最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧

初中·数论

中央民族大学出版社

学奥林匹克专题讲座与解题技巧

初中　数论

张　程　章建跃　李　英
张秀平　刘仁权　朱文芳

中央民族大学出版社

责任编辑：凌　弘
封面设计：金　文

最新数学奥林匹克专题讲座与解题技巧
初中　数论
*
中央民族大学出版社出版
（北京西郊白石桥路 27 号）
（邮政编码：100081　电话：68472815）
新华书店北京发行所发行
北京京海印刷厂印刷

787×1092　32 开　4 印张　80 千字
1997 年 6 月第 3 次印刷
印数：19001—25000 册

ISBN 7-81001—434-X/G・178
定价：4.00 元

目　　录

一、　奇偶性及01法

在民间流传着很多有趣而又耐人寻味的问题，人们常常用来测试孩子的智慧，例如：

问题1)，30个饺子5碗装，只许逢单不逢双，请问应该如何装？（解答见例5）

问题2)，7只杯子，3只口朝上4只口朝下，每次可翻转杯子4只，问数次翻转后能否出现7只杯口皆朝下？（解答见例9）

……

如果我们对上述问题也难以作出迅速回答，那么说明我们还缺乏对整数的性质等知识的学习与研究。鉴于此，我们将首先来介绍下面的内容——奇偶性。

1．基本知识

我们把能够被2整除的数

$$0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$$

叫做偶数。通常可表示为$2k$的形式，其中k为整数。正偶数2,4,6,…叫做双数。双数可表示为$2k$，其中k是正整数。

把不能够被2整除的数

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$$

叫做奇数。通常可表示为$2k+1$的形式，其中 k 为整数。正奇数1,3,5,…叫做单数。单数可表示为$2k+1, k=0,1,2,\cdots$，或$2k-1, k=1,2,3,\cdots$。

一个整数是奇数还是偶数是这个数的自身的属性，称为这个数的奇偶性。

对奇偶性要掌握以下主要知识点：

（1）在整数的加法、乘法运算中，和与积的奇偶性同加数与乘数的奇偶性相关。法则如下：

+	奇	偶
奇	偶	奇
偶	奇	偶

×	奇	偶
奇	奇	偶
偶	偶	偶

（2）两个整数之和与这两个整数之差有着相同的奇偶性。

（3）奇数个奇数之和是奇数，若干个奇数之积仍是奇数。

（4）相邻两个整数之和必为奇数，相邻的两个整数之积必是偶数。

（5）奇数的平方被 4 除余 1，偶数的平方是 4 的倍数。

（6）一个整数是奇数就不可能是偶数，是偶数就不能再是奇数。

运用上述基本知识，再加上正确地分析与推理，就可以解决许多繁杂有趣的问题。这种应用奇偶数性质来解题的方法通常称之为奇偶性分析。

奇偶性分析是一种分析的方法，在运用时要注意以下几点：

一、问题所涉及的数量关系一定是整数量之间的关系；

二、自然界很多两态关系如正、反，开、关，上、下等可用奇偶关系来讨论；

三、对复杂问题可采用实验的方法从简单入手进行突破。

2．例题

例1 有 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，取值 1 或 -1，且满足条件 $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$，求证：$n$ 能被 4 整除。

分析：首先等式左边的各项的值是 1 或 -1，且和为零，所以 1 和 -1 必成对出现，由此可知，n 必是偶数；另外，等式中每一个数均出现 4 次，因此所有项的乘积等于 1，这样又可判断等式左边等于 -1 的项必有偶数个，从而知结论正确。

证明：记 $a_1a_2a_3a_4 = b_1, a_2a_3a_4a_5 = b_2, \cdots, a_na_1a_2a_3 = b_n$，则 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$。

由上面分析知 n 必为偶数，不妨令 $n = 2k$，即 n 项中有 k 项值为 1，k 项值为 -1。

又 $b_1b_2\cdots b_n = 1^k(-1)^k = (-1)^k$。

由于 $b_1b_2\cdots b_n = (a_1a_2\cdots a_n)^4 = 1$

故有 $(-1)^k = 1$

因此，k 为偶数，设 $k = 2m$，则

$$n = 2k = 4m$$

即 n 能被 4 整除。

例2 某班有49位同学，坐成 7 行 7 列。每个座位的前后左右的座位叫做它的“邻座”。要让这49位同学中的每一

位都换到他的邻座上去，问这种调换的方案能否实现？

解：这种调换的方案不可能实现，原因如下：

用×与△并按照如图 1 所示的方式标志这49个座位。

对于画×的座位，画△的座位是其邻座，反之也一样。

× △ × △ × △ ×
△ × △ × △ × △
× △ × △ × △ ×
△ × △ × △ × △
× △ × △ × △ ×
△ × △ × △ × △
× △ × △ × △ ×

图 1-1

因此，换位就相当于要求在×位上的都必须换到△位上去，而在△位上的都应当换到△上来。而两种座位的总数是49，即为一个奇数，可见×位的数目与△位的数目必一奇一偶。因此，不可能使每一×位（或△位）都换到他的邻座上去。

例 3　某次数学竞赛，共有40道题目，规定对一题给 5 分，不答给 1 分，答错倒扣 1 分。请说明，不论多少人参赛，全体学生得分的总和一定是偶数。

分析：由于要说明得分总和一定是偶数，那么和参赛人数无关。这也说明不可能有人的得分为奇数。否则不能保证得分的总和一定是偶数。

这样，问题就转化为设法证明每个人的得分都是偶数，不妨设某人答对了 a 道题，答错了 b 道题，还有$40-a-b$道题未答。那么这个学生所得分数应为

$$
\begin{aligned}
&5\times a+1\times(40-a-b)-1\times b\\
&=5a+40-a-b-b\\
&=2(20+2a-b)
\end{aligned}
$$

因此每个学生得分都是偶数，故命题得证。

例 4 圆周上有1993个点，给每一个点染两次颜色：或红、蓝或全红，或全蓝。最后统计知：染红色1993次，染蓝色1993次。

试证：至少有一点被染上红、蓝两种颜色。

证明：假设没有一点被染上红、蓝两种颜色，即第一次染红（蓝）．第二次染红（蓝）．不妨令第一次有m个点（$0\leqslant m\leqslant 1993$）染红，第二次仍有且仅有这$m$个点被染红，即有$2m$个红点．但是

$$2m\neq 1993$$

所以至少有一点被染上红、蓝两种颜色。

例 5 30个饺子5碗装，只许逢单不逢双，请问应该如何装？

解：无论如何装，都不可能满足题目要求。理由如下：

不妨设5个碗里分别装有a_1,a_2,a_3,a_4,a_5个饺子，则

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=30$$

而若a_1,a_2,a_3,a_4,a_5都为单数时，则有

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\text{奇数}$$

但 $$30\neq\text{奇数}$$

故满足题意的装法是不存在的。

例 6 能否把1,1,2,2,3,3,4,4,5,5这10个数字排成一行,使得两个1中间夹着1个数,两个2之间夹着2个数,……两个5之间夹着5个数？

我们可以先从简单的问题来试验，如对1,1,2,2,3,3这6个数字，试看能否排成一行满足两个1之间夹着1个数，两个2之间夹着2个数，两个3之间夹着3个数。如：

3,1,2,1,3,2

或 $2,3,1,2,1,3$.

同样，对$1,1,2,2,3,3,4,4$这8个数字，也可排成满足上述要求的一行，如

$$2,3,4,2,1,3,1,4$$

或 $4,1,3,1,2,4,3,2$.

但是，对于$1,1,2,2,\cdots,5,5$这10个数字能否按要求排出呢？经过若干次试验总是不成功。在这种情况下，我们通常要从相反的一面去试探即设法试证排法不可能。

如果按要求排成一行，那么可按从左到右的顺序编成1至10号。

这样，不妨设两个1所在位置的号码分别为a和$a+2$，两个2所在位置的号码分别为b和$b+3$，两个3所在位置的号码分别为c和$c+4$，两个4所在位置的号码分别为d和$d+5$，两个5所在位置的号码分别为e和$e+6$。

原来10个数字所在位置的号码总和为

$$1+2+3+\cdots+10=55 \text{（奇数）}$$

由上知，这些号码总和又可表示为

$$\begin{aligned}&a+(a+2)+b+(b+3)+c+(c+4)+d+(d+5)\\&\quad+e+(e+6)\\&=2(a+b+c+d+e)+20\\&=2(a+b+c+d+e+10)\text{（偶数）}\end{aligned}$$

由于奇数$\neq$偶数

所以满足要求的排法不可能存在。

例7 已知一奇数β，使得整系数二次三项式

$$ax^2+bx+c$$

的值$a\beta^2+b\beta+c$也是奇数，其中c是奇数。求证：方程

$$ax^2+bx+c=0$$

没有奇数根。

证明：因为 c 是奇数，并且 $a\beta^2+b\beta+c$ 是奇数，因此

$$a\beta^2+b\beta=\beta(a\beta+b)$$

是偶数。由于 β 是奇数，因此 $a\beta+b$ 是偶数。又因为 β 是奇数，故 a 与 b 必同奇或同偶。

要证明二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇数根，只须证明对任一奇数 r，都有

$$ar^2+br+c\neq0$$

即可。

事实上，由于 a 与 b 同奇或同偶，这样对任一奇数 r 总有 $ar+b$ 是偶数。从而

$$\begin{aligned}ar^2+br+c&=r(ar+b)+c\\&=\text{偶数}+\text{奇数}\neq0.\end{aligned}$$

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇数根。

例 8 设有 n 盏亮着的拉线开关灯，规定每次必须拉动 $n-1$ 个拉线开关。试问：能否把所有的灯都关闭？

分析：先从简单情况想起：当 $n=1$ 时，显然不行；当 $n=2$ 时，1 号灯拉线不动，2 号灯关，2 号灯拉线不动，1 号灯再关，可行；当 $n=3$ 时，每盏灯线拉动奇数次才能关上，3 个奇数的和仍是奇数，而 $n-1=2$，故按规定拉动开关的总次数是偶数。因此，不能把灯全部关闭。由此猜测当 n 为偶数时可以，当 n 为奇数时不行。

证明：(1) 当 n 为奇数时，每盏灯需拉动开关奇数次才能关闭。因此要全部灯关闭，总拉动开关次数应是奇数个奇数的和，即是奇数。但是此时 $n-1$ 为偶数，按规定拉线拉

动的次数必为偶数。故无论如何也不可能把全部亮着的灯都关闭；

(2) 当 n 为偶数时，把 n 盏灯编号为 $1,2,3,\cdots,n$，按如下操作：

第一次：1号灯线不动，拉动其余开关；

第二次：2号灯线不动，拉动其余开关；

……

第 n 次：n 号灯线不动，拉动其余开关。

这样，每盏灯拉动 $n-1$ 即奇数次，因此可以用上述方案把全部亮着的灯关闭。

、　说明：运用本题的解题思路可以类似地解决开始提到的问题2)，即

例9　7只杯子，3只口朝上4只口朝下，每次可翻转杯子4只，问数次翻转能否出现7只杯口皆朝下？

解：不可能出现7只杯口皆朝下。下面我们将给出证明：

假设按规定翻转 m 次后7只杯口全部朝下，由于每只杯口朝上的杯子必被翻转奇数次，杯口朝下的杯子必被翻转偶数次，故不妨设3只杯口朝上的杯子与4只杯口朝下的杯子被翻转的次数依次为 $2m_1+1, 2m_2+1, 2m_3+1, 2n_1, 2n_2, 2n_3, 2n_4$，总计翻转“杯次”为

$$\begin{aligned}&(2m_1+1)+(2m_2+1)+(2m_3+1)+2n_1+2n_2+2n_3+2n_4\\&\quad=2(m_1+m_2+m_3+n_1+n_2+n_3+n_4)+3\\&\quad=\text{奇数};\end{aligned}$$

另一方面，每次翻转4只杯子，m 次共翻转 $4m$“杯次”，而 $4m$ 为偶数，产生矛盾，故不可能出现7只杯口皆朝下。

说明：本题还可以根据两态关系即杯口朝上、下来赋值即运用“01法”来解答，请参见本讲例15、16)。

例10 说明不存在这样的自然数 a,b,c,d。使下面四个等式同时成立

$$abcd-a=1987 \tag{1}$$

$$abcd-b=1989 \tag{2}$$

$$abcd-c=1991 \tag{3}$$

$$abcd-d=1993。 \tag{4}$$

分析：由于(1)－(4)式右边均为奇数，左边是差的形式，那么左边两项的奇偶性一定不同。

这样，a,b,c,d 四个数均不能为偶数，否则不妨设 a 为偶数，显然(1)式左边 $=a(bcd-1)=$ 偶数$\neq1987$，故产生矛盾。同理 b,c,d 也一样。

从而 a,b,c,d 必均为奇数，显然 $abcd$ 也为奇数，故(1)—(4)式左边为两个奇数之差，即为偶数，因此(1)—(4)式也不可能成立。

所以不存在自然数 a,b,c,d 能同时使(1)—(4)式都成立。

例11 先写好三个数，然后按下面的规则进行：擦去一个数，换上未擦去两个数的和减去1后所得的数（仍保持三个数），试问：如果先写出的三个数是19,1949,1991．按上述规则进行，有没有可能使所得出的三个数

(1) 是2,4,6。

(2) 是1,13,17。

分析：要想一次一次试下去，看最后能否得出2,4,6,

自然太复杂。但是，我们还是要先试验一两次，以期从中能总结出某些规律，对问题的解答能有所启发。

例如先考查擦去 1991 换上 $19+1949-1=1967$，这样就剩下 19，1949，1967。

再擦去 1967 换上 $19+1949-1=1967$，将不会使三个数变化了。于是改为擦去 1949 换上 $19+1967-1=1985$。这样就剩下 19，1967，1985。

应注意：由于给出的三个数全是奇数，当擦去一个奇数后，换上的是另二奇数之和减去 1，仍是奇数，这就使得不论擦去三个奇数之中的哪一个，换上的仍是奇数，因此，最后换为 2，4，6 这三个偶数是不可能的。

对于 1，13，17 这三个奇数，是否可能呢？为减小数字总想将较大数字设法擦去，如擦去 1991 则变为 19，1949，1967。如再擦去 1967 不会有所变化.若擦去 1949，则变为 19，1985，1967。不能再擦去 1985(否则不会有变化)。若擦去 1967，则数字反而增大。若擦去 19，增大得更多。因此，不可能使所给出的三个数逐渐减少到 1，13，17。

思考：若将原题改为：按规则进行若干次剩下的三个数为 19，1993，1991，试问原来的三个数是否可能是

(1) 2，4，6。

(2) 1，13，17 呢？

例 12 如果两人互相握手，则每人都记握手一次。求证：握手是奇数次的人的总数一定是偶数。

证明：无论多少人握手，握手次数总和一定是偶数次的人的握手次数总和一定是偶数，因此握手是奇数次的人的握手总和也一定是偶数。

把握手次数是奇数的人分为两类：

一类是偶数个人握相同奇数次，如6人握3次等，其总和是偶数，记为偶(总)；

一类是奇数个人握相同奇数次，如5人握5次等，其总和记为奇(总)。

由于握手奇数次的人的握手次数总和是偶数，且

$$总和 = 偶(总) + 奇(总)；$$

即有

$$偶数 = 偶数 + 奇(总)。$$

因此，奇(总)应为偶数。只有偶数个奇数的和才等于偶数，所以奇(总)应有偶数项。这就是说握相同奇数次的奇数个人应有偶数组，从而它的人数总和是偶数。

由于两类的人数都是偶数，因此握手次数是奇数次的人数总和一定是偶数。

例13 线段 AB 的两个端点，一个着红色，一个着白色。在线段中间随意选出 n 个点，并随便着红色或白色. 在 n 个点将线段 AB 分成的 $n+1$ 条线段中，把两端不同色的线段叫做不同色线段。证明：不同色线段的条数是奇数。

分析：由于所选点的数目 n 是任意的自然数。为了简单起见先从 $n=1$ 入手；这时不论这点着红色或白色，总有一条不同色线段. 这说明在不同色线段中加入一点后，不同色线段不增加，仍为一条。

如果在同色线段中加入一点后，同色线段或增加一条或减少一条，这决定于加入的点与同色线段两端点的颜色不同还是相同；不同色线段或不增加或增加两条（所加入点与两

端同色不增，不同色增两条）。

综上知，每加入一点，不同色线段或不增加或增加两条，即与原来的奇偶性相同，那么加入 n 个点之后，不同色线段或不增加或增加了偶数条，因开始时只有一条不同色线段，故加入 n 个点后，不同色线段一定是奇数条。

例 14　在中国象棋盘的任何一个位置上有一颗棋子（马），按中国象棋的走法，当棋盘上没有其他棋子时，这只马跳了若干步后回到原处，问马所跳的步数是奇数还是偶数？

分析：从最简单的着手，如马跳出一步后就跳回，所跳步数当然是偶数，当马跳出若干步后再原样跳回原处所跳步数仍然是偶数。但是跳出后不按原样跳回原处所跳步数一定是偶数吗？

由于象棋盘上马的跳法种类很多，难以对各种情况逐个试验，只能尽可能一般地进行研究。

中国象棋中马走日字，如果将棋盘上的各点按黑白二色间隔着色，可以看出，马走任何一步都是从黑色点到白色点，或从白色点到黑色点，因此，马要从黑色点跳到另一黑色点，必定要跳偶数步，即要从黑到白再从白到黑，要从白色点到白色点也一定要跳偶数步。

因此，不论开始时马处于棋盘上的哪一个位置，而且不管马怎样在棋盘上跳动多少次，只要跳回原处，那么马就是从一种颜色的点跳到同一种颜色的点（开始点与结束点为同一点，当然同色），所以所跳步数必为偶数。

最后，我们举例来介绍赋值“01”来解题的方法。

例 15　七只茶杯，杯口向上，每次将其中四只同时翻转，

称为一次运动，能否经若干次运动，使茶杯杯口全部翻下？

解：不能。若将朝上的杯子对应为+1，朝下的杯子对应为-1，则未翻以前全部朝上，对应之数的乘积为$1^7=1$.

每次运动，都将其中的4个元素乘以-1，而$(-1)^4=1$，由此可知：不论运动几次，7个元素的积均为+1.

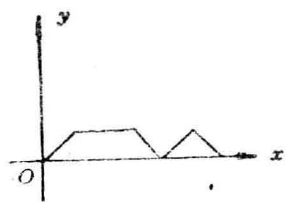
但若杯口全部朝下，其积应为$(-1)^7=-1$，所以不可能使茶杯杯口全部朝下。

例16. 一条长为n的线段分成n段，两端端点染蓝色，其余分点染成红色或蓝色。求证：端点被染上两种颜色的小线段有偶数条。

证明：将线段中的$n+1$个端点对应于坐标系中$n+1$个点。

横坐标分别为$1,2,\cdots,n+1$；纵坐标当该点为红点时是1，该点为蓝点时是0。

将这些点依次连接起来得到一条折线。由于原线段起终点都是蓝点，因此折线的起点和终点都在x轴上。



端点异色的小线段在坐标系中变为连结x轴和$y=1$上的两点的线段（即折线中的斜线段）。

从(0,0)出发沿折线前进，遇到一条上去的线段就一定还要经过另一条下来的线段，因为终点在x轴上。

因此，相邻端点异色的小线段有偶数个。