普通高等教育“十二五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIERWU GUIHUA JIAOCAI

弹性力学

李章政　编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIERWU GUIHUA JIAOCAI

弹性力学

李章政 编
张延庆 主审

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。全书共十章，分为理论和应用两部分。第一章～第六章为弹性力学的理论部分，涵盖基本概念、数学基础、应力分析、应变分析、本构关系和边值问题等方面的内容；第七章～第十章为利用弹性力学理论求解具体问题，属于应用部分，包括平面问题直角坐标解、平面问题极坐标解、空间问题案例解析和薄板弯曲问题。

本书可作为高等学校工科各专业弹性力学课程的教材，也可作为研究生教材，还可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学/李章政编. —北京：中国电力出版社，2010.12
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5123-1114-5

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①李… Ⅲ.①弹性力学—高等学校—教材
Ⅳ.①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 226830 号

中国电力出版社出版、发行
（北京市东城区北京站西街 19 号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）
航远印刷有限公司印刷
各地新华书店经售
*
2011 年 2 月第一版 2011 年 2 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米 16 开本 11 印张 262 千字
定价 **19.00** 元

前　言

弹性力学是高等学校土木工程、水利工程、机械工程、航空航天工程等工科类专业的一门重要的专业基础课，也是工程力学、应用力学等专业的入门专业课，它以数学、理论力学、材料力学为基础，理论严密、逻辑性强，具有较广泛的工程应用背景。

全书共十章，分为理论和应用两部分。第一章～第六章为弹性力学的理论部分，涵盖基本概念、数学基础、应力分析、应变分析、本构关系和边值问题等方面的内容。为了避免理论公式推演的复杂性，编者在书中首次直接利用张量进行理论推导，运算和公式形式都很简洁，符合现代科技文献行文的趋势。第七章～第十章为利用弹性力学理论求解具体问题，属于应用部分，包括平面问题直角坐标解、平面问题极坐标解、空间问题案例解析、薄板弯曲问题。这一部分内容可以根据学时的多少进行选择，学时少者可止于平面问题，学时多者可深入到空间问题。另外，本书对于常见的力学名词、短语，都附上了对应的英文注释，并且每章习题中选编了一至两道英文原文习题，期望为对原文资料感兴趣的读者带来帮助。

本书由四川大学李章政教授编写。

北京工业大学建工学院张延庆教授审阅了全部书稿，并提出了宝贵的修改意见，在此谨致衷心的谢意！

弹性力学既是经典学科，又在不断发展之中，然编者之学识和眼界都十分有限，书中难免疏漏和谬误，恳请读者批评指正。

编　者

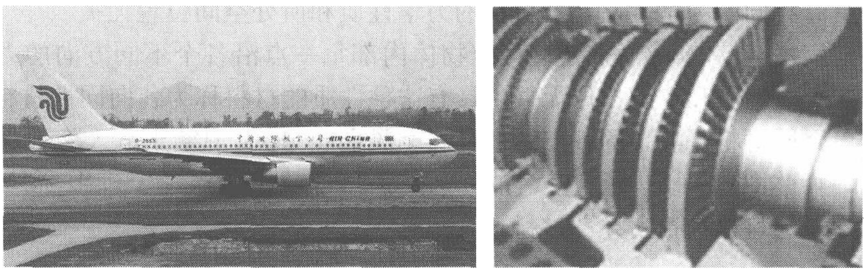
二零一零年冬于东盛园

目　录

第一章　基　本　概　念

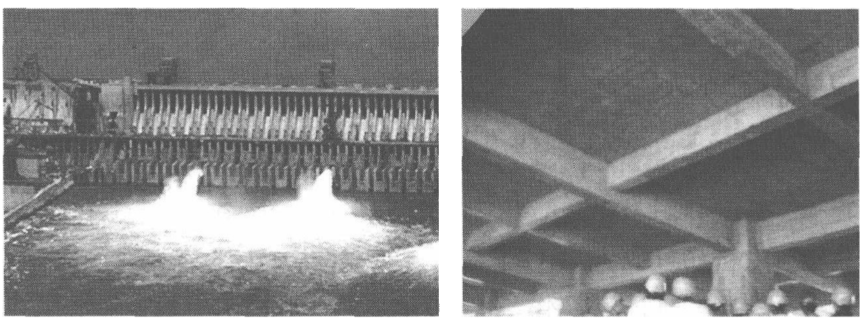
第一节　弹　性　力　学

工程结构由若干构件组成。组成结构的构件，如飞机的机头、机身、机尾、机翼［见图1-1（a)］，汽轮机的转子、叶片［见图1-1（b)］，发动机的曲柄、连杆，再如水利枢纽中的水坝［见图1-2（a)］，房屋结构中的楼板、梁、柱［见图1-2（b)］，尽管材料、尺寸、功能各不相同，但它们都属于**固体**（solid)，属于**连续介质**（continuum)。固体材料在**外荷载**（external load）作用下会产生变形，而且当外荷载消除后，该变形也会完全消失，物体可以恢复到原来状态，这类变形称为**弹性变形**（elastic deformation)。人们把具有弹性变形性能的固体称为弹性固体，简称**弹性体**（elastic body)。在一定受力范围内，工程结构中的各构件都可以看做是弹性体。



(a)　　　　(b)

图1-1　工程结构示例Ⅰ



(a)　　　　(b)

图1-2　工程结构示例Ⅱ

一、弹性力学

弹性体力学，通常简称为**弹性力学**（elasticity）或**弹性理论**（theory of elasticity)，它是固体力学的一个分支，主要研究弹性体在外力、温度变化或约束变动等作用下的弹性变形与应力状态。本书中仅讨论**理想弹性体**（perfect elastic body)，也就是**应力**（stress）与**应变**（strain）之间的关系为线性函数的情况。当外力不超过某一限度时，大多数固体材料都

具有这种属性。所以，本书中所指弹性力学又可以称为线性弹性力学，与之对应的还有非线性弹性力学。另外，本门课程只涉及静力平衡问题，加速度问题可参考弹性动力学。

弹性力学是材料力学课程的延续，其理论部分是固体力学各分支学科的基础，如计算力学、实验力学、塑性力学、断裂力学等。弹性力学本身又可以解决很多材料力学中无法解决的问题，并可对杆状构件进行精确分析，检验材料力学公式的适用范围和精度。同时，它还可以解决一些几何形状比较复杂的变形固体应力分析问题。

二、基本假定

为便于分析，从宏观角度上对实际材料和变形做如下几方面的假定。

1. 物理假定

假定物体为理想弹性体，即物体具有连续性、均匀性、各向同性和完全弹性四个方面的物理性能。

(1) **连续性**（continuity）假定。假定固体材料各质点之间不存在空隙，完全充满所占据的整个空间，一切物理量都是空间位置（x，y，z）的连续函数。

(2) **均匀性**（homogeneity）假定。假定整个物体是由同一种材料组成的，分布均匀，内部各部分具有相同的力学性质，即材料的力学性质和所处空间位置无关。

(3) **各向同性**（isotropy）假定。假定物体内部每一点沿各个不同方向的力学性质都相同，即材料的力学性质和空间方位无关。具有这种性质的材料称为各向同性材料，否则为各向异性材料。金属材料是典型的各向同性材料（见图 1-3），混凝土、天然石材可以视为各向同性材料；而木材（见图 1-4）、竹材则属于各向异性材料，工程上所使用的复合材料——纤维增强塑料也是各向异性材料。

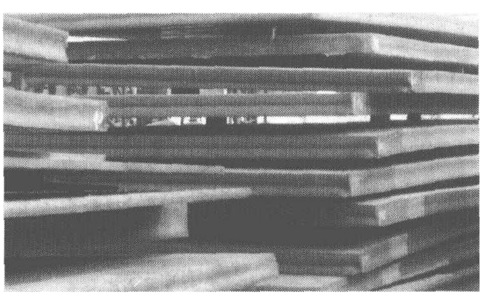


图 1-3　典型的各向同性材料——金属材料

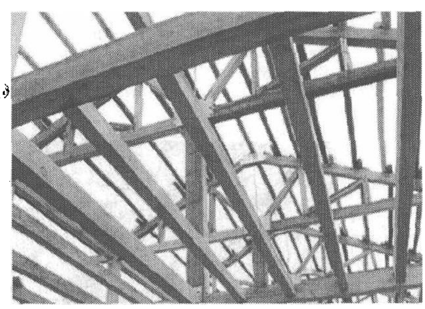


图 1-4　各向异性材料的代表——木材

(4) **完全弹性**（perfect elasticity）假定。假定外荷载消除后变形能够完全消失，物体可以回到原始状态。塑性材料的物体，在应力未达到屈服极限之前，是近似的完全弹性体；脆性材料的物体，在应力未超过比例极限之前，也是近似的完全弹性体。

本书以胡克定律为基础，应力在比例极限以内，应力和应变之间满足线性关系，这种线性称为物理线性。

2. 几何假定

几何上假定物体产生的位移和变形是微小的，即物体的变形量和位移值与原始尺寸相比属于高阶小量，应变分量和转角远小于 1。在分析物体变形后的平衡状态时，可以用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸；在讨论位移与应变的关系时，转角和应变的二次幂、高次幂或乘积项可以作为无穷小量略去，成为线性方程，这种线性称为几何线性。

在上述假定下（物理线性、几何线性），弹性力学问题都可化为线性问题，求解具体问题时可以利用**叠加原理**（superposition principle）。应力—应变的非线性会导致物理非线性，大位移、大变形会导致几何非线性，均不在本课程讨论之列。

3. *自由状态假定*

假定在外荷载与温度变化等作用之前，物体处于自由状态，即无初始应力存在。弹性体内部的应力仅由外荷载或温度变化等原因引起，不考虑初始的残余应力（如焊接结构中的焊接应力）。

三、研究方法

弹性力学在发展过程中不断吸纳新理论、新技术，形成了一门理论和应用都比较完善的学科，并产生了一些新的学科分支。弹性力学的研究方法归纳起来有数学方法、实验方法和数学与实验相结合的方法。

1. *数学方法*

弹性力学的数学研究方法是将其归结为数学上的边值问题，即求解满足边界条件的偏微分方程组，从而得到物体的**应力场**（stress field）、**应变场**（strain field）和**位移场**（displacement field）。

（1）解析解。求解偏微分方程组，可以得到物体内各点的应力、应变、位移的解析公式。如果严格满足边界条件，则解析公式是问题的精确解答；如果不严格满足边界条件，只满足静力等效边界条件，则所得计算公式是近似的，在边界附近误差较大，在远离边界处精确度较高。

基于能量原理的变分方法，是在求解能量极值的过程中得到弹性力学问题的解答，往往只能得到近似解析公式。

（2）数值解。数值解法只能得到在某一组荷载作用下（或某一工况）物体中某些点处的应力、应变和位移的数值结果，不能得到解析表达式。要提高数值结果的精确度，就必须加大计算量，这一工作通常由电脑来完成。

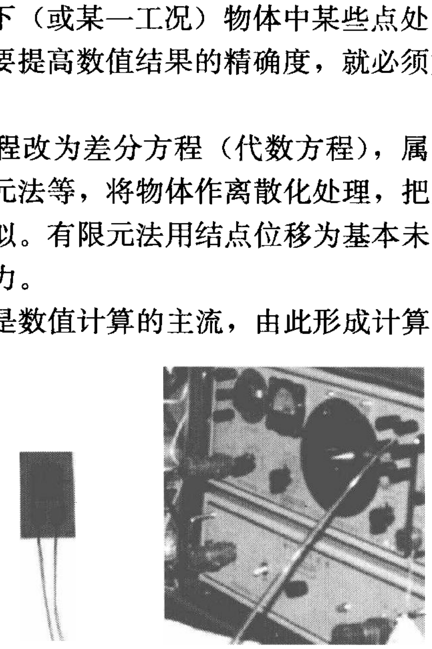
较早的数值计算方法是有限差分法，它是将微分方程改为差分方程（代数方程），属于数学上的近似。现代数值计算方法采用有限元法、边界元法等，将物体作离散化处理，把原本连续的物体划分为若干彼此相连的单元，属于物理近似。有限元法用结点位移为基本未知量，形成代数方程组，先求解位移，然后计算应变、应力。

有限差分法现在已较少采用，有限元法和边界元法是数值计算的主流，由此形成计算力学这一新的学科分支。

2. *实验方法*

弹性力学的实验研究方法是通过一定的技术和手段实际测定结构构件或模型的应力、应变分布规律的一种方法，作为力学的一个分支，又称为实验力学或实验应力分析。

电测非电量技术之电阻应变测量在实验方法中应用较普遍。电测法的主要设备是电阻应变片和电阻应变仪（见图 1 - 5），前者是将应变转化为电阻的改变，后者是通过惠斯登电桥将电阻的改变转化为



(a) (b)

图 1 - 5 应变片和应变仪

(a) 电阻应变片；(b) 电阻应变片仪

电压的变化，测到电压输出就等于测到应变。它可用于测量构件或模型表面的应变分布，具有很高的灵敏度和精确度。

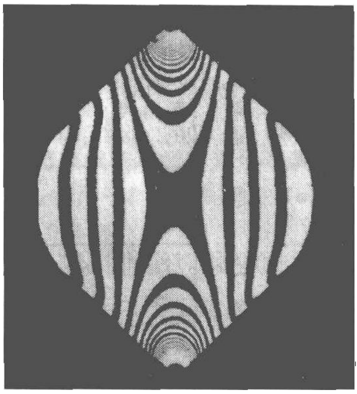


图 1-6 对角受压方块的等差线图

光弹性力学利用偏振光通过透明受力模型获得干涉条纹图——等倾线和等差线（见图 1-6）。根据等倾线图，可直接确定模型各点的主应力方向；根据等差线图，可以确定模型各点主应力差。如果要得到主应力数值，还需要借助弹性理论或其他实验方法。

实验测定应力、应变的方法还有云纹法、声测法等，将光纤用于实验测试的方法也在研究之中。

3. *数学与实验相结合的方法*

对于形状非常复杂的弹性结构，当边界条件难以确定时，可采用以实测边界应力分布作为数值计算的依据，这就是数学与实验相结合的方法。

本课程作为弹性力学的入门课程，主要介绍数学方法中的解析方法。

第二节 物 理 量 定 义

物理量的分量和坐标系有关，本书取直角坐标系 $oxyz$ 和 $ox_1x_2x_3$，前者用于具体问题的求解，后者多用于理论推演，见于现代力学文献。这里介绍弹性力学中主要物理量的定义和表示符号，这些物理量有外力、应力、应变和位移。

一、外力

作用于弹性体上的外力可以分为两类：**体积力**（body force）和**表面力**（surface force）。

1. *体积力*

作用于物体内体积上的分布力称为体积力，简称体力。体积力的集度，即单位体积上的体积力，用符号 $\boldsymbol{f}$ 表示，它是**矢量**（vector）。

如图 1-7 所示，P **点**（point）的体积力矢量 $\boldsymbol{f}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 f_x、f_y、f_z 或在坐标轴 x_1、x_2、x_3 上的投影 f_1、f_2、f_3，称为物体在 P 点的体积力分量。体积力分量以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负，基本单位是 N/m^3，常用单位 kN/m^3。

物体的自重和加速度引起的惯性力都是体积力。

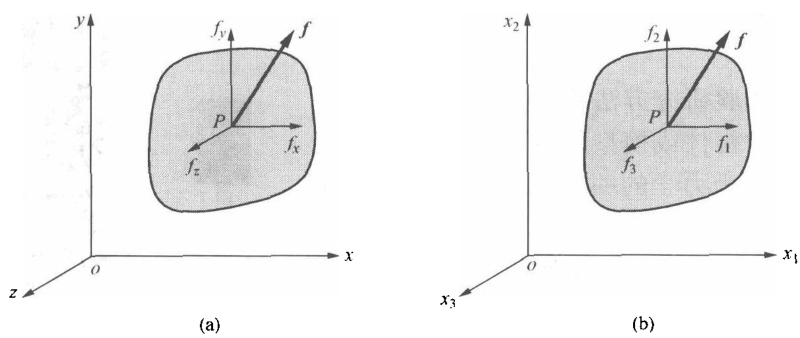


图 1-7 体积力及其分量

2. 表面力

作用于物体表面上的分布力称为表面力，简称面力。表面力的集度，即单位面积上的表面力，用符号 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 表示，它也是**矢量**。

某点的表面力矢量 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 $\bar{p}_x$、$\bar{p}_y$、$\bar{p}_z$ 或在坐标轴 x_1、x_2、x_3 上的投影 $\bar{p}_1$、$\bar{p}_2$、$\bar{p}_3$，称为物体在该点的表面力分量。表面力分量以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负，基本单位是 N/m^2，常用单位 kN/m^2。

物体表面上的风压力、水压力、雪压力等都是表面力，两物体表面之间的接触压力也属于表面力的范畴。

二、应力

在先修课程“材料力学”中，已有关于应力的概念，即内力的集度定义为应力，或单位面积上的内力就是应力。

1. 应力矢量

设物体内部某截面的微元面积 ΔA 上作用有内力 $\Delta \boldsymbol{F}$，如图 1-8（a）所示，则平均应力矢量定义为

$$\boldsymbol{t}_{均} = \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} \tag{1-1}$$

当面积 $\Delta A \to 0$ 时，微元面积收缩为一点，微小面积上的平均应力就成为点的应力。一点的应力矢量 $\boldsymbol{t}$ 定义为

$$\boldsymbol{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}A} \tag{1-2}$$

其中，$\mathrm{d}A$ 是代数量（确切地说是标量），所以应力矢量的方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向相同。

应力矢量 $\boldsymbol{t}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 X_n、Y_n、Z_n 或在坐标轴 x_1、x_2、x_3 上的投影 t_1、t_2、t_3［见图 1-8（b）］，称为应力矢量的坐标分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负，基本单位是 Pa(N/m^2)，常用单位 kPa(kN/m^2)、MPa(MN/m^2 或 N/mm^2)。

应力矢量 $\boldsymbol{t}$ 也可以在截面的法线和切线方向投影，如图 1-8（c）所示。其中在截面法线方向上的投影 σ_n 称为**法向应力或正应力**（normal stress），在截面内的投影 τ_n 称为**切向应力（切应力）或剪应力**（shear stress）。

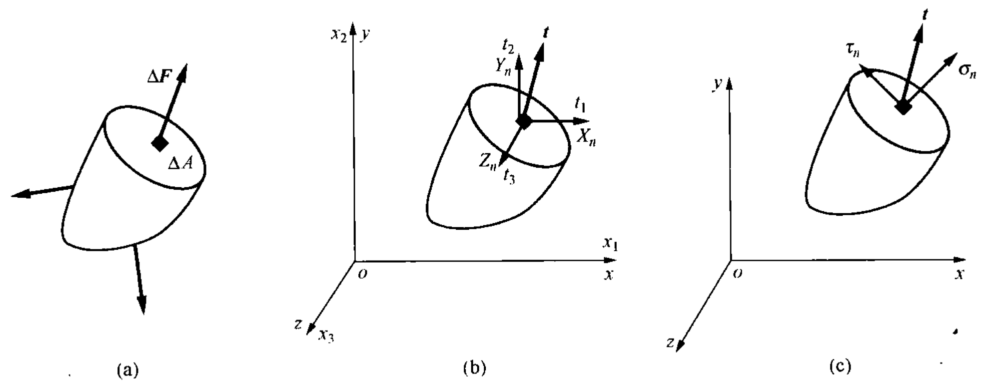


图 1-8 应力矢量和应力分量

2. 应力矩阵

（1）正六面体上的应力分量。考虑一个特殊的无限小正六面体，每个面的法线与坐标轴重合，其中外法线与坐标轴指向相同者称为正面，外法线与坐标轴指向相反者称为负面。所考虑的正六面体，存在三个正面和三个负面。约定正面上的应力分量以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负；负面上的应力分量以沿坐标轴的负方向为正，沿坐标轴的正方向为负。即应力分量正面以正向为正，负面以负向为正，如图 1 - 9 所示（左面为负面，右面为正面）。

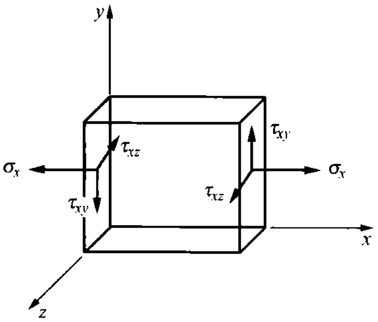


图 1 - 9　正值应力的指向

正六面体上三个正面上应力分量的正方向如图 1 - 10 所示。图 1 - 10（a）中，σ 表示正应力，下脚标表示应力的指向；τ 表示剪应力，第一个下脚标表示所在面的法线方位，第二个下脚标表示应力所指的方向。图 1 - 10（b）中，σ 表示应力分量，双下脚标，第一个下脚标表示所在面的法线方位，第二个下脚标表示应力所指的方向。脚标相同者为正应力，如 σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}；脚标不同者为剪正应力（切应力），如 σ_{12}、σ_{21}、σ_{23}、σ_{32}、σ_{13}、σ_{31}。

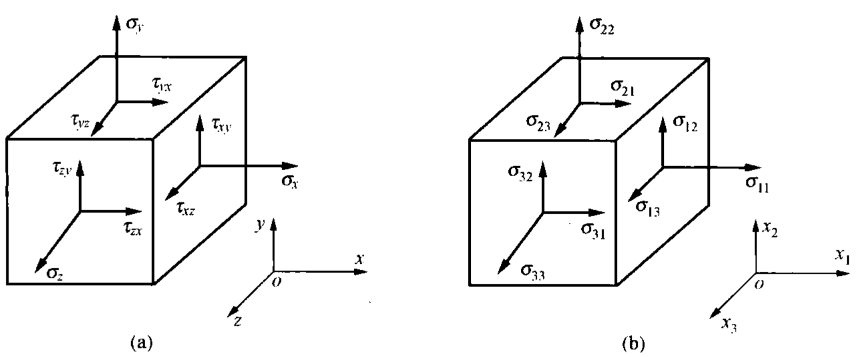


图 1 - 10　正六面体上的应力分量

（2）应力矩阵。以每个正面上应力矢量的三个分量为一行，共三行九个分量，可形成如下形式的 3×3 的**矩阵**（matrix）：

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

该矩阵称为应力矩阵。根据**剪应力互等定理**（theorem of conjugate shear stresses），上述应力矩阵是对称矩阵。

图 1 - 11 所示为二维应力分量，其应力矩阵由 3×3 阶降为 2×2 阶：

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

三、应变和位移

在外力或温度变化等作用下，弹性体内质点之间的距离会发生改变，物体的形状也会发生变化，通常定义应变和位移来描述这些几何上的变化。

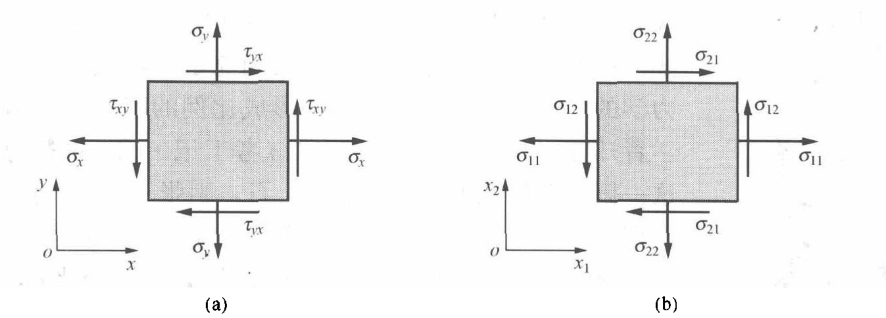


图 1-11 二维应力分量

1. 应变分量

长度方向的改变用**正应变**（normal strain）来描述，它定义为单位长度的伸长或缩短，以伸长为正、缩短为负。沿坐标轴 x、y、z 的正应变分别用 ε_x、ε_y、ε_z 表示，沿坐标轴 x_1、x_2、x_3 的正应变分别用 ε_{11}、ε_{22}、ε_{33} 表示。

角度的变化用**切应变或剪应变**（shear strain）来描述。工程剪应变定义为直角的变化，单位为弧度，以直角减小为正、直角增大为负。在 xy 平面、yz 平面、zx 平面内的工程剪应变分别用 γ_{xy}（或 γ_{yx}）、γ_{yz}（或 γ_{zy}）、γ_{zx}（或 γ_{xz}）来表示；对于 $ox_1x_2x_3$ 坐标系，相应的剪应变则用 γ_{12}（或 γ_{21}）、γ_{23}（或 γ_{32}）、γ_{13}（或 γ_{31}）表示。

将工程剪应变的一半定义为数学剪应变，在 $oxyz$ 坐标系中用 ε_{xy}、ε_{yz}、ε_{zx} 表示，在 $ox_1x_2x_3$ 坐标系中则用 ε_{12}、ε_{23}、ε_{31} 表示，且有

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy},\ \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\gamma_{yz},\ \varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\gamma_{zx} \tag{1-3}$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{12},\ \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\gamma_{23},\ \varepsilon_{31}=\frac{1}{2}\gamma_{31} \tag{1-4}$$

由三个正应变分量和三个数学剪应变分量按如下方式组成的矩阵

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}$$

称为应变矩阵。显然，应变矩阵是对称矩阵。

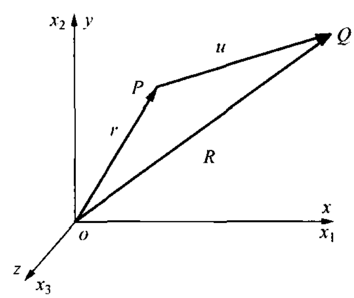


图 1-12 质点的位移

2. 位移分量

质点从 P 点移动到 Q 点，则发生了位移 $\boldsymbol{u}$，如图 1-12 所示。设 P 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，Q 点的位置矢量为 $\boldsymbol{R}$，则有

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r} \tag{1-5}$$

位移矢量在坐标轴 x、y、z 上的投影 u、v、w 或在 x_1、x_2、x_3 坐标轴上的投影 u_1、u_2、u_3 称为**位移分量**（displacement components），以沿坐标轴正方向移动为正，沿坐标轴负方向移动为负。

第三节 弹性力学发展简史

英国物理学家、天文学家罗伯特·胡克（Robert Hooke，1635～1703）于 1660 年通过

试验发现弹性体力和变形之间成比例的现象，1676 年他以字谜的形式发表，1678 年公布答案。据此建立的胡克定律及广义胡克定律，成为材料力学和弹性力学的理论基础。关于力和变形成比例的问题，中国东汉时期的学者郑玄（公元 127～200）在《考工记·弓人》❶ 的注中已提到这一概念，他认为弓“每加物一石，则张一尺”，可惜未引起后人的重视，也不为学界所认可。现在知道，各向同性体有两个独立的材料常数（弹性常数），即弹性模量 E 和泊松比 μ，这归功于杨氏和泊松。杨氏即英国医师和物理学家托马斯·杨（Thomas Young，1773～1829），他最早做出了弹性模量的定义（1807），故弹性模量又称杨氏模量，同时他还指出剪切变形同伸长缩短变形一样，也是一种弹性变形。1811 年，法国数学家、力学家泊松（Siméon Denis Poisson，1781～1840）发现同一材料横向应变和纵向应变之比为常数，该应变比称为泊松比。

图 1-13 科学家柯西

19 世纪 20 年代初，纳维（Navier）和泊松先后从分子结构或离散结构理论出发，建立了各向同性弹性固体的基本方程，只有一个弹性常数。法国数学家、力学家柯西（Augustin Louis Cauchy，1789～1857，见图 1-13）于 1828 年将离散分子模型改为连续统模型，引进了点的应力和应变的概念，建立了各向同性材料平衡和运动的基本方程，其中有两个弹性常数。关于弹性常数的个数问题，在当时曾引起广泛争论，最后由格林（Green）从弹性势和拉梅（Lamè）从两个常数的物理意义给出了正确结论：弹性常数应该是两个，而不是一个（一般弹性材料 21 个）。所以，有人认为近代弹性力学始于柯西。

弹性力学问题的具体求解以法国力学家圣维南（Barré de Saint-Venant，1797～1886，见图 1-14）为先驱，他于 1855 年最早求解了棱柱体的扭转问题，并给出了详尽的数值结果。圣维南还得到一些有价值的原则性结果，如指出局部平衡力系对大范围内的弹性效应是可以忽略的，这一结果经布辛奈斯克（Boussinesq）于 1855 年总结和推广，称为圣维南原理（Saint-Venant's Principle）。1885 年，布辛奈斯克用位移法求解弹性半空间表面上作用一个竖向集中力时，半空间内任意点处所引起的应力和位移，成为土力学中地基应力计算和沉降计算的基础。1862 年，艾里（Airy）引进应力函数，求解平面问题；1898 年，基尔斯（Kirsch）得到圆孔附近应力集中问题的解答；1899 年，米歇尔（Michell）给出了极坐标下平面问题的通解。普朗特（Prandtl，1875～1953）于 1903 年采用薄膜比拟方法，成功求解了薄壁杆件的扭转问题，其结果在材料力学中也有介绍。弹性力学问题的经典解答被收于牛津大学自然哲学教授乐甫（Augustus Edward Hough Love，1863～1940）所著两卷本《数学弹性理论》之中，该书被翻译成多种文字，是公认的经典巨著。

20 世纪初，为了寻求难于得出精确解的大量问题的近似解，里兹和伽辽金两人分别提出了基于能量原理（变分原理）的直接解法，即能量法中的里兹法和伽辽金法，开创了近似求解弹性力学问题的新途径。

---

❶ 《考工记》是先秦古籍中的重要科学技术著作，西汉时期便成为《周礼》的组成部分。作者不详。但据后人考证认为，它是春秋末期齐国人记录手工业技术的官方书籍。书中主要记述有关百工之事，分攻木之工、攻金之工、攻皮之工、设色之工、刮摩之工、抟埴之工六部分，分别对车舆、宫室、兵器以及礼乐诸器等的制作做了详细记载，是研究我国古代科学技术的重要文献。

薄板弯曲问题是弹性力学中的特殊问题，可以采用简化方法求解。基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff，1824～1887）和乐甫对薄板小挠度理论做出了主要贡献。1910 年，冯·卡门（Theodor Von Kármán，1881～1963）提出薄板大挠度问题，后与钱学森（1911～2009）合作，于 1941 年解出了圆柱薄壳结构在压力作用下的大挠度失稳问题，从而解释了之前理论计算与试验结果不符的现象。1940 年，J.L·辛格和钱伟长（1912～2010）应用张量分析建立了极为普遍的板壳理论，根据量级分析把板壳理论按近似程度分成几十种类型，这是迄今最为周详的分析；1947 年，钱伟长还提出了用摄动法解决薄板大挠度一类非线性方程的求解问题。

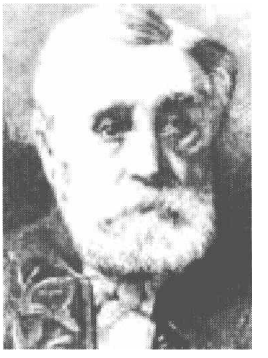


图 1-14 科学家圣维南

20 世纪五六十年代发展起来的数值计算方法——有限元法，给弹性力学注入了新的活力。1956 年首次应用有限元分析工程问题，1968 年将有限元用于应力问题的分析求解。随着大型、高速电子计算机的出现及应用，对各种复杂工程结构及构件进行弹性分析已不存在任何困难。

思 考 题

1-1 举例说明什么是各向同性体，什么是各向异性体。

1-2 弹性力学的研究方法有哪些？

1-3 完全弹性的含义是什么？

1-4 小变形、小位移的假定将在实际应用中起什么作用？

1-5 试举例说明何谓体积力和表面力，体积力分量、表面力分量的正负如何确定。

1-6 弹性力学中应力分量的正负符号规定与材料力学有何异同？

1-7 设应力分量的单位为 MPa，已知应力矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 80 & -50 & 70 \\ -50 & -100 & 30 \\ 70 & 30 & 60 \end{bmatrix}$$

试在正六面体单元上按真实指向画出各应力分量（见图1-15）。

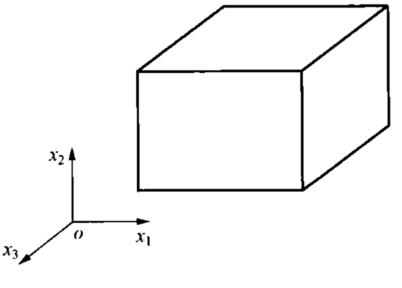


图 1-15 思考题 1-7 图

1-8 一点的应变和位移之间有什么联系和区别？应变分量和位移分量的正负符号如何确定？

1-9 简述弹性力学的发展过程。

第二章 数学基础

第一节 标量和矢量

一、标量和矢量的定义

标量（scalar）是只有大小的量，如物体的质量、能量等。标量在不同的坐标系中，其量值不变，如某物体的质量为 5kg，在空间直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中，都是 5kg，不会改变。

矢量（vector）是同时具有大小和方向的量，如力、位移、速度、加速度等。矢量是一个客观量，大小和方向虽然与坐标系无关，但矢量的**分量**（components）却与坐标系有关，不同坐标系下同一个矢量的分量是不相同的。

二、矢量的表示

几何上矢量 $\boldsymbol{A}$ 可用一个带箭头的线段表示（见图 2-1），线段的长度表示大小，箭头的指向表示方向。给定坐标系后，代数上矢量 $\boldsymbol{A}$ 有两种表示方法：一是由大小和方向确定分量，二是由分量确定矢量的大小和方向。

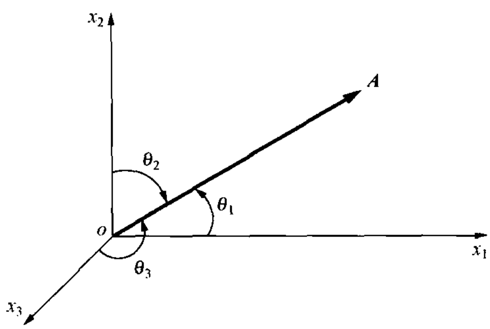


图 2-1 矢量的表示

1. 大小和方向确定矢量的分量

将矢量 $\boldsymbol{A}$ 置于直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中，起点位于坐标原点，如图 2-1 所示。矢量的大小用字母 A 表示，与三个坐标轴之间的夹角分别为 θ_1、θ_2 和 θ_3，称为**方向角**（direction angle）。根据投影关系，可得到矢量沿各坐标轴的分量为

$$A_1 = A\cos\theta_1,\ A_2 = A\cos\theta_2,\ A_3 = A\cos\theta_3$$

这三个分量 A_1、A_2 和 A_3，可以简记为 A_i，下脚标 i 称为**自由指标**（free index）。自由指标的取值，除非特别说明总是隐含为 1、2、3，这样的约定又称为**变程约定**（range convention）。据此，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量可由大小和方向表示为

$$A_i = A\cos\theta_i \tag{2-1}$$

2. 分量确定矢量的大小和方向

已知矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个坐标分量 A_i，则矢量的大小和方向可分别由式（2-2）和式（2-3）确定：

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{2-2}$$

$$\cos\theta_i = A_i/A \tag{2-3}$$

三、矢量的坐标变换

考虑坐标原点重合的直角坐标系 $ox_1x_2x_3$ 和 $ox'_1x'_2x'_3$，如图 2-2 所示。将 $ox'_1x'_2x'_3$ 称为新坐标系，$ox_1x_2x_3$ 称为旧坐标系。新旧坐标轴一般不重合，图 2-2 中示出了新坐标轴 x'_1 与旧坐标轴 x_1、x_2、x_3 之间的夹角。

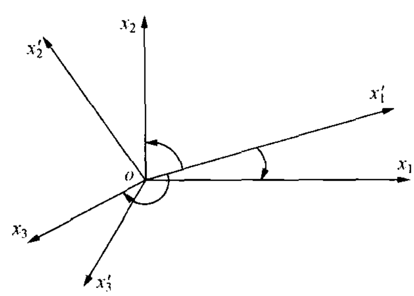


图 2-2 新旧坐标系的关系

用 a_{ij} 表示新坐标轴 x_i' 和旧坐标轴 x_j 之间夹角的余弦，即 $a_{ij}=\cos(x_i', x_j)$，9 个数值的具体含义见表 2 - 1。

由 a_{ij} 所构成的 3×3 阶矩阵 $\boldsymbol{a}$，又称为坐标变换矩阵：

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

表 2 - 1 **x_i' 轴和 x_j 轴之间夹角的余弦**

x_i' \ x_j	x_1	x_2	x_3
x_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

1. 坐标变换

所谓矢量的**坐标变换**（coordinate transformation）就是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在新坐标系中的分量 $A'_i(A'_1, A'_2, A'_3)$ 和旧坐标系中的分量 A_j（A_1，A_2，A_3）之间的数量关系。利用矢量投影定理，矢量 $\boldsymbol{A}$ 在某轴上的投影等于分量在同一轴上投影之和。采用新旧坐标分量同时对新坐标轴投影，就有

投影轴 x_1'：$A_1'=A_1\cos(x_1',x_1)+A_2\cos(x_1',x_2)+A_3\cos(x_1',x_3)$

投影轴 x_2'：$A_2'=A_1\cos(x_2',x_1)+A_2\cos(x_2',x_2)+A_3\cos(x_2',x_3)$

投影轴 x_3'：$A_3'=A_1\cos(x_3',x_1)+A_2\cos(x_3',x_2)+A_3\cos(x_3',x_3)$

代入已经定义的 a_{ij}，有

$$\left.\begin{aligned} A_1'&=a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{13}A_3 \\ A_2'&=a_{21}A_1+a_{22}A_2+a_{23}A_3 \\ A_3'&=a_{31}A_1+a_{32}A_2+a_{33}A_3 \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

利用变程约定，式（2 - 5）成为

$$A_i'=a_{i1}A_1+a_{i2}A_2+a_{i3}A_3=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_j \tag{2-6}$$

伟大的科学家爱因斯坦[1]最早在学术研究中使用**求和约定**（summation convention）：在一个乘积表达式中，若下脚标出现两次（或重复出现）就意味着对该指标从 1～3 求和。利用这样的求和约定，可省去求和符号Σ，使表达式更简洁。据此，式（2 - 6）可进一步简写为

$$A_i'=a_{ij}A_j \tag{2-7}$$

式（2 - 7）中重复下脚标 j，称为**哑指标**（dummy index）。一个表达式中若出现哑指标，就意味着求和，所以哑指标可以用任意符号代替，如 $A_i'=a_{ij}A_j=a_{ik}A_k=a_{ip}A_p$。

同理，可以得到由新坐标系的矢量分量表示旧坐标系的矢量分量：

$$A_i=a_{ji}A_j' \tag{2-8}$$

[1] 阿尔伯特·爱因斯坦（Albert Einstein，1879～1955），物理学家。生于德国，后迁居美国。1905 年建立狭义相对论，1916 年推广为广义相对论；提出了光的量子概念，用量子理论解释了光电效应。因理论物理学方面的贡献，特别是发现光电效应定律，于 1921 年获得诺贝尔物理学奖。