大学文科数学

学习辅导与习题解答

主　编⊙张忠志　刘能东
副主编⊙余晋昌　关　力

DAXUE WENKE SHUXUE
XUEXI FUDAO YU XITI JIEDA

大学文科数学

学习辅导与习题解答

主　编⊙张忠志　刘能东
副主编⊙余晋昌　关　力

DAXUE WENKE SHUXUE
XUEXI FUDAO YU XITI JIEDA

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

内容提要

本书是根据大学文科数学的教学要求编写的一本数学学习参考书．全书内容分为函数的极限、函数的导数、函数的积分、矩阵与线性方程组、命题逻辑、谓词逻辑6章，每章内容包括学习要求、主要内容、典型问题、习题解答．本书可作为高等学校文科各专业学生学习大学文科数学的辅导书．

前　言

大学文科数学是高等院校文科专业的一门重要基础课程.

为了帮助广大文科学生学好大学文科数学这门课程，我们根据大学文科数学的教学要求编写了这本《大学文科数学学习辅导与习题解答》.

全书共分6章，先循着教材顺序指出每一章的学习要求，再对整章内容重点作一回顾和加深，然后将教材每一章内容中学生需要掌握的重点、难点，归纳为各个基本题型，举一反三，深入讲解，最后给出教材每一章后习题的参考答案.

本书第1、2、3章由余晋昌编写，第4章由刘能东编写，第5章由关力编写，第6章由张忠志编写.

本书参考了许多相关书籍和文献，在此向这些作者表示感谢．由于时间仓促，编者水平有限，不当之处在所难免，恳请读者不吝指正.

编　者

2009年10月

目　录

线性代数初步

数理逻辑初步

一元函数的微积分

1　函数的极限

1.1　学习要求

（1）理解函数的概念，了解分段函数、有界函数、复合函数、基本初等函数及初等函数的概念.

（2）理解函数极限的概念，了解数列极限的概念，掌握无穷小量、无穷大量的基本性质.

（3）能熟练地运用极限的四则运算法则、复合函数的极限、两个重要极限求出函数的极限.

（4）理解函数连续的概念，了解闭区间上连续函数的性质，会根据初等函数的连续性求初等函数的极限.

1.2　主要内容

1.2.1　函数及其有关概念

1. 函数的定义

设 X 与 Y 是实数集的子集，若有对应法则 f，使得对于 X 中的每个数 x，都有唯一的数 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是定义在数集 X 上的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 X 称为函数 f 的定义域，记为 D_f. 称全体函数值组成的集合 $V_f \triangleq \{y \mid y=f(x),\ x \in X\}$ 为函数的值域.

2. 分段函数

设数集 D_1，D_2，…，D_n 是函数 $y=f(x)$ 定义域 D_f 的一个划分，

若函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in D_1;\\ f_2(x), & x\in D_2;\\ \vdots & \\ f_n(x), & x\in D_n.\end{cases}$$

则称$f(x)$是分段函数.

3. **有界函数**

设函数$f(x)$的定义域为D_f，若存在正常数M，使得对任何$x\in D_f$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$为有界函数.

4. **复合函数**

设有两个函数$y=f(u)$和$u=g(x)$，若$V_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数$y=f[g(x)]$为函数$f$与$g$的复合函数，并称$f$为外函数，$g$为内函数，$u$为中间变量.

5. **基本初等函数与初等函数**

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数6类函数统称为基本初等函数.

由基本初等函数经过有限多次四则运算和复合运算所得到并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

1.2.2 函数极限的概念及性质

1. 函数极限

如果函数$f(x)$在x的某个变化过程中无限地接近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$在此变化过程中的极限，记为

$$\lim f(x)=A.$$

2. 函数极限之间的关系

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$成立,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

3. 无穷小与无穷大

如果$\lim f(x)=0$,则称函数$f(x)$为某个变化过程中的无穷小量.

如果在x的某个变化过程中,$|f(x)|$无限增大,则称$f(x)$为某个变化过程中的无穷大量,记为

$$\lim f(x)=\infty.$$

性质1 有限多个无穷小量的代数和仍然是无穷小量.

性质2 有界函数与无穷小量的乘积仍然是无穷小量.

性质3 如果$\lim f(x)=\infty$,则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$;

如果$\lim f(x)=0$且$f(x)\neq0$,则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

1.2.3 极限的运算法则

1. 极限的四则运算法则

设极限$\lim f(x)$和$\lim g(x)$存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$，

进而有 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$，c 为常数；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ $(\lim g(x)\neq 0)$.

2. 复合函数的极限

设$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$. 则有

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=A,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]\overset{u=g(x)}{=}\lim_{u\to u_0}f(u).$$

3. 两个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

1.2.4 函数的连续性

1. 函数在一点连续的定义

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处左连续.

如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处右连续.

2. 函数在区间上连续的定义

如果函数$f(x)$在开区间(a, b)内的每一点都连续，则称函数$f(x)$在开区间(a, b)内连续.

如果函数$f(x)$在开区间(a, b)内的每一点都连续，且在$x=a$右连续，又在$x=b$左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续.

3. 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的一个重要性质

最大值和最小值定理 设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上存在最大值和最小值.

1.3 典型问题

构成函数的要素是定义域D_f及对应法则f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

确定函数的定义域的一般原则：

(1) 对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定.

(2) 函数由解析式给出，不考虑实际意义，函数的定义域就是使解析式有意义的一切实数，这时求函数的定义域应注意以下几点：

①在分式中，分母不能等于零；

②在根式中，偶数根号下的式子不能小于零；

③在对数式中，真数要大于零；

④在三角函数式或反三角函数式中，要根据三角函数或反三角函数的定义域来确定．

例 1 求函数的定义域：

（1）$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；　　（2）$y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

解 （1）要使函数 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 有意义，必须 $\frac{1+x}{1-x}>0$，即

$$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}\text{或}\begin{cases}1+x<0,\\1-x<0.\end{cases}$$

解得 $-1<x<1$. 所以函数的定义域为

$$D_f=\{x\mid x\in(-1,1)\}.$$

（2）要使函数 $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$ 有意义，必须 $\sin x-\cos x\neq0$，即

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq0,$$

从而有 $x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. 所以函数的定义域为

$$D_f=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})\}.$$

例 2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数

（1）$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域；

(2) $f(\ln x)$的定义域.

解 (1) 由$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}\Rightarrow a\leqslant x\leqslant 1-a.$

所以，函数$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$a\leqslant x\leqslant 1-a$.

(2) 由$0\leqslant \ln x\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$. 所以函数$f(\ln x)$的定义域为$1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$.

利用函数极限存在的充要条件判别极限存在是判别极限存在与否的一种重要的方法. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$. 因此，当$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个不存在，或者是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在但不相等时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在. 这一结果通常用来讨论分段函数在分段点的极限的存在性.

例3 已知函数$f(x)=\dfrac{|\sin 2x|}{x}$，试问$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$以及$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在?

解
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin 2x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin 2x}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x\cos x}{x}$$
$$=-2\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0^-}\cos x=-2.$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin 2x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{x}$$
$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0^+}\cos x=2.$$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

大卫·希尔伯特说过：没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐述. 因此，判别一个量在自变量的某个变化过程中是无穷大或无穷小是很有必

要的.

例4 下列函数在x的哪个变化过程中是无穷小?在x的哪个变化过程中是无穷大?

(1) $y=\dfrac{x+3}{x-2}$;

(2) $y=a^{-x}(a>0,\ a\neq1)$;

(3) $y=\ln(1+x)$.

解 (1) 当$x\to2$时, $y=\dfrac{x+3}{x-2}\to\infty$, 所以, $y=\dfrac{x+3}{x-2}$当$x\to2$时为无穷大;

当$x\to-3$时, $y=\dfrac{x+3}{x-2}\to0$, 所以, $y=\dfrac{x+3}{x-2}$当$x\to-3$时为无穷小.

(2) ①$a>1$, 当$x\to+\infty$时, $y=a^{-x}\to0$, 所以, $y=a^{-x}$当$x\to+\infty$时为无穷小; 当$x\to-\infty$时, $y=a^{-x}\to+\infty$, 所以, $y=a^{-x}$当$x\to-\infty$时为无穷大.

② $0<a<1$, 当$x\to+\infty$时, $y=a^{-x}\to+\infty$, 所以, $y=a^{-x}$当$x\to+\infty$时为无穷大; 当$x\to-\infty$时, $y=a^{-x}\to0$, 所以, $y=a^{-x}$当$x\to-\infty$时为无穷小.

(3) 当$x\to+\infty$时, $y=\ln(1+x)\to+\infty$, 所以, $y=\ln(1+x)$当$x\to+\infty$时为无穷大;

当$x\to-1^{+}$时, $y=\ln(1+x)\to-\infty$, 所以, $y=\ln(1+x)$当$x\to-1^{+}$时为无穷大;

当$x\to0$时, $y=\ln(1+x)\to0$, 所以, $y=\ln(1+x)$当$x\to0$时为无穷小.

运用极限的运算法则, 求函数的极限是本章的主要内容. 求函数极限的常用方法有:

(1) 利用基本极限公式及极限的四则运算法则求极限;

(2) 利用无穷小的性质求函数的极限;

（3）利用两个重要极限及其推广形式求函数的极限；

（4）利用左右极限及极限存在的充要条件求函数的极限（特别是分段函数在分段点的极限）；

（5）利用函数的连续性及初等函数的连续性求常见初等函数在连续点的极限．

例 5 指出下列运算中的错误，并给出正确的解法：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}=\dfrac{0}{0}=1$；

（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^3-3)}{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}=\dfrac{-2}{0}=\infty$；

（3）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x^2-1}=\infty-\infty=0$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}x\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}=0$；

（5）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{9+x}-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{4+x}-2)}{\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{9+x}-3)}=\dfrac{0}{0}=1$.

解 （1）在极限的运算法则中，两个函数的商的极限等于这两个函数的极限的商，要求分母的极限不为零．当分母的极限为零时，不能直接应用两个函数的商的极限等于这两个函数的极限的商这一极限运算法则．而应先进行恒等变形，再用极限的运算法则．本题的正确解法是

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3.$$

（2）当分母的极限为零时，不能直接应用两个函数的商的极限等于

这两个函数的极限的商这一极限运算法则．但是$\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3)=-2\neq 0$，可由无穷小与无穷大的关系求解．本题的正确解法是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3)}=\frac{0}{-2}=0,$$

由无穷小与无穷大的关系有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3}{x-1}=\infty.$$

（3）在极限的运算法则中，两个函数的差的极限等于这两个函数的极限的差，要求这两个极限都存在．当这两个函数极限有一个或两个都不存在时，不能直接应用两个函数的差的极限等于这两个函数的极限的差这一极限运算法则．而应先进行恒等变形，再用极限的运算法则．本题的正确解法是

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

（4）在极限的运算法则中，两个函数的积的极限等于这两个函数的极限的积，要求这两个极限都存在．当这两个函数极限有一个或两个都不存在时，不能直接应用两个函数的积的极限等于这两个函数的极限的积这一极限运算法则．本题中，由于$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$不存在，因此不能用极限运算法则，可用无穷小的性质求解．本题的正确解法是：

由于$\left|\arctan\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\arctan\dfrac{1}{x}$是有界函数，而$x(x\to 0)$是