生产 1 公斤A、B产品的经济效益（以货币折算）分别为 6 元和 7 元．问在工厂现有条件下，应如何安排 A、B产品的生产，才能使获得的经济效益最高？

很明显，可以采用许多方案来安排 A、B 产品的生产，然而，合理的方案，应该是所花的劳动力、原料和电力都不超过该厂最大可能提供的数量．具体地，如果设生产 A、B 产品的数量分别为x_1公斤与 x_2 公斤（x_1、x_2称为变量或未

知数，x_1、x_2的不同数值的组合表示不同的方案），则这时消耗的劳动力、原料与电力的数量分别为

$$7x_1+5x_2 \quad （人）（劳动力）$$
$$5x_1+8x_2 \quad （公斤）（原料）$$
$$2x_1+5x_2 \quad （度）（电力）$$

为了使这些方案是合理的，就必须使上式表示的数量都不超过该厂可能提供的最大数量，即应满足：

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \end{cases} \tag{1·1}$$

在数学上称不等式组（1·1）为约束（限制）条件，另外，因为在大量的实际问题中，变量（例如这里代表生产量的x_1与x_2）都是非负的，所以约束条件还经常加上非负要求，因此，例1的约束条件可以用下面的不等式组表示：

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \\ x_1\geqslant 0，\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1·2}$$

其次，根据例1提供的情况，为了判断哪些方案优，哪些方案劣，就要确定一个衡量的标准。显然，这个标准就是各个方案获得的经济效益。一般地，经济效益大的方案比经济效益小的方案优，而各个方案获得的经济效益都可以用下式表示：

$$6x_1+7x_2 \quad （元） \quad （经济效益） \tag{1·3}$$

在数学上称（1·3）式为目标函数。

综上所述，例1提出的问题，就是要确定x_1、x_2的数

量，使(1·3)式取最大值，且使x_1、x_2满足不等式组(1·2)。整个问题可以将（1·2）式与（1·3）式合并记为

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 6x_1+7x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\
& 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\
& 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
\qquad (1\cdot 4)
$$

其中max表示使（1·4）式中的第一个式子取最大值，也就是使目标函数取最大值，s·t. 是英文Subject to 的缩写，读作“受约束（限制）于”.同时，为简便起见，在(1·4）式中将不等式组前的大括号省略. 由于（1·4）式以数学式子的形式表示了例 1，所以常称（1·4）式为实际问题例 1 的**数学模型**.

一般地，在满足约束条件的前提下，使目标函数达到极大（极小）值的问题称为“数学规划问题”. 特别地，当约束条件为变量的线性不等式组和目标函数是变量的线性函数时，就称其为线性规划问题.

§1.2 线性规划问题的标准形式

按照线性规划问题的定义，线性规划问题可以有各种形式（使目标函数取最大（max），最小（min），约束条件中有“⩽”、“⩾”和“=”号等）. 然而任何一种形式都可以等价地变为下述标准形式，它给研究问题带来某些方便.

$$
\begin{aligned}
\min\quad & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1
\end{aligned}
$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \tag{1·5}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots\ x_n\geqslant 0$$

其中b_i，c_j和a_{ij}均为实常数，x_i是要确定的实数．

下面就几种常见的非标准形式，介绍将其变为标准形式的方法．

1．在（1·5）式中，总可以假定每一$b_i\geqslant 0$，否则可以用－1乘以全式，化为此情况．

2．关于目标函数，有时可能是最大值问题max，从算法的观点，这也不是本质的区别，因为可以将 $\max\ c_1x_1+\cdots\cdots+c_nx_n$改为求$\min(-c_1x_1-c_2x_2-\cdots\cdots-c_nx_n)$，因此，以后恒考虑“min”的问题．

3．在某些实际问题中，并不要求某一变量 x_i 是非负（这时称x_i为**自由变量**），这时，可以用两种方法将其化为标准形式（1·5）式：（1）如x_i不限制其有 $x_i\geqslant 0$，则x_i为自由变量，设

$$x_i=u_i-v_i \tag{1·6}$$

其中我们要求$u_i\geqslant 0$，$v_i\geqslant 0$，在（1·5）式中将处处用u_i-v_i 代替x_i，则（1·5）式中的所有变量均非负，变为用$n+1$个变量x_1、$\cdots x_{i-1}$，u_i，v_i，x_{i+1}，$\cdots$，x_n来表达的线性规划问题．

（2）是把自由变量 x_i 同约束方程之一同时消去．取（1·5）式的m个方程中，x_i 的系数不为零的任一个，例如

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n=b_i \tag{1·7}$$

其中$a_{ii}\neq 0$，于是x_i可以表达为其余的变量的线性组合再加上一个常数．如果在（1·5）式的各处用（1·7）式代替

x_t，则导出了一个同样形式的新问题，它仅用变量x_1，…，x_{t-1}，x_{t+1}，…x_n来表达，这时，如用(1·7)式代入(1·5)式的第t个方程，将成为恒等式．因此可以省去．这时我们得到了$n-1$个变量，$m-1$个约束方程的标准形式的线性规划问题．解出这个标准形式线性规划问题后，将对应的x_1,…,x_{t-1}，x_{t+1},…,x_n代入（1·7）式即可确定x_t的值．

4．在某些问题中，除非负约束条件，即$x_i \geqslant 0$外，还有其他不等式约束，这时可以用如下的方法将其转换为等式约束．

（1）例如有

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \leqslant b_i$$

则我们加上一个变量x_{n+1}，使其化为等式

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$$

显然，这里x_{n+1}必为非负．习惯上称这个x_{n+1}为**松驰变量**．

（2）例如有

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \geqslant b_i$$

则我们减去一个变量x_{n+1}，而使其化为等式

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i$$

这里x_{n+1}也必为非负，有的文献也称这时的x_{n+1}为松驰变量，而有的则称为**剩余变量**，以示区别．

为了更具体地说明上述方法，举例如下：

例2 min $\quad x_1+3x_2+4x_3$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad x_1+2x_2+x_3&=5\\ 2x_1+3x_2+x_3&=6\\ x_2\geqslant 0,\ x_3&\geqslant 0\end{aligned}$$

x_1为自由变量，从第一个约束方程把它解出

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3 \tag{1·8}$$

再将它代入目标函数和第二个约束中去，就得到等价的问题：

$$\min \quad x_2 + 3x_3 \qquad (\text{其中目标函数已减去} 5)$$
$$\text{s.t.} \quad x_2 + x_3 = 4$$
$$x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0$$

它已是一个标准形式．上式的答案是$x_2 = 4$，$x_3 = 0$，x_1的值可从（1·8）式得到，即$x_1 = -3$．

§1.3 线性规划的基本定理

为了叙述的方便，将（1·5）式改述为矩阵的形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & CX \\ \text{s.t.} \quad & AX = b \\ & X \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1·9}$$

其中X为n维列向量，C为n维行向量，A为$m\times n$矩阵，$b\geqslant 0$为m维列向量．向量不等式表示其中每一个分量都成立．

定义 1 在（1·9）式中，设A的$m\times m$子矩阵

$$B = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{im})$$

是非退化的，则（1·9）式的解

$$\begin{aligned} & x_i^0 = 0 \qquad i \overline{\in} \{i_1, i_2, \cdots, i_m\} \\ & x_B^0 = (x_{i1}^0, x_{i2}^0, \cdots, x_{im}^0) = B^{-1}b \end{aligned} \tag{1·10}$$

称为（1·9）式对应于基B的一个基本解，与基B的列相对应的变量x_{i1}，x_{i2}，$\cdots x_{im}$称为基本变量，x_i（$i \overline{\in} \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$）称为非基本变量．

在定义 1 中，所以称B为基，是因为B是由 m个线性无关列组成，这m个线性无关列可以作为E^n空间中的一组基，向量b可以表示为（对应于基本解的）基向量的线性组合。

当然，一般说来，（1·9）式中的方程可能没有基本解，但是，我们通常假定$n>m$，即变量 x_i 的数目超过等式约束的数目，其次，还通常假定A 的行是线性无关的，这就与m个方程的线性无关性一致。A 的行如果线性相关时，将引出如下两种情况，（1·9）式中的约束是互相矛盾的，或者是（1·9）式中的约束有多余的，因而可以消去，因此，在多数情况下，假定A的秩为 m，$n>m$，所以（1·9）式至少有一个基本解。

定义 2　如果在基本解中，至少有一个基本变量为零，则称这个解是一个退化的基本解。

由定义 1，基本解是关于基B而言的。所以，在退化的基本解中，零值的基本变量可以因B不同而不同，即零值的基本变量与非基本变量是可以交换的。

现在把变量的正约束（非负约束）加进来一齐讨论，考察约束系。

$$\begin{aligned} AX &= b \\ X &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad (1\cdot 11)$$

定义 3　满足（1·11）式的向量X^0称为（1·9）式〔也是（1·11）式〕的可行解；当X^0又是基本解时，则称X^0为基本可行解；若X^0又是退化的，则称X^0为退化的基本可行解。

定义 4　对应于（1·9）式所示的线性规划，使目标函数CX取最小值的可行解称为最优可行解，若这个解也是基本解，则称它为最优基本可行解。

如下所述的线性规划的基本定理，确定了基本可行解在线性规划问题中的首要地位——在寻求线性规划的最优解时，只须研究基本可行解，因为最优值总是在这种解上达到。

定理1 （线性规划基本定理）已知标准形式（1·9）式的线性规划，其中设A是$m\times n$阵，秩为m，则有：

（1）若（1·9）式存在一个可行解，则必存在一个基本可行解。

（2）若（1·9）式存在一个最优可行解，则必存在一个最优基本可行解。

证明：（1）不失一般性，设（1·9）式的可行解为X^0

$$x_1^0>0,\quad x_2^0>0,\cdots,\quad x_p^0>0,\quad x_{p+1}^0=x_{p+2}^0=\cdots$$

$$=x_n^0=0$$

即有

$$x_1^0\alpha_1+x_2^0\alpha_2+\cdots+x_p^0\alpha_p=b \qquad (1\cdot12)$$

其中α_1、α_2…、α_p为A的列向量。

（Ⅰ）若向量组α_1，α_2，…，α_p线性无关，则由基本可行解的定义及线性代数知识（替换定理）易知X^0就是基本可行解。

（Ⅱ）若向量组α_1，α_2，…，α_p线性相关，即存在不全为零的常数y_1，y_2，…，y_p使等式

$$y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_p\alpha_p=0 \qquad (1\cdot13)$$

成立。不失一般性，设其中至少有一个$y_i>0$，（否则两边同乘以－1就变为全是正的了），令