高等数学

（上 册）

朱　雯　张朝伦
刘鹏惠　陈利娅　编

科学出版社
www.sciencep.com

高 等 数 学

（上册）

朱 雯 张朝伦
刘鹏惠 陈利娅 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

“高等数学”课程是高等院校数学教育中一门重要的公共基础课.通过该课程的教学,一方面为学生后续的数学课程和专业课程提供必要的数学基础知识,另一方面进一步提高了学生的数学素质,为学生进一步深造做好必要的准备.本书分为上、下两册,上册包括:函数、极限、连续,导数及其应用,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程.

本书可作为高等院校理工科相关专业的教材,也可供相关人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/朱雯等编.—北京:科学出版社,2010
ISBN 978-7-03-028230-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 128442 号

责任编辑:王 静 窦京涛 / 责任校对:邹慧卿
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2010 年 7 月第一次印刷 印张:31
印数:1—4 500 字数:620 000

定价:49.00 元(上、下册)

前　言

高等数学是高等院校理工科专业的一门重要的公共基础课,它对学生综合素质的培养起着极其重要的作用,也为后继课程提供了大量的理论依据.随着科学技术的迅速发展,数学正日益渗透到各行各业中,已成为人们学习和研究专业知识的工具.同时高等数学也是工科院校硕士研究生入学考试的必考科目,因此高等数学的学习不仅关系到学生在整个大学以至于研究生期间的学习水平,而且还关系到对学生科学思想方法和分析解决问题的能力以及他们的文化素质的培养.

本书以高等教育本科高等数学课程教学基本要求为标准,以提高学生的数学素质与创新能力为目的,充分吸收了编者们多年来的教学实践经验与教学改革成果编写而成.本书分上、下两册,共11章内容,每节后配有练习题,每章后配有总习题,书末有习题答案.本书在编写中注重基本理论和基本知识的介绍,注重强调数学的方法和技巧,叙述详略得当,通俗易懂,例题典型,习题丰富,可作为高等院校理工类各专业的本科教材,也可作为其他有关专业的教材或教学参考书.

本书第1章由朱雯编写,第2、3章由张朝伦编写,第4、6章由刘鹏惠编写,第5章由陈利娅编写,第7章由李红娥编写,第8章由李㩳编写,第9、10章由周斌编写,第11章由罗大文编写.全书由朱雯教授、张朝伦副教授、李㩳副教授、罗大文副教授统审.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家、读者批评指正.

编　者

2010年5月

目　　录

前言

第 1 章　函数　极限　连续 …… 1

1.1　预备知识 …… 1

1.1.1　常用数学符号及初等公式 …… 1

1.1.2　集合 …… 2

1.1.3　区间、邻域 …… 3

习题 1-1 …… 4

1.2　映射与函数 …… 4

1.2.1　函数的概念 …… 4

1.2.2　函数的几种特性 …… 7

1.2.3　函数的运算 …… 9

1.2.4　初等函数 …… 11

1.2.5　双曲函数 …… 15

习题 1-2 …… 17

1.3　极限的概念 …… 17

1.3.1　数列 …… 18

1.3.2　数列的极限 …… 19

1.3.3　函数的极限 …… 22

习题 1-3 …… 27

1.4　无穷大与无穷小 …… 27

1.4.1　无穷小 …… 28

1.4.2　无穷大 …… 29

习题 1-4 …… 31

1.5　极限性质和运算法则 …… 31

1.5.1　极限的性质 …… 31

1.5.2　函数极限与数列极限的关系 …… 34

1.5.3　极限的四则运算法则 …… 34

1.5.4　极限的复合运算法则 …… 37

习题 1-5 …… 38
1.6 极限存在准则及两个重要极限…… 38
1.6.1 极限存在准则Ⅰ与第一重要极限 …… 38
1.6.2 极限存在准则Ⅱ与第二重要极限 …… 41
习题 1-6 …… 45
1.7 无穷小的比较…… 45
1.7.1 无穷小的阶 …… 46
1.7.2 等价无穷小替代定理 …… 47
习题 1-7 …… 49
1.8 函数的连续性…… 49
1.8.1 函数的连续性 …… 49
1.8.2 函数的间断点 …… 51
1.8.3 连续函数的运算 …… 53
1.8.4 初等函数的连续性 …… 55
1.8.5 闭区间上连续函数的性质…… 55
习题 1-8 …… 58
总习题一 …… 58
第 2 章 导数及其应用 …… 60
2.1 导数的概念…… 60
2.1.1 引例 …… 60
2.1.2 导数的定义 …… 61
2.1.3 求导举例…… 64
2.1.4 函数的可导性与连续性之间的关系 …… 66
习题 2-1 …… 68
2.2 求导法则…… 69
2.2.1 导数的四则运算 …… 69
2.2.2 反函数的求导法则 …… 71
2.2.3 复合函数的求导法则 …… 72
2.2.4 基本求导法则与基本初等函数的导数公式…… 74
习题 2-2 …… 75
2.3 高阶导数…… 75
习题 2-3 …… 78
2.4 隐函数和由参数方程确定的函数导数 相关变化率…… 78

2.4.1　隐函数的导数 …… 78

2.4.2　由参数方程确定的函数的导数 …… 80

2.4.3　相关变化率 …… 81

习题 2-4 …… 82

2.5　函数的微分 …… 83

2.5.1　微分的定义 …… 83

2.5.2　微分的几何意义 …… 86

2.5.3　微分的基本公式与法则 …… 86

2.5.4　微分在近似计算中的应用 …… 88

习题 2-5 …… 89

总习题二 …… 90

第 3 章　中值定理与导数的应用 …… 92

3.1　中值定理 …… 92

3.1.1　罗尔(Rolle)定理 …… 92

3.1.2　拉格朗日(Lagrange)中值定理 …… 94

3.1.3　柯西(Cauchy)中值定理 …… 97

习题 3-1 …… 98

3.2　洛必达法则 …… 98

3.2.1　$\frac{0}{0}$型未定式 …… 99

3.2.2　$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 101

3.2.3　其他未定式 …… 102

习题 3-2 …… 104

3.3　泰勒公式 …… 104

习题 3-3 …… 109

3.4　函数的单调性与极值 …… 110

3.4.1　函数的单调性 …… 110

3.4.2　函数的极值 …… 112

习题 3-4 …… 115

3.5　函数曲线的凹凸性与函数图形的描绘 …… 116

3.5.1　曲线的凹凸性与拐点 …… 116

3.5.2　函数图形的描绘 …… 120

习题 3-5 …… 121

3.6　函数的最大值与最小值 …… 122
习题 3-6 …… 124
总习题三 …… 125
第 4 章　不定积分 …… 127
4.1　不定积分的概念和性质 …… 127
4.1.1　原函数与不定积分的概念 …… 127
4.1.2　不定积分的性质 …… 130
4.1.3　基本积分公式 …… 130
习题 4-1 …… 133
4.2　换元积分法 …… 134
4.2.1　第一类换元积分法 …… 134
4.2.2　第二类换元积分法 …… 139
习题 4-2 …… 143
4.3　分部积分法 …… 145
4.3.1　分部积分公式 …… 145
4.3.2　分部积分公式应用举例 …… 146
习题 4-3 …… 149
4.4　几种特殊类型函数的积分 …… 150
4.4.1　有理函数的积分 …… 150
4.4.2　三角函数有理式的积分 …… 154
4.4.3　简单无理函数的积分 …… 155
习题 4-4 …… 156
总习题四 …… 156
第 5 章　定积分及其应用 …… 158
5.1　定积分的概念及性质 …… 158
5.1.1　引例 …… 158
5.1.2　定积分的概念 …… 161
5.1.3　定积分的性质 …… 163
习题 5-1 …… 167
5.2　微积分基本公式 …… 168
5.2.1　变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系 …… 168
5.2.2　积分上限函数及其导数 …… 168
5.2.3　牛顿-莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式 …… 172

习题 5-2 …… 174
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 175
5.3.1 定积分的换元积分法 …… 176
5.3.2 定积分的分部积分法 …… 181
习题 5-3 …… 183
5.4 反常积分 …… 184
5.4.1 无穷限的反常积分 …… 185
5.4.2 无界函数的反常积分 …… 187
习题 5-4 …… 190
5.5 定积分的几何应用 …… 190
5.5.1 定积分的元素法 …… 190
5.5.2 平面图形的面积 …… 192
5.5.3 体积 …… 198
5.5.4 平面曲线的弧长 …… 202
习题 5-5 …… 205
5.6 定积分的物理应用 …… 206
5.6.1 变力沿直线所作的功 …… 206
5.6.2 水压力 …… 207
5.6.3 引力 …… 208
习题 5-6 …… 209
总习题五 …… 210
第 6 章 微分方程 …… 212
6.1 微分方程的基本概念 …… 212
6.1.1 微分方程 …… 212
6.1.2 微分方程的解 …… 214
习题 6-1 …… 215
6.2 可分离变量的微分方程与齐次方程 …… 216
6.2.1 可分离变量的微分方程 …… 216
6.2.2 齐次方程 …… 218
习题 6-2 …… 220
6.3 一阶线性微分方程与伯努利方程 …… 221
6.3.1 一阶线性微分方程 …… 221
6.3.2 伯努利方程 …… 225

习题 6-3 …… 226
6.4 可降阶的高阶微分方程 …… 227
6.4.1 $y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 227
6.4.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 228
6.4.3 $y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 230
习题 6-4 …… 231
6.5 二阶常系数线性微分方程 …… 231
6.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程的解法 …… 232
6.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 …… 235
习题 6-5 …… 241
总习题六 …… 241
部分习题答案与提示 …… 243

第 1 章　函数　极限　连续

初等数学主要研究常量，但也较浅研究了变量，也就是函数. 而深入研究函数的关系，则是高等数学的主要任务. 极限理论是微积分学的基础，极限的方法则是研究函数的基本方法，它是研究函数性质的有力工具. 在这一章里我们先复习中学数学所学的集合、映射、函数等概念，然后主要介绍极限、函数的连续等问题.

1.1 预备知识

1.1.1 常用数学符号及初等公式

1. 常用数学符号

(1) “$\exists$”表示“存在”；

(2) “$\exists|$”表示“存在唯一”；

(3) “$\in$”表示“属于”；

(4) “$\notin$”表示“不属于”；

(5) “$A\Rightarrow B$”表示“如果命题 A 成立，则命题 B 成立”，或“命题 A 是命题 B 的充分条件”；

(6) “$A\Leftarrow B$”表示“如果命题 B 成立，则命题 A 成立”，或“命题 A 是命题 B 的必要条件”；

(7) “$A\Leftrightarrow B$”表示“命题 A 是命题 B 的充要条件”，或“命题 A 与命题 B 等价”；

(8) “$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$”表示“自然数集”；

(9) “$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$”表示“整数集”；

(10) “$\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p,q \text{ 为互素的整数}, q\neq 0\right\}$”表示“有理数集”；

(11) “$\mathbf{R}=\{x\mid x \text{ 为实数}\}$”表示“实数集”；

(12) “$\mathbf{R}^+=\{x\mid x\in\mathbf{R}, x>0\}$”表示“正实数集”；

(13) “max”表示“最大”；“min”表示“最小”.

2. 常用初等公式

(1) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(4) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

(5) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$, n 为奇数.

1.1.2 集合

集合是数学的基础,这一节在中学数学的基础上,对集合概念进行总结.

1. 集合的概念

集合是近代数学最基本的概念之一,在初等数学中我们学习过集合的概念. 我们通常把具有某种属性的事物的全体称做集合. 如某校高二年级的全体女生构成一个集合. 集合通常用大写字母 $A,B,\cdots$表示. 组成集合的个体叫作这个集合的元素,常用小写字母 $a,b,\cdots$来表示. 如果 a 是集合 A 的元素,通常记为 $a\in A$. 如果 a 不是集合 A 的元素,通常记为 $a\notin A$.

集合的表示法通常有两种,一种是列举法,一种是描述法. 所谓列举法就是把集合中的元素列出来,并用花括号括起来. 如 $A=\{3,6,9,12,\cdots\}$;而把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法称为描述法. 一般可记为 $A=\{x|P\}$,这里的 x 是元素的一般形式,而 P 表示集合中的每个 x 具有的属性. 如 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$表示满足方程 $x^2-2x-3=0$ 的根 x 的集合. 而 $B=\{(x,y)|y=2x\}$表示直线 $y=2x$ 上的全体点所成的集合. 不含元素的集体称为空集,用 ϕ 表示.

2. 子集、两集合相等

设 A,B 是两个集合,若 $\forall a\in A$,有 $a\in B$,则称集合 A 是集合 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读成 A 包含于 B,或 B 包含 A. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$,即集合 A 与集合 B 有完全相同的元素. 如果 $A\subseteq B$,但 $A\neq B$,则称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subset B$.

规定空集是任何集合的子集.

3. 集合的运算

集合的运算有以下几种:并集、交集、差集、直积.

(1) 并集:设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作 A 并 B. 即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(2) 交集：设 A,B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B. 即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(3) 差集：设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 且不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，或 A/B，读作 A 减 B. 即 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 一般通常讨论的问题是在一个大的集合 I(I 通常称为全集)中进行，A 是 I 的子集，此时称 $I-A$ 为集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$.

(4) 直积(或笛卡儿积)：设 A,B 是任意两个集合，任取 $a\in A,b\in B$，则 a,b 组成了一对有序对(a,b)，把这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$. 即 $A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$.

例1　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,3,4\}$，求 $A\times A$，$A\times B$.

解

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},$$
$$A\times B=\{(1,0),(1,3),(1,4),(2,0),(2,3),(2,4)\}.$$

4. 集合的运算满足的运算律

设 A,B,C 是三个集合，则下列运算律成立：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.3　区间、邻域

1. 区间

介于某两个实数 a,b 之间的全体实数称为区间. 这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度. 区间分为有限区间和无限区间. 它们的记号和定义如下(设 $a<b$)：

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开半闭区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

无限区间　$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，　$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，　$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，

$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

2. 邻域

设 δ 是任一个正数，$a\in\mathbf{R}$，我们把开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点 a 的 δ 邻域，记作

$U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\},$$

其中,点 a 叫做这个邻域的中心,δ 叫做这个邻域的半径(图 1-1).

把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉后,称为点 a 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\text{(图 1-2)}.$$

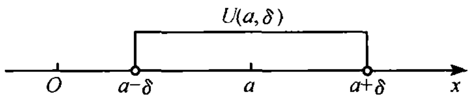

图 1-1

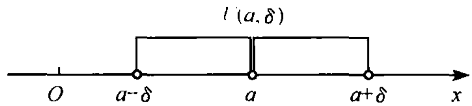

图 1-2

为了方便,称开区间 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的左 δ 邻域,称开区间 $(a,a+\delta)$ 为点 a 的右 δ 邻域.

习　题　1-1

1. 设 $A=\{x\mid \sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}$,$B=\{x\mid 0<x<2\}$,求 $A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$.
2. 设 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,3,4\}$,求 $A\times B$.
3. 设 A,B 是任意两个集合,证明 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

1.2　映射与函数

初等数学的研究对象通常是不变的量,而高等数学则是研究变量和变量之间的相互关系,我们把这种关系称为函数关系. 这一节将复习映射的概念,并在映射的基础上给出一元函数的概念,并讨论函数的几种特性.

1.2.1　函数的概念

1. 映射

定义 1　设 A,B 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得 $\forall x\in A$,根据法则 f,在 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称法则 f 为 A 到 B 的映射,记作

$$f:A\to B.$$

或

$$f:x\to y=f(x),\quad x\in A,$$

其中,元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像,元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像. 并把集合 A 称为映射 f 的定义域;A 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 $f(A)$. 即

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}.$$

2. 函数

定义2 设非空数集 $D\subseteq\mathbf{R}$,如果存在一个法则 f,使得 $\forall x\in D$,都有确定的实数 y 通过 f 与之对应,则称法则 f 是定义在 D 上的一个函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中,x 称为自变量,y 称为因变量. 自变量的取值范围 D 称为函数 f 的定义域. 所有函数值 $f(x)$ 构成的集合 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的值域,记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),\quad x\in D\}.$$

关于函数的概念,我们要注意以下几点:

(1) 在函数概念中涉及二个重要因素:定义域、对应法则. 因此,要判断两个函数是否相同,就要看这两个函数的定义域和值域是否相同,而与函数中的自变量与因变量所采用什么字母无关. 例如

$$y=2\ln x\quad 与\ y=\ln x^2.$$

是不相同的. 因为前者的定义域是 $(0,+\infty)$,后者的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
又如

$$y=x\quad 与\ y=\sqrt{x^2}.$$

虽然定义域相同,但对应法则不相同,所以这是两个不同的函数.

(2) 在定义中指出:$\forall x\in D$,都有确定的实数 y 通过 f 与之对应. 此时"确定的实数 y"有两种可能,一种是确定唯一;一种是确定多个,即不唯一. 如果 $\forall x\in D$,都有确定唯一的实数 y 通过 f 与之对应,这种函数我们称之为单值函数,否则叫多值函数. 例如,$y=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单值函数;而 $y^2=x$ 在 $[0,+\infty)$ 上是多值函数,即 $\forall x\in[0,+\infty)$,y 有两个值与之对应. 今后,如果没有特别说明,我们所指的函数均为单值函数.

例1 求函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 因为 $\ln\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域为 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{1-x}>0\ 且\ x\neq1\right\}$,所以 $A=\{x|x<1\}$.

又因为 $\sqrt{x+2}$ 的定义域为 $B=\{x|x+2\geqslant0\}$,所以 $B=\{x|x\geqslant-2\}$.

所以 $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为 $D=A\cap B=\{x|-2\leqslant x<1\}$.

3. 函数的表示法

表示函数的方法主要有三种:表格法、图形法、解析法(公式法). 将自变量的一系列值与对应的函数值列成表格,来表示变量之间的对应关系的方法称为表格法;在坐标系中用曲线表示函数的方法称为图形法;用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法称为解析法,又称公式法.

需要强调的是有的函数在其定义域上不是只用一个数学式子来表示的，而是在自变量的不同变化范围上用不同的数学式子来表示，这种函数称之为“分段函数”. 例如，乘飞机托运行李规定，托运行李的重量不超过 20kg 时不收费，每超过 1kg 收运费 0.1 元，则运费 n 就是行李重量 m 的函数，可表示为

$$n=\begin{cases}0, & 0\leqslant m\leqslant 20,\\ 0.1(m-20), & m>20.\end{cases}$$

下面我们再介绍几个重要的分段函数.

例 2 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,+\infty)$.

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其定义域为 **R**，值域是$\{-1,0,1\}$，如图 1-3 所示.

例 4 取整函数

$$y=f(x)=[x],$$

$[x]$表示不超过 x 的最大整数，即$\forall x\in\mathbf{R}$，令 $x=n+a$，其中 $n\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant a<1$，则$[x]=n$.

例如：$\left[\frac{3}{4}\right]=0$，$[\pi]=3$，$[\sqrt{2}]=1$，$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$，$[-\pi]=-4$.

容易看出，取整函数的定义域为 **R**，值域为 **Z**，如图 1-4 所示.

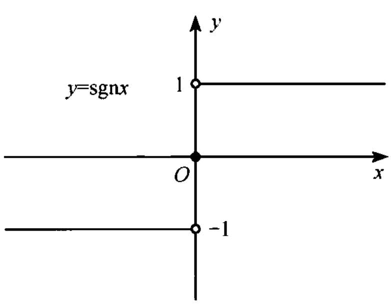

图 1-3

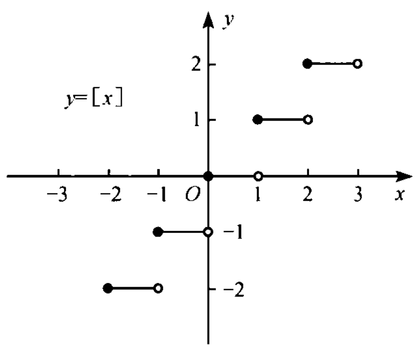

图 1-4

例 5 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

其定义域为 **R**，值域是$\{0,1\}$.

注意　分段函数虽然是由多个数学式子来表示的，但绝不能看成是多个函数.

1.2.2　函数的几种特性

1. 有界性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界，或称函数 $f(x)$ 是 I 上的有界函数. 否则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界，即如果对于任何正数 M（无论 M 有多大），总 $\exists x_0\in I$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

特别地，若有常数 M，使得 $\forall x\in I$，有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界. 若有常数 m 使得 $\forall x\in I$，有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界. 显然 $f(x)$ 在 I 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 I 上既有上界也有下界.

关于函数的有界性我们要注意以下三点：

(1) 有界函数所表示的曲线图形在几何上可以用两条平行线（平行于 x 轴）夹住（图 1-5）.

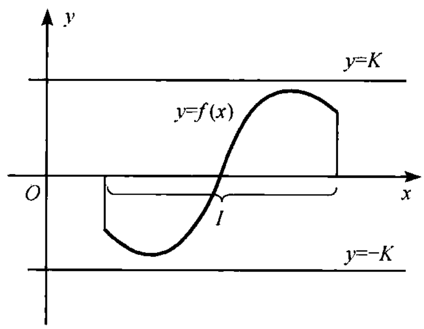

图 1-5

(2) 定义中要求 $\forall x\in I$，$\exists M>0$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 这里有 M 并不是唯一的，因为 $\forall K>M$ 时，均有 $|f(x)|\leqslant K$. 如函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\leqslant 1$，显然任何大于或等于 1 的常数都可以作为函数 $y=\sin x$ 的界.

(3) 函数 $f(x)$ 的有界性与所给区间有关，即 $f(x)$ 在定义域的某一子集上有界，但在另一子集上却无界. 如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上有界，因为 $\forall x\in(1,2)$，$\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$，所以 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 但在区间 $(0,1)$ 上无界，这是因为对于任何正数 M（无论 M 有多大，不妨设 $M>1$），必有 $x_0=\frac{1}{2M}\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}=2M>M$，所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界.

例 6　证明 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在定义域上无界.

证明　因为 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 的定义域 D 为不等于 0 的一切实数，$\forall M>0$，取 $K=[M]+1$，显然 $K>M$，取 $x_0=\dfrac{1}{K\pi+\frac{\pi}{2}}\in D$，则有