普通高等教育“十一五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　赵　辉
副主编　赵　亮　罗来珍

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

概率论与数理统计

主　编　赵　辉
副主编　赵　亮　罗来珍

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据高等学校非数学专业概率论与数理统计教学基本要求及考研大纲编写而成. 全书共12章，包括随机事件及其概率、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、随机过程的基本概念、马尔可夫过程、平稳随机过程等内容. 本书层次清晰、结构严谨，循序渐进，并结合考研的实际情况，精选了大量的例题和习题，题型较为丰富，习题量适度，书末附有部分习题参考答案及提示.

本书可作为高等学校理工类、经管类、农林类等相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/赵辉主编. 一北京：科学出版社，2010
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-028308-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 136271 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年8月第一次印刷 印张：14 1/2
印数：1—7 000 字数：290 000

定价：23.00 元

前　言

本书是根据教育部非数学专业数学基础课程教学指导分委员会制定的非数学专业概率论与数理统计课程教学基本要求及全国硕士研究生入学考试数学考试大纲的内容和要求编写而成的，适合高等院校理工类、经管类、农林类等相关专业使用.

在编写的过程中，我们力求教材的内容、体系符合新形势下的高等教育教学内容和课程体系改革的总体目标，同时也注意适应高校扩招以后实际的教学情况，并兼顾许多学生报考硕士研究生的要求，吸取了国内外优秀教材的精华，并融入了作者多年来在概率论与数理统计教学中的实际教学经验.

由于概率论与数理统计是一门研究随机现象的理论，是在推广了传统的数理逻辑的基础上形成的，其内容和方法在许多领域都有较多的应用，其概念、思想、方法与传统的数学理论有较大的区别，学生在学习的过程中要特别重视总结有关概念、定理和方法，教师要充分利用习题课和实际问题增强学生的感性认识. 本书内容所需学时为 80～100 学时，对于要求不同的专业(例如某些专业不需要讲随机过程部分或数理统计部分)，可适当删减部分内容，并略去某些定理的证明过程，因此本书也适用于学时为 40～60 学时的概率论与数理统计课程.

本书内容分为概率论(第 1～5 章)、数理统计(第 6～9 章)、随机过程(第 10～12 章)三个部分，数理统计和随机过程两个部分是相互独立的，可根据专业的需要选用. 全书由赵辉、赵亮、罗来珍共同编写. 在本书的编写过程中得到了哈尔滨理工大学教务处和应用数学系的大力支持，作者在此一并深表感谢.

由于水平所限，书中不妥之处在所难免，殷切地希望广大读者批评指正、不吝赐教，以便不断改进和完善.

编　者

2010 年 5 月

目　录

第1章　随机事件及其概率

自然界和人类社会中存在着大量的不确定现象,例如投掷一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上;从一批产品中任取一件,则取出的产品可能是次品也可能是正品.这种可能出现的结果不止一个,而事先又不能确定哪个结果发生,带不确定性的现象称为**随机现象**.

为了研究随机现象,可以在相同的条件下对其作次数较多的实验或观察,例如,反复的投掷一枚硬币,从中就会看到,尽管在一次试验中,其结果出现带有偶然性,但在大量试验中,该结果出现的次数却呈现出较强的统计规律性,明显地暗示出该结果发生的可能性有多大.概率论和数理统计是一门研究和揭示随机现象统计规律的数学科学,它的理论和方法在几乎所有的科学技术领域、工农业和国民经济各个部门都有广泛的应用.

1.1　随机事件、样本空间

1.1.1　随机试验

随机现象是通过随机试验加以研究的,随机试验的例子很多.例如,投掷一枚硬币,观察正面 H 向上,还是反面 T 向上;掷一颗骰子,观察出现的点数;在一批电子器件中任取一只,测试其寿命等.随机试验具有以下特点:

(1) 在相同条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以知道试验的所有可能结果;

(3) 在试验之前,并不能确定哪一个结果会出现.**随机试验**简称为**试验**,常用大写字母 E 表示.

1.1.2　样本空间

在随机试验中,可能发生出现的结果不止一个,事先无法确定哪个结果出现,但却能知道随机试验的所有结果可能有哪些.随机事件 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**,记为 U,U 中的元素称为**样本点**.

例 1.1.1　抛掷一枚硬币,观察正面和反面出现的情况.这时所有可能出现的结果有两个,"正面 H 向上"或是"反面 T 向上".故样本空间 $U=\{H,T\}$.

例 1.1.2　掷一颗骰子,观察出现的点数.所有可能出现的结果为 1 点到 6

点. 所以，样本空间为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 1.1.3 在一批电子器件中任意抽取一只，测试它的寿命，其样本空间为 $U=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

1.1.3 随机事件

设随机实验 E 的样本空间为 U，我们把 U 的子集称为试验 E 的**随机事件**，简称**事件**. 随机事件常用大写字母 A,B,C 等表示.

我们称事件 A 发生当且仅当 A 中的一个样本点出现.

特别地，由一个样本点组成的点集，称为**基本事件**，全集 U 称为**必然事件**，空集 Φ 称为**不可能事件**.

例如在前面例 1.1.2 中，若用 A 表示"出现点数为偶数"，B 表示"出现的点数小于 3"，则 A,B 均为随机事件，其中 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2\}$，而事件"点数小于或者等于 6"为必然事件. 事件"点数大于 6"为不可能事件.

1.1.4 事件之间的关系与运算

由于事件是集合，因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系及运算来处理. 下面我们给出这些关系和运算在概率论中的提法及其含义.

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B **包含**事件 A，它的含义是指事件 A 出现，必然导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，是指事件 A 与 B 至少有一个发生.

类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和；$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和.

(3) 事件 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，是指事件 A 与 B 同时发生. $A\cap B$ 也简记为 AB.

类似地，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积；$\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积.

(4) 若 $A\cap B=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，是指事件 A 与 B 不能同时发生. 显然，基本事件是两两互不相容的.

(5) 若事件 A 与事件 B 满足 $A\cup B=U$ 且 $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. 是指每次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 表示 A 不发生.

(6) $A-B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，是指事件 A

发生而事件 B 不发生，显然，$A-B=A\bar{B}$.

由集合论可知，事件运算满足以下法则：设 A,B,C 为事件，则有

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 德·摩根律(De-morgan)：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$，$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

例 1.1.4 随机试验 E 为：将一颗骰子投掷两次，用 A_1 表示事件“第一次出现 2 点”；A_2 表示事件“两次出现点数之和为 8”，则

$A_1=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$；

$A_2=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$；

$A_1\cap A_2=\{(2,6)\}$；

$A_2-A_1=\{(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$.

1.2 频率与概率

1.2.1 频率

一个随机试验有多种可能的结果，事先不能确定某一事件(除必然事件和不可能事件外)会不会发生，但人们希望知道某些结果发生的可能性有多大. 设 E 为一随机试验，A 为其中任一事件，在相同条件下，把 E 独立的重复做 n 次，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数. 比值 n_A/n 反映了事件 A 发生的频繁程度. n_A/n 的值越大，事件 A 发生越频繁，则意味着事件 A 发生的可能性也就越大，因此 n_A/n 在某种意义上反映了事件 A 发生的可能性的大小.

称 n_A/n 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，显然，$f_n(A)$ 具有下列性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(U)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的 n 个事件，则有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i)$$

历史上，许多人做过投硬币试验，数据如表 1.1、表 1.2 所示.

表 1.1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498

续表

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1.2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上表中可以看出，频率 $f_n(A)$具有下列特征：

(1) 频率具有随机波动性，即对同样的 n，所得的 $f_n(A)$不尽相同.

(2) 当 n 较小时，$f_n(A)$的随机波动性较大，而随着 n 增大，$f_n(A)$在 0.5 附近摆动，并逐渐趋于稳定.

由此可见，尽管频率在一定程度上反映了事件 A 发生的可能性大小，但$f_n(A)$与试验次数 n 有关又具有随机波动性. 所以用 $f_n(A)$去定义某事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小不尽合理. 人们希望用一个与试验次数无关且无随机波动性的适当的数来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小. 受频率的启发，人们给出概率的公理化定义.

1.2.2　概率

设 E 为随机试验，U 为它的样本空间，对于每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称 $P(A)$为事件 A 的**概率**(probability)，若 $P(A)$满足下列条件：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(U)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)称为概率的可列可加性.

由定义,可以得到概率的一些重要性质.

性质 1.2.1 $P(\Phi)=0$.

证 令 $A_n=\Phi(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\Phi$,且 $A_iA_j=\Phi,i\neq j$. 由概率的可列可加性得

$$P(\Phi)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

而 $P(\Phi)\geqslant 0$,故由上式得 $P(\Phi)=0$.

性质 1.2.2 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个两两互不相容事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.2.2}$$

式(1.2.2)称为概率的有限可加性.

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\Phi$,则有 $A_iA_j=\Phi,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$. 由概率的可列可加性得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_k)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\Phi)+P(\Phi)+\cdots$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 1.2.3 设 A,B 为两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.2.3}$$

$$P(B)\geqslant P(A) \tag{1.2.4}$$

证 由 $A\subset B$ 知 $B=A\cup(B-A)$,且 $A\cap(B-A)=\Phi$,则由性质 1.2.2 得

$$P(B)=P(B-A)+P(A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

由概率公理化定义中的(1),$P(B-A)\geqslant 0$ 知

$$P(B)\geqslant P(A)$$

性质 1.2.4 对任一事件 $A,P(A)\leqslant 1$.

证 由于 $A\subset U$,由性质 1.2.3 可得

$$P(A)\leqslant P(U)=1$$

性质 1.2.5 对任一事件 $A,P(\overline{A})=1-P(A)$.

证 由于 $A\cup\overline{A}=U$,且 $A\cap\overline{A}=\Phi$,则由性质 1.2.2 得

$$1=P(U)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

即 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 1.2.6 对任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.5}$$

证　由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$(见图1.1),且 $A\cap(B-AB)=\Phi$,则由性质1.2.2及性质1.2.3可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB)\end{aligned}$$

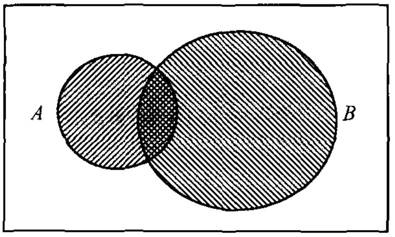

图1.1

式(1.2.5)还可以推广到 n 个事件的情形. 例如,$n=3$ 时,有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)\\&-P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

一般地,有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

1.3 古典概型

1.3.1 古典概型

如果一个随机试验具有下列特点:

(1) 试验的样本空间中包含有限个基本事件,即

$$U=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$

(2) 每个基本事件 $\{e_i\}$ 发生的可能性相同.

则称这种随机试验为**等可能概率型(古典概型)**.

在古典概型中很容易得到事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $U=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,由于在试验中每个基本事件发生的可能性相等,则有

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$$

又由于基本事件是两两互不相容的. 于是

$$1=P(U)=P(e_1)+P(e_2)+\cdots+P(e_n)=nP(e_i)$$

故有

$$P(e_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

如果试验的样本空间中含有 n 个基本事件，而事件 A 中包含 k 个基本事件，则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{U\text{ 基本事件总数}} \tag{1.3.1}$$

式(1.3.1)就是古典概型中事件 A 的概率计算公式.

例 1.3.1 在 0,1,2,3,4,5,6 在这七个数中任取一个数，用 A 表示"取得奇数"这一事件，求 $P(A)$.

解 样本空间 $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，基本事件总数为 $n=7$，而事件 $A=\{1,3,5\}$，A 所含基本事件个数为 $k=3$，因此

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{7}$$

由事件运算的性质可知，$\overline{A}$ 表示事件 A 的对立事件，在这里是指"取得偶数"这一事件，于是

$$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{4}{7}$$

为了避免烦琐，当样本空间的元素较多时，不再将 U 中与 A 中元素一一列出.只需求出 U 中与 A 中所含基本事件的个数，再根据式(1.3.1)求出 $P(A)$.

例 1.3.2 在某批产品中有 a 件正品，b 件次品，采用有放回抽样与不放回抽样两种方式从中取出 2 件产品，求：(1)取到的两件产品均为正品的概率；(2)取到的两件产品中至少有一件是次品的概率.

解 用 A 表示事件"取到的两件产品均为正品"，用 B 表示事件"取到的两件产品中至少有一件是次品". 易知，$B=\overline{A}$.

(1) 有放回抽样方式.

第一次有 $a+b$ 件产品可抽取，第二次仍有 $a+b$ 件产品可抽取，因此样本空间 U 中含有 $(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)^2$ 个基本事件，而对于事件 A，第一次有 a 件产品可抽取，第二次仍有 a 件产品可抽取，即 A 中含 $a\cdot a=a^2$ 个基本事件. 因此

$$P(A)=\frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2ab+b^2}{(a+b)^2}$$

(2) 不放回抽样方式.

这时，易知样本空间 U 中含有 $(a+b)\cdot(a+b-1)$ 个基本事件，而事件 A 中含 $a\cdot(a-1)$ 个基本事件. 于是

$$P(A)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$P(B)=1-P(A)=\frac{2ab+b^2-b}{(a+b)(a+b-1)}$$

例 1.3.3　将 N 个球随机地放入 n 个盒子中($n>N$)，试求每个盒子最多有一个球的概率.

解　这显然也是等可能问题.

先求 N 个球随机地放入 n 个盒子的方法总数. 因为每个球都可以落入 n 个盒子中的任何一个，有 n 种不同的放法，所以 N 个球放入 n 个盒子共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{N}=n^N$ 种不同的放法.

事件 A="每个盒子最多有一个球". 第一个球可以放进 n 个盒子之一，有 n 种放法；第二个球只能放进余下的 $n-1$ 个盒子之一，有 $n-1$ 种放法；……第 N 个球只能放进余下的 $n-N+1$ 个盒子之一，有 $n-N+1$ 种放法；所以共有 $n(n-1)\cdots(n-N+1)$ 种不同的放法. 故得事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{n^N}=\frac{A_n^N}{n^N}$$

例 1.3.4　有 18 本书，其中有 3 本文学书，将这 18 本书平均分给甲、乙、丙三人. 求：

(1) 3 人各分到一本文学书的概率；

(2) 3 本文学书都分给甲的概率；

(3) 3 本文学书分给同一人的概率.

解　样本空间所含基本事件总数为

$$\binom{18}{6}\binom{12}{6}\binom{6}{6}=\frac{18!}{6!\times 6!\times 6!}$$

(1) 将 3 本文学书分给每人一本的分法共有 3! 种，将剩余的 15 本平均分给 3 人的分法共有 15!/(5!×5!×5!)种. 因此这一事件所含基本事件数为

$$\frac{3!\times 15!}{5!\times 5!\times 5!}$$

于是，所求概率为

$$p_1=\frac{3!\times 15!}{5!\times 5!\times 5!}\Big/\frac{18!}{6!\times 6!\times 6!}=\frac{9}{34}$$

(2) "3 本文学书都分给甲"这一事件所含基本事件数为

$$\binom{15}{3}\binom{12}{6}\binom{6}{6}=\frac{15!}{3!\times 6!\times 6!}$$

所求概率为

$$p_2=\frac{15!}{3!\times 5!\times 5!}\Big/\frac{18!}{6!\times 6!\times 6!}=\frac{5}{204}$$

(3) 将 3 本文学书分给同一人的分法有 3 种，剩余的 15 本的分法有 15!/(3!×6!×6!)种. 因此，"3 本文学书分给同一人"这一事件所含基本事件数为

$$\frac{3\times 15!}{3!\times 6!\times 6!}$$

于是,所求概率为

$$p_3=\frac{3\times 15!}{3!\times 6!\times 6!}\Big/\frac{18!}{6!\times 6!\times 6!}=\frac{5}{68}$$

例 1.3.5 设有 N 件产品,其中有 m 件次品,从中不放回的随机抽取 n 件,问其中恰有 $k(k\leqslant m)$ 件次品的概率是多少?

解 从 N 件产品中任取 n 件,所有可能取法为 $\binom{N}{n}$ 种,而在 m 件次品中取 k 件,不同的取法有 $\binom{m}{k}$ 种,在 $N-m$ 件正品中取 $n-k$ 件不同的取法有 $\binom{N-m}{n-k}$ 种,所以,从 N 件产品中抽取 n 件使其中恰有 $k(k\leqslant m)$ 件次品的所有可能的不同取法有 $\binom{m}{k}\cdot\binom{N-m}{n-k}$ 种. 于是,所求概率为

$$p=\binom{m}{k}\cdot\binom{N-m}{n-k}\Big/\binom{N}{n}$$

1.4 条件概率

1.4.1 条件概率

条件概率是研究在某个事件 A 已经发生的条件下,另一个事件 B 发生的概率,为了便于说明问题,我们先看一个例子.

例 1.4.1 在 0～9 这 10 个数中任取一个数,求下列事件的概率:

(1) 取得的数是奇数;

(2) 已知取得数字大于 4,取得的数是奇数.

解 样本空间 $U=\{0,1,2,\cdots,9\}$.

设事件 A 表示“取得的数大于 4”;事件 B 表示“取得的是奇数”则

$$A=\{5,6,7,8,9\},\quad B=\{1,3,5,7,9\}$$

(1) 显然 $P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

(2) 现已知 A 已经发生,故所有可能结果所组成的集合为 A,而在 A 中,$\{5,7,9\}\subset B$,若将已知 A 已发生的条件下,B 发生的概率记为 $P(B|A)$ 则 $P(B|A)=\frac{3}{5}$. 我们看到 $P(B)\neq P(B|A)$.

一般地,设 U 为试验 E 的样本空间,A,B 是事件,基本事件(即 U 的样本点)

的总数为 n，A 所包含的基本事件数为 m，AB 所包含的基本事件数为 k，则有

$$P(B \mid A)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

由此，我们给出下面的定义.

定义 1.4.1　设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.4.1}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

不难验证，条件概率满足概率公理化定义中的三个条件，即

(1) $P(B|A)\geqslant 0$；

(2) $P(U|A)=1$；

(3) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i \,|\, A\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$，其中 $B_1,B_2,\cdots$是两两互不相容事件. 因此，类似于概率，不难导出条件概率也满足概率的其他一些性质，例如

$$P(B_1 \cup B_2 \mid A)=P(B_1 \mid A)+P(B_2 \mid A)-P(B_1B_2 \mid A)$$

例 1.4.2　一口袋中装有 8 只红球，5 只白球，无放回地取球两次，每次取一只，求：(1)在第一次取到红球条件下，第二次取到红球的概率；(2)在第一次取到白球的条件下，第二次取到红球的概率.

解　设 A 表示事件“第一次取到红球”，B 表示事件“第一次取到白球”，C 表示事件“第二次取到红球”，则易知

$$P(A)=\frac{8}{13},\quad P(B)=\frac{5}{13},\quad P(AC)=\frac{8\times 7}{13\times 12},\quad P(BC)=\frac{5\times 8}{13\times 12}$$

因此

$$P(C \mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{7}{12}$$

$$P(C \mid B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{8}{12}$$

本题也可以直接按条件概率的含义来计算. 我们知道 A 发生后，口袋中还有 7 只红球与 5 只白球，因此第二次取到红球的所有可能的结果共有 7 种，因此

$$P(C \mid A)=\frac{7}{7+5}=\frac{7}{12}$$

同样可得 $P(C|B)=\frac{8}{12}$.

例 1.4.3　甲、乙两车间各生产 50 件产品，其中分别含有次品 3 件与 5 件. 现从这 100 件产品中任取 1 件，在已知取到甲车间产品的条件下，求取得次品的概率.

解　设 A 表示“取得次品”，B 表示“取得甲车间产品”，则由 B 已发生即已知