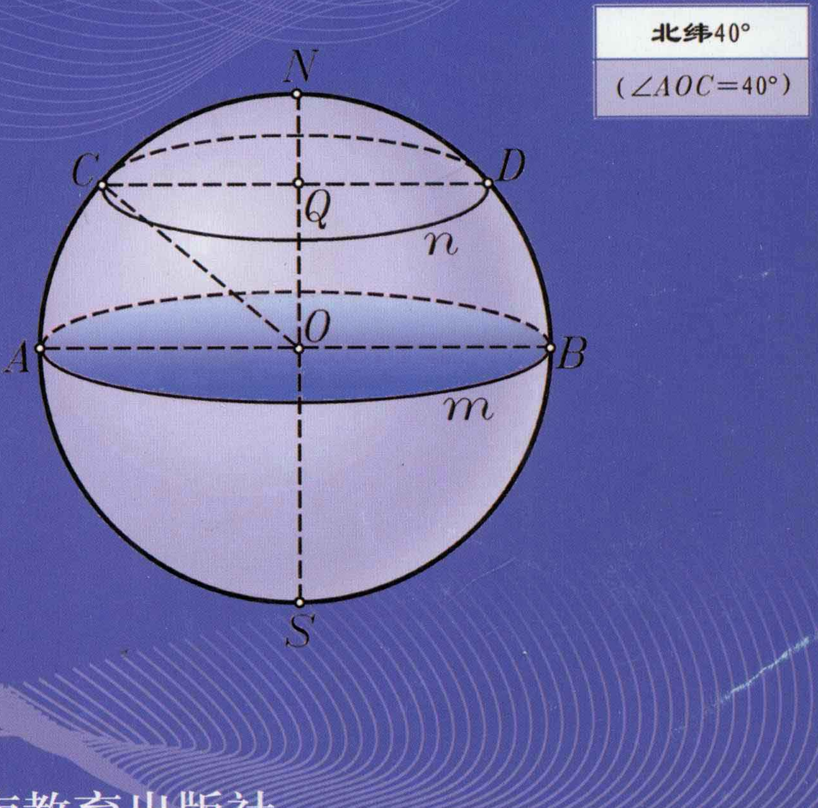
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准

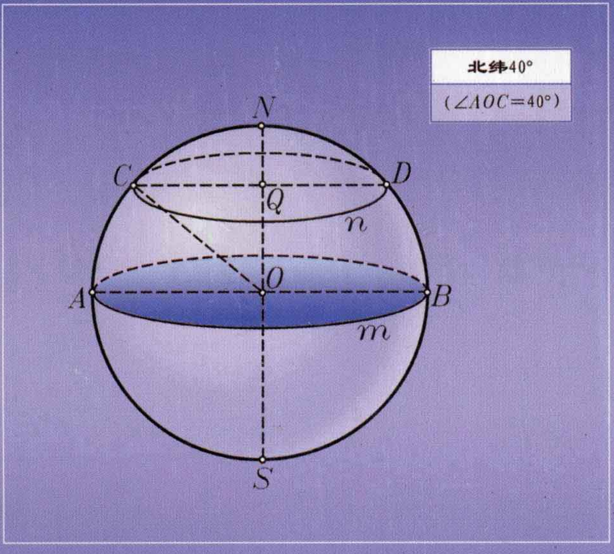
实验教科书

选修系列3－3

球面上的几何



湖南教育出版社



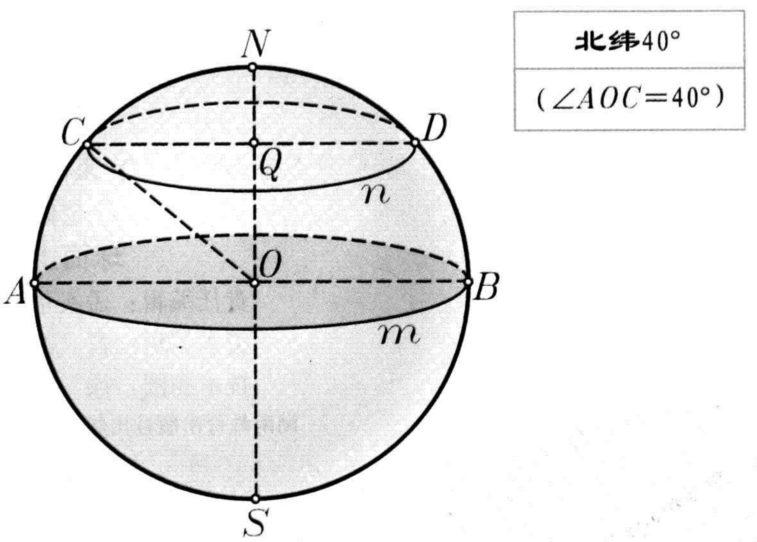
ISBN 7-5355-4611-0
9 787535 546111 >
G · 4606 定价:6.80元

普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 3–3

球面上的几何



主　　编　张景中　陈民众
执行主编　李尚志
本册主编　蒋　声
编　　委　郑志明　查建国　孟实华

普通高中课程标准实验教科书
选修 3—3
球面上的几何
责任编辑：孟实华　邹伟华　甘　哲
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：postmaster@hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)印刷
890×1240　16 开　印张：5.25　字数：130000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7—5355—4611—0/G·4606
定　价：6.80 元

熟悉的对象　特别的话题

航船西去到扶桑，纽约东归绕北洋.

三角形生三直角，有规有矩不成方.

球面是人人熟悉的图形.

球面上的几何是一个比较特别的话题，有许多与众不同之处.

球面上的几何是一个很有兴趣的话题. 因为我们生活在天地之间，脚踏地球，头顶天球. 在谈天说地中体会数学的价值，令人心旷神怡.

球面上的几何是一个富有启发的话题. 一路过去，随处可见闪耀智慧火花的窗口.

让我们赶紧开始这一段愉快的学习旅程吧. 祝你快乐，祝你成功!

作　者

2004 年 12 月

目 录

第1章

球面的基本性质

我们生活在地球上，脚下大地的形状并非无边无际的辽阔平面，而是大致接近于球面. 球面上的几何与平面几何相比，既有类似之处，又有显著不同.

如果把地面看成理想平面，向四面八方无限伸展，那么在地面上空一直向东飞行，将会一去不返，永无归期.

但是，我们生活在地球上，脚下大地的形状并非无边无际的辽阔平面，而是大致接近于球面，一个很大很大的球面（半径 $R=6\ 371\ \mathrm{km}$）. 在这球面上空飞行，一路向东不回头，只要燃料充足，就能环绕地球一圈，返回原地，终点与起点重合. 球面上的几何，与平面几何有明显差异.

当今世界，人们通过电视、报纸、电话、互联网，可以随时了解各地动态，耳闻目睹，犹如身临其境. 虽然远在天边，却似近在眼前. 要认识这球形的世界，自然需要球面上的几何.

从超市、商场或文化用品商店里，可以买到价廉物美的袖珍地球仪. 小小地球仪，是庞大地球的缩影，放在案头，美观而又实用. 看见地球仪，就像看见了整个地球，五大洋七大洲尽收眼底.

在这一章里，将要从地球仪开始，逐步引出球面上的一些基本几何事实.

1.1 赤道和两极

“赤道”是炎热的代名词，“南极”和“北极”是寒冷的象征.

“南极”和“北极”合称为两极. 仔细观察地球仪上的赤道和两极，可以看出哪些几何事实呢？

1. 赤道和大圆.

如图 1-1，地球仪可以绕着一条通过球心的轴线旋转. 球面与旋转轴的两个交点分别是北极和南极. 在球面上，围绕旋转轴，有一组大大小小互不相交的圆. 正当中那个最大的圆，就是赤道.

赤道所在的平面，通过地球中心.

在几何里，球面是空间中到一定点 O 有定长距离 R 的一切点组成的图形，点 O 叫作球心，定长 R 叫作球的半径. 以点 O 为球心的

图 1－1

球面，简称为球 O.

如图 1－2，球 O 被任一通过球心 O 的平面所截，得到的交线是一个圆，叫作球 O 的大圆（great circle）.

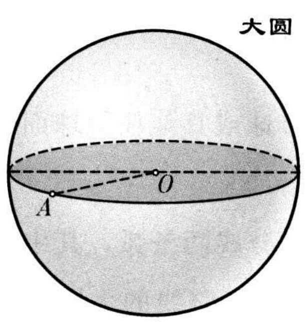


图 1－2

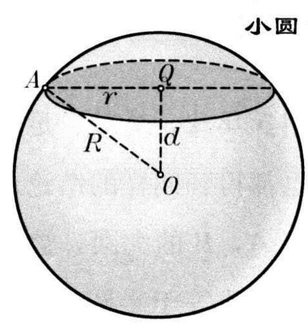


图 1－3

大圆的半径，等于球半径 R.

例如，赤道是地球的一个大圆.

又如，乒乓球是由两个半球面拼合而成的，在拼合处有一道明显的圆缝，这个圆就是乒乓球的大圆.

作为对照，如图 1－3，用不通过球心的平面去截球 O，得到的交线也是一个圆，叫作球 O 的小圆（small circle）. 从球心 O 向小圆所在的平面作垂线，记垂足为 Q，那么点 Q 是小圆的圆心. 设小圆半径为 r，并设球心到小圆平面的距离 $OQ=d$，则由勾股定理可得

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

由此可见，小圆的半径 r 总是小于球半径 R.

从实物联想几何图形. 善于联想，就会感到数学其实很亲切很随和，容易理解.

2. 大圆弧最短.

如图 1-4，取一段橡皮筋，用手指将其一端固定在地球仪赤道上任一定点如点 A，拉紧橡皮筋，并使其另一端也落在赤道上如点 B. 这时可以看到，这一段被拉紧的橡皮筋全部贴紧在赤道上.

拉紧的橡皮筋处于最短状态. 由此可见：

球面上连接两点 A，B 的最短路线是一条大圆弧.

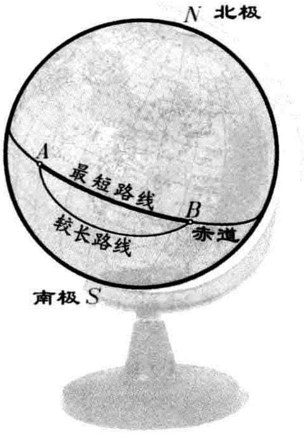


图 1-4

如果利用乒乓球、篮球、足球、排球或其他任何球面做拉紧橡皮筋的试验，也都得到同样的结论.

课外活动玩球，不妨带一根橡皮筋，顺便在球面上做最短线的试验.

通过两点 A，B 的大圆，被这两点分成两条弧，其中较短的一条称为劣弧（小于或等于半圆周）. 作为最短路线的大圆弧，当然是其中的劣弧.

因此，可以更确切地说：

球面上连接两点 A,B 的最短路线,是以 A,B 为端点的大圆劣弧.

简而言之：

在球面上，两点之间，大圆劣弧最短.

怎样从理论上严格证明“球面上两点之间大圆劣弧最短”，将在后面第 3 章中详细讨论.

熟知在平面内两点之间直线最短. 因而通过对比，可以看出：

球面上的大圆类似于平面上的直线.

3. 两极和对径点.

用字母 N 表示地球的北极，字母 S 表示南极. 北极 N 和南极 S 的连线是地球的一条直径.

一般地，在球 O 中，如果点 A 和 B 是同一条直径的两个端点，

就说 A 和 B 是一双对径点（diametrically opposite points）（B 是 A 的对径点，A 也是 B 的对径点）.

如果两点 A 和 C 不是对径点，则称 A，C 为两个非对径点.

例如，地球的北极 N 和南极 S 是一双对径点.

通过一双对径点 A 和 B 的平面必过球心 O. 因而，这个平面与球 O 相交得到的圆是大圆.

由此可见：

球面上通过一双对径点的圆必为大圆.

反过来，任一大圆所在的平面总是通过球心 O. 如果它还通过球面上一点 A，那么这个平面通过直线 AO，因而通过 A 的对径点 B.

这就意味着：

通过任一点 A 的大圆，必过 A 的对径点.

4. 大圆的确定.

球面上的几何叫作球面几何学，简称为球面几何（spherical geometry）.

球面几何中的大圆，相当于平面几何中的直线. 所以，在球面几何中，有时又把大圆叫作"球面直线".

在平面几何中，不同两点确定一直线.

在球面几何中，是否不同两点也确定一个大圆呢？

为此，考虑球 O 上任意两个不同的点 A 和 B.

如果 A 和 B 不是对径点，那么三点 A，B，O 不在一直线上，所以通过这三点有且只有一个平面. 这个平面与球 O 的交线，就是通过 A 和 B 的大圆. 这样的大圆有且只有一个.

这种情形与平面几何有明显区别.

如果 A 和 B 是对径点，那么每个通过直线 AB 的平面与球 O 相交，交线都是大圆，又都通过 A 和 B. 这样的大圆有无穷多个.

这样就证明了下面的定理：

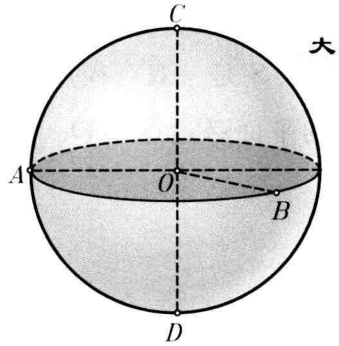
定理 1 （非对径两点确定大圆）通过球面上两个非对径点有且只有一个大圆. 通过两个对径点有无穷多个大圆.

如图 1－5，通过非对径点 A 和 B 的大圆，记为"大圆 AB".

5. 大圆的极.

从地球仪可以看出，连接南极和北极的直径垂直于赤道平面.

如图 1－5，在球 O 中，如果球直径 CD 垂直于大圆 AB 所在的平面，那么点 C 和 D 叫作大圆 AB 的极（pole）.



大圆和它的极

图 1－5

利用球直径 CD 与大圆平面 ABO 的垂直关系，当已知大圆 AB 时，可以求出它的极 C，D；反过来，如果已知球面上一点 C，也能作出大圆 AB，使它以 C 为一个极（另一个极是 C 的对径点）.

习题 1

1. 在半径 $R=111$ 的球面上，能否画出周长等于 666 的圆？能否画出周长等于 999 的圆？为什么？
2. 甲、乙二人各说了一句话. 甲说："过球面上任意两点只有一个大圆."乙说："过球面上任意两点总有一个大圆."他们两人说的话，意思有无不同？说得对不对？
3. 如图 1－6，已知球 O 的三条直径 AB，CD 和 EF 两两垂直. 试问：大圆 AC 的极是哪两点？大圆 AE 的极是哪两点？图中哪个大圆的极是 A 和 B？

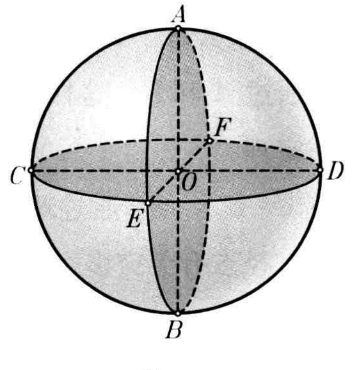


图 1－6

1.2 经　线

在地球仪上可以看到许多通过南极和北极的圆弧．这些圆弧就是经线（图 1－7）．

图 1－7

因为南极 S 和北极 N 是地球的一双对径点，所以地球表面上每个通过两极的圆都是大圆，而这大圆位于两极之间的半圆周，就是一条经线．

在地球仪上共画出 24 条经线，每两条相邻经线之间为一个时区（两个相邻时区的时钟相差 1 小时）．其中每两条相对的经线可以拼合成一个大圆，共得 12 个大圆．再加上赤道也是一个大圆，它们在球面上形成了纵横交错的几何形象．

这些纵横交错的大圆，能够带来什么启发呢？

1. 大圆相交．

地球仪上画出的十几个大圆，全都彼此相交．

球面上的大圆类似于平面里的直线．在一个平面里，两条直线可能相交，也可能平行．

在一个球面上，是否也存在不相交的大圆呢？

如图 1-8，设在球 O 中，有两个任意大圆. 两个大圆所在的平面都通过球心 O，因而这两个平面相交于过 O 的一条直线.

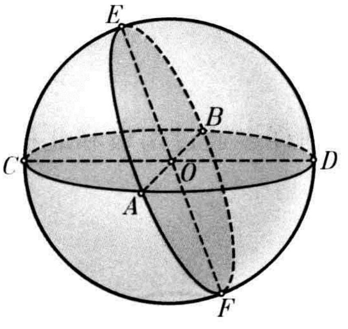


图 1-8

设此直线与球面的交点为 A 和 B，那么对径点 A 和 B 是这两个大圆的公共点.

这样就证明了球面的一个重要性质：

定理 2 （大圆相交）同一球面的任何两个大圆都相交，其交点是一双对径点.

上述“大圆相交”定理表明，在球面几何中，不存在不相交的大圆. 所以，平面几何中涉及平行直线的许多定理，无法直接推广到球面几何.

2. 球面角.

在北极或南极附近，两条经线组成一个弯曲的角状图形. 这是平面里的角在球面上的类似物，叫作球面角.

在平面几何中，两直线相交，在交点周围形成四个角，角的边是射线.

类似地，在球面几何中，两个大圆相交，在一个交点周围形成四个球面角，球面角的边是大圆弧.

如图 1-9，两个大圆 CD 和 EF 相交，在交点 A 周围形成的四个球面角，可分别记为球面角 DAE，EAC，CAF 和 FAD. 它们以 A 为公共顶点.

如果在某个具体问题中，以 A 为顶点的球面角只有一个，那么可将这个球面角简称为“角 A”.

在点 A 附近，一段微小的圆弧，非常接近于它在点 A 处切线上

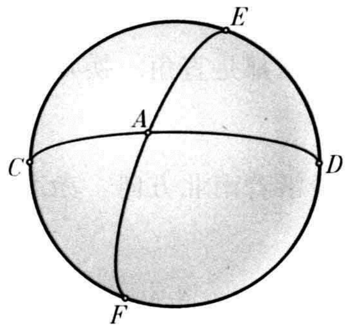
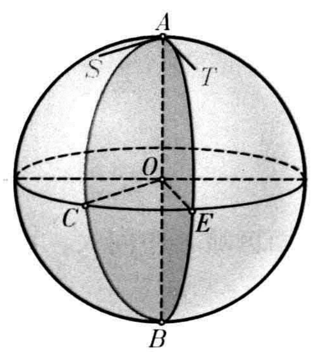


图 1－9

的相应微小线段.

所以，在几何里规定，两条曲线在一点处交角的大小，等于它们在这一点的切线的夹角.



球面角 CAE
$= \angle SAT$
$= \angle COE$
$=$ 二面角 $C\text{-}AB\text{-}E$

图 1－10

如图 1－10，设大圆 AC 和 AE 在点 A 的切线分别是 AS 和 AT，那么球面角 CAE 的大小等于$\angle SAT$.

因为切线 AS 在大圆平面 ACO 内，AT 在平面 AEO 内，并且 AS 和 AT 都垂直于球半径 OA，所以$\angle SAT$ 是二面角 $C-AO-E$ 的平面角.

由此可见，球面角 CAE 的大小，又等于大圆弧 AC 和 AE 所在平面的交角.

如果一个球面角的大小是直角，就说它的两边互相垂直.

例 1　地球仪上画出的 24 条经线，均匀分布，间隔相等. 所以，地球仪上每两条相邻经线所成球面角的大小都相等，其大小为

$$360^\circ \div 24 = 15^\circ.$$

例 2　连接北极和南极的直线 NS 垂直于赤道平面. 每条经线所

在的平面都通过直线 NS，所以经线平面垂直于赤道平面．因而，每条经线与赤道所成的球面角都是直角．换句话说，每条经线都垂直于赤道．

生活常识表明，经线沿着南北方向，赤道沿着东西方向．南北方向与东西方向总是垂直的．

由此可见，数学里关于球面角的知识，能与生活常识取得完全一致．

但是，在这种生活里习以为常的事实中，却包含着不寻常的性质：

在平面里，垂直于同一直线的各条直线互相平行；

而在球面上，各条经线都垂直于赤道，但它们却相会于北极和南极．

一般地，在球面上，与同一个大圆垂直的各个大圆相交于一双对径点．

3．球面二角形（月形）．

在地球仪上，两条经线围成的球面区域，中间大，两头尖，形如一角西瓜皮，又像是夜空的弯月．

相应地，在球面几何中，以同一双对径点为端点的两条大圆弧围成的一个球面区域叫作球面二角形，又叫作月形（lune）．这两条大圆弧叫作月形的边，它们的交点叫作月形的顶点．月形两边相交所成的球面角，叫作月形的角．

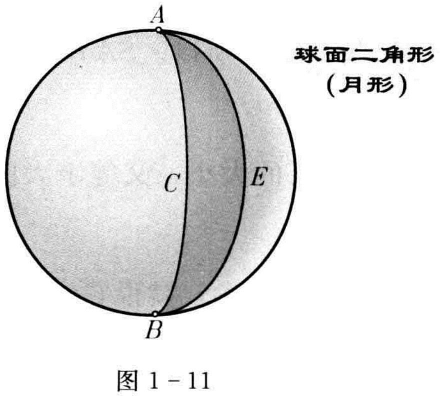


图 1－11

例如，在图 1－11 中，大圆弧 ACB 和 AEB 围成一个月形．两点 A 和 B 是这个月形的顶点，大圆弧 ACB 和 AEB 是月形的边，球面

角 CAE 是这个月形的角.

又如，在地球仪上画出的 24 条经线中，每两条相邻经线围成一个月形. 这个月形的角为 $15^\circ\left(等于\dfrac{360^\circ}{24}\right)$，月形的面积等于球面积的$\dfrac{1}{24}$.

在地球仪上这 24 个月形里，两个相邻的小月形拼合成一个较大的月形. 这个较大月形与原来的小月形相比，角增大了 2 倍，面积也增大了 2 倍.

一般地，在同一个球面上，如果两个月形的角相等，那么通过移动可使它们重合，因而它们的面积相等.

进而推出，在一个球面上，如果将月形的角增大为原来的 k 倍，那么它的面积也增大为原面积的 k 倍（其中 k 是任意正实数）.

简单地说，就是：月形的面积与角成正比.

比例系数是多少呢？能否设法把它求出来？

为此，设球半径为 R，那么球的全面积为 $4\pi R^2$.

在这个球面上，当月形的角是 180°，即 π 弧度时，月形成为半球面，其面积等于 $2\pi R^2$. 因而

$$\frac{月形面积}{月形角（弧度）}=\frac{2\pi R^2}{\pi}=2R^2.$$

这样就求出比例系数是 $2R^2$，因而得到计算月形面积的公式如下：

一角西瓜皮是一个月形，两角西瓜皮拼成一个较大的月形. 吃完西瓜，看看瓜皮，也能悟出月形面积公式.

定理 3 （月形面积）设月形的角是 α（弧度），面积是 S，球半径是 R，那么

$$S=2R^2\alpha.$$

例 3 已知球半径 $R=3$，月形的角是 60°，求这个月形的面积.

解 将 60°化为弧度，得到$\dfrac{\pi}{3}$. 因而月形的面积是

$$S=2\cdot 3^2\cdot\frac{\pi}{3}=6\pi.$$

说明 在应用问题中，角的大小通常用度、分、秒作单位；而在球面几何的计算公式里，角用弧度作单位比较方便. 所以，在推导球