

21

世纪高等职业技术教育规划教材——土木工程类

JIEGOU LIXUE JI  
GONGCHENG JIEGOULIANG

# 结构力学及 工程结构梁

朱耀淮 编著 何奎元 主审



西南交通大学出版社  
[Http://press.swjtu.edu.cn](http://press.swjtu.edu.cn)

21世纪高等职业技术教育规划教材——土木工程类

# 结构力学及工程结构梁

朱耀淮 编著

何奎元 主审

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目 (C I P ) 数据

结构力学及工程结构梁 / 朱耀淮编著. —成都：  
西南交通大学出版社, 2010.8  
21世纪高等职业技术教育规划教材. 土木工程类  
ISBN 978-7-5643-0773-8

I . ①结… II . ①朱… III . ①土木结构—结构力学—  
高等学校：技术学校—教材②梁—工程结构—高等学校：  
技术学校—教材 IV . ①TU311②TU323.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 149030 号

21世纪高等职业技术教育规划教材——土木工程类

**结构力学及工程结构梁**

朱耀淮 编著

责任编辑	孟苏成
特邀编辑	杨 勇
封面设计	本格设计
出版发行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮 编	610031
网 址	<a href="http://press.swjtu.edu.cn">http://press.swjtu.edu.cn</a>
印 刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印 张	7.875
字 数	197 千字
版 次	2010 年 8 月第 1 版
印 次	2010 年 8 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-0773-8
定 价	13.50 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换  
版权所有 盗版必究 举报电话：028-87600562

## 前　　言

本书是根据高等学校土建学科教学指导委员会审定的“建筑力学教学大纲”编写的。本书可作为高职高专建筑工程技术、建设设计、道路与桥梁工程技术、隧道与地下工程技术、铁道工程技术、建筑工程项目管理等专业的教材，也可作为土建类工程技术人员的参考用书。

在编写本书时，注意了以下原则：体现高等职业教育教学改革的特点，突出针对性、适用性和实用性；吸取有关教材长处，结合作者的教学经验；重视由浅入深和理论联系实际；内容简明扼要、通俗易懂，图文配合紧密。并配有练习题册。

在本书编写中，一、为了使得叙述更确切，提出新的名称和符号：二杆外点、附基梁、相应结构、本结构、附加刚臂新符号、固平衡力矩、工程结构梁等。二、为了使得分析计算更简单，提出了新方法：1.虚铰的五种形式及分析应用；2.寻找零杆判点判零杆；3.应用三铰拱内力计算公式计算三铰刚架；4.用渐近法计算绝对最大弯矩值。三、为了理解更容易，应用了新方法推导计算公式：1.三铰拱内力计算公式的简易推导；2.虚功原理的简易推导；3.临界荷载判别式的简易推导。四、为了适应目前教学时数不同数量减少的情况，对内容进行了合理编排：1.几何组成分析后，紧接桁架，有利于复习和应用组成分析内容；2.按要求，剔除了对高师生来说，难且很难掌握的位移法；3.将较难一些的工程上常见的内容编入同一章，形成具有应用性质的专题章，第8章工程结构梁。

本书由湖南交通工程职业技术学院朱耀淮副教授编著。在本书的编写过程中，得到了郭保生教授的帮助；聘请湖南交通工程职业技术学院何奎元副教授主审，且为本书提出了宝贵意见：在此一并表示感谢。同时也感谢本书所列参考文献的各位作者。

鉴于作者水平，本书难免有不足之处，敬请读者批评指正。作者联系方式 15211459215，随时接收读者意见。

作　者  
2010年3月

# 目 录

绪 论 .....	1
第 1 章 平面体系的几何组成 .....	7
§1.1 几何构造分析的目的 .....	7
§1.2 自由度和约束的概念 .....	8
§1.3 几何不变体系的简单组成规则 .....	10
§1.4 瞬变体系 .....	13
§1.5 无虚铰法几何组成分析 .....	14
§1.6 虚铰的五种形式及分析应用 .....	16
§1.7 静定与超静定结构 .....	18
第 2 章 桁 架 .....	19
§2.1 概 述 .....	19
§2.2 结点法求简单平面桁架内力 .....	21
§2.3 截面法求简单平面桁架内力 .....	24
§2.4 联合应用结点法和截面法 .....	25
§2.5 几种桁架受力性能的比较 .....	26
第 3 章 静定受弯结构 .....	28
§3.1 附基静定梁 .....	28
§3.2 静定平面刚架 .....	30
§3.3 三铰拱 .....	39
§3.4 应用三铰拱公式计算三铰刚架 .....	45
第 4 章 静定结构位移 .....	47
§4.1 概 述 .....	47
§4.2 虚功与虚功原理 .....	48
§4.3 荷载作用下的位移计算 .....	51
§4.4 图乘法 .....	55
§4.5 图乘法技巧 .....	58
§4.6 静定结构在支座移动时的位移 .....	61
§4.7 互等定理 .....	62

<b>第 5 章 力 法 .....</b>	<b>64</b>
§5.1 力法原理.....	64
§5.2 力法方程.....	67
§5.3 力法计算举例 .....	69
§5.4 相应结构.....	74
<b>第 6 章 力矩分配法 .....</b>	<b>76</b>
§6.1 力矩分配法的基本概念及基本原理.....	76
§6.2 用力矩分配法计算举例 .....	80
<b>第 7 章 影响线 .....</b>	<b>84</b>
§7.1 移动荷载和影响线的概念 .....	84
§7.2 用静力法作单跨静定梁影响线 .....	85
§7.3 利用影响线求量值.....	89
§7.4 荷载最不利位置的确定 .....	93
§7.5 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩.....	97
<b>第 8 章 工程结构梁 .....</b>	<b>100</b>
§8.1 多跨静定梁.....	100
§8.2 超静定组合结构梁.....	104
§8.3 多跨连续梁的弯矩内力 .....	106
§8.4 用机动法作连续梁影响线简介 .....	111
§8.5 连续梁的内力包络图 .....	114
<b>参考文献 .....</b>	<b>120</b>

# 绪 论

## 1 结构力学的研究对象和任务

工程中的各类构筑物，如房屋、桥梁、水塔、挡土墙、车辆机架等等，都要承受一些荷载的作用，如人群、设备、车辆、水压力、土压力、货物荷载等等。凡在构筑物中，起着承担荷载的骨架作用的部分，都称为结构。如图1所示为房屋骨架图，最上层的荷载由屋面板承担，屋面板再依次传递荷载给横梁、柱子、基础，这个骨架也就是此房屋的结构。

结构的类型有多种，通常可以从几何观点分为三种类型，即杆系结构、薄壁结构和实体结构。杆件的特点是，它的长度远大于另两个方向的尺寸，如矩形截面杆的长，远大于截面的宽和高。由杆件组成的结构称为杆系结构；如果，杆系及其上的荷载都处于同一个平面内，就称为平面杆系结构。本书的研究对象限于平面杆系结构。薄壁结构是指它的厚度远小于另两个方向尺寸的结构，如水池、水塔等都可选取薄壁结构形式。结构的三个方向的尺寸为同一量级时，称为实体结构，如挡土墙结构。

研究杆系结构的任务包括讲授结构的合理组成，以保证结构内部不致产生相对运动，使结构能维持外因作用下的平衡，研究结构在外因作用下的内力和变形，以便后续课对结构进行强度和刚度计算，来保证结构既安全又经济地工作。结构稳定问题在高职教材中都被略去，即便它对结构的安全也非常重要。因此，概括结构力学的主要任务，也可以说包括研究结构在荷载等因素作用下所产生的内力、变形以及稳定性，探讨结构的组成规律和合理形式。

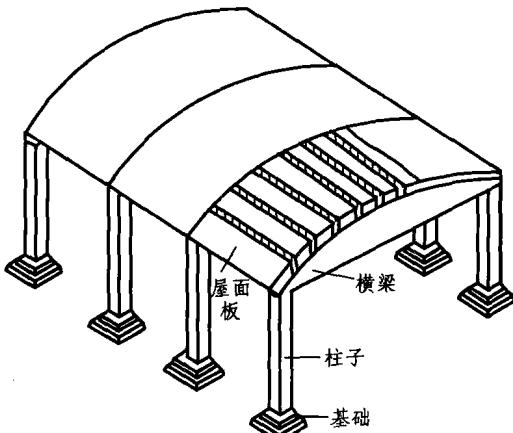


图 1

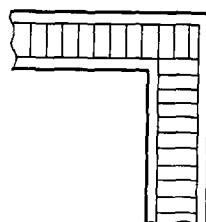
## 2 结构的计算简图

实际构筑物的结构一般都比较复杂，完全按照实际结构进行分析计算，往往是不可能的。因此，必须抓住它的主要特征，略去次要的因素，采用经过简化的图形来代替它。这种能够代表实际结构的简化图形，就称为此实际结构的计算简图。结构力学就是按照结构的计算简图进行分析计算的。

选择结构的计算简图，应该保证此简图既能够正确地反映实际结构的变形情况和受力特点，又能使结构的计算得到简化。

### 2.1 结构的结点

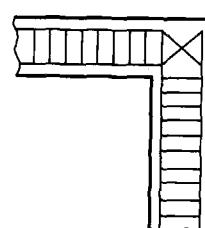
两根实际结构的杆件，有两种联结形式，如图 2 (a) 和 3 (a) 所示。在图 2 (a) 中的不同杆件之间，用钢筋联成整体，再由混凝土浇注定位，可以称为刚结，刚结的计算简图如图 2 (b) 所示。而在图 3 (a) 中的杆件之间，虽然仍用混凝土浇注固定了钢筋，但所用钢筋汇交抵抗弯矩的能力薄弱，所以，可以近似地视为理想铰结，计算简图取如图 3 (b) 所示。



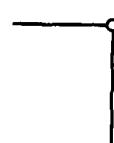
(a)



(b)



(a)

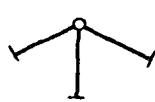


(b)

图 2

图 3

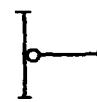
在结构的计算简图中，凡多根杆件联结的地方统称为结点。结点可以分为铰结、刚结和组合结点三种，如图 4 所示。



(a)



(b)



(c)

图 4

图中有：(1) 铰结点——凡被联结的各杆件，都可以绕着铰心自由转动，如图 4 (a) 所示的为完全铰。

(2) 刚结点——如各杆件都不能绕着它的结点作杆件之间的相对转动，也就是各杆件之间的夹角保持不变，如图 4 (b) 所示称为刚结点。

(3) 组合结点——此种结点处，有的杆件之间用刚结，而有的又用铰结，如图 4 (c) 所

示。此种结点为不完全铰结，也不完全为刚结。

以上任何一种结点，杆件之间在内力和变形方面，都有各自的特点，宜注意理解和明确地区分。

## 2.2 结构的支座

结构与地基（或其他结构）相联系的装置称为支座。依据实际结构支座的约束特点，在工程力学中都绘出了简图。这些简图，也就是结构力学的支座计算简图，如图 5 所示。

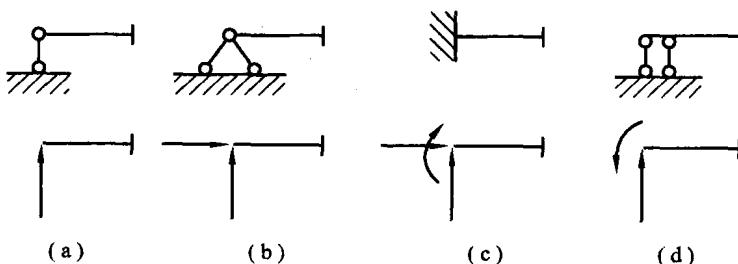


图 5

(1) 活动铰支座——这种支座的计算简图用一根链杆表示，它只能阻止结构沿支承链杆方向移动，如图 5 (a) 所示，反力的方向沿链杆轴向，大小未知。

(2) 固定铰支座——计算简图如图 5 (b) 所示，用两根相交的链杆表示。这种支座只允许结构绕铰中心转动，但不可以作任何方向移动，反力可任取两个相互垂直的分反力，两分反力的大小未知。

(3) 固定端支座——计算简图如图 5 (c) 所示，它表示结构被此种支座所固定，即不允许结构对支座作任何移动和转动，反力有三个未知量，包括任意两个互相垂直的分反力和一个力偶。

(4) 定向支座——计算简图如图 5 (d) 所示，此支座只允许结构沿杆垂直方向移动。反力的未知量有两个，一个是沿链杆轴向的反力，另一个是抵抗转动的力偶矩。

要想由结构的实际支座作出合理的计算简图，仅仅依赖如上所述的工程力学的介绍还不够，此后还必须坚持理论联系实际的原则，特别是钢筋混凝土支座以前几乎没有讨论过，如何合理地给定各种支座的计算简图，还应该不断地摸索。

## 2.3 杆系结构的简化

在杆系结构的计算简图中，同工程力学一样，杆件也都要采用它的轴线来表示。对于荷载，也应考虑实际的施加情况，近似地用集中荷载或分布荷载来表示。

关于选取结构的计算简图：一般杆系结构都可以化为平面杆系结构，故可先将结构体系简化为平面体系，并将该平面结构所应承担的荷载求出，施加到此平面结构的受力处。当然也有不少结构不能简化为平面结构，这种结构称为空间结构，本教材不讨论。再就是判明结构杆件之间的联结，并选择决定相适应的结点简图，将结构中的杆件（轴线）联结起来。最后审定支座，选取适当的支座得到简图。这样就得到了结构的计算简图。

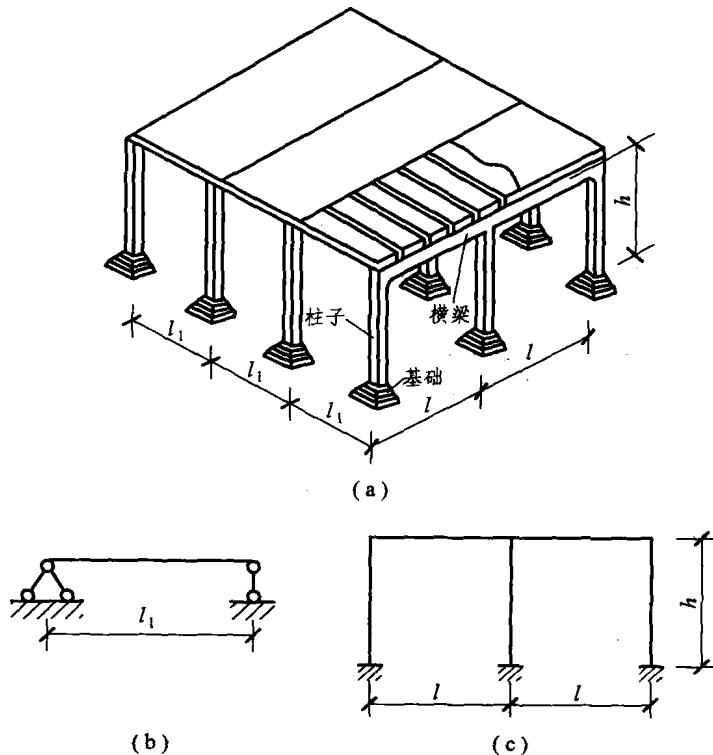


图 6

例如图 6 (a) 所示为由梁、柱和基础等组成的结构图。其中每一排间距为  $l_1$  的横向梁、柱和基础，处在一个平面内，构成平面结构。屋面板将屋面荷载向下传，传递到这些横向的平面结构上。

图 6 (a) 所示的计算简图，可以分解为两个部分讨论。一个屋面板，它简支在横向平面结构之上，屋面板的计算简图如图 6 (b) 为简支梁，设屋面板的荷载为  $p$ ，单位为  $\text{kN}/\text{m}^2$ 。通常对板可取 1 m 宽计算，于是屋面板的荷载  $q_1$  应为：

$$q_1 = 1 \times p_1 = p_1 \quad (\text{kN}/\text{m})$$

另外一部分就是横向平面结构，也就是屋面板的支座，对中间二排架，此支座反力为  $2Y$  (不计横梁自重)，横向结构的荷载  $q_2$  与  $2Y$  两者互为反作用，有：

$$q_2 = 2Y = 2 \left( \frac{q_1 l_1}{2} \right) = q_1 l_1 = p_1 l_1 \quad (\text{kN}/\text{m})$$

横向结构的杆件联结，设取图 2 刚结的形式，钢筋混凝土结构一般多用此种刚结。对于支座，要看柱子、基础和地基的实际情况而定，如果柱子与基础联结为一体可抵抗弯矩，而且地基又良好，变形很小，此时支座可视为固定端支座，如图 6 (c) 所示。图 6 (b) 加上荷载  $q_1$  后和图 6 (c) 加上荷载  $q_2$  后就是图 6 (a) 所示结构的计算简图。

此后，结构力学将只对结构的计算简图进行分析和讨论。

### 3 结构和荷载的分类

#### 3.1 平面杆系结构分类

平面杆系结构是本书分析的对象，按照它的构造和力学特征，可分为下述五类。

(1) 梁——以受弯为主的直杆为直梁。本书主要讨论直梁，不涉及曲梁，更不考虑曲率对曲杆的影响。梁有静定梁和超静定梁两大类，如图 7 (a)、(b) 所示。

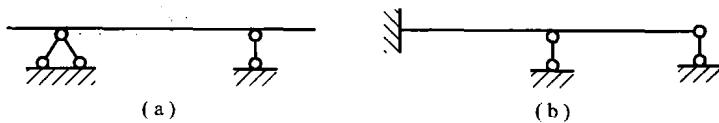


图 7

(2) 拱——多为曲线外形，它的力学特征在以后讨论拱时再说明。常用的拱有静定三铰拱和超静定的无铰拱、两铰拱三种，分别如图 8 (a)、(b)、(c) 所示。两铰拱和无铰拱的计算以三铰拱为基础，本书只讲三铰拱。

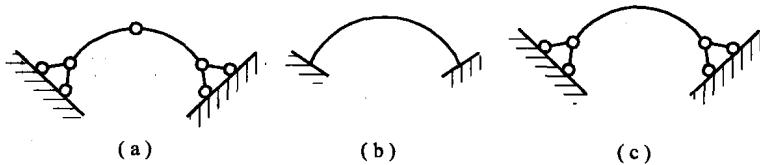


图 8

(3) 刚架——由梁和柱等杆件构成，杆件之间的联结多为刚结。有静定刚架和超静定刚架两类，如图 9 (a)、(b) 所示。

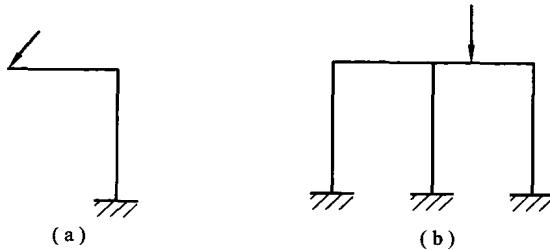


图 9

(4) 桁架——由端部都是铰结的直杆构成，理想桁架的荷载必须施加在结点上，如图 10 (a)、(b) 所示，有静定桁架和超静定桁架两种。

(5) 组合结构——它是桁架直杆和梁式杆件两类杆件组合而构成的结构，如图 11 所示。图中 AB 杆具有一个或多个组合结点，属梁式杆件，杆件 AD、CD… 又为端部都为铰结的桁架式直杆，故图 11 (a) 和 (b) 均为组合结构。组合结构也有静定和超静定之分。

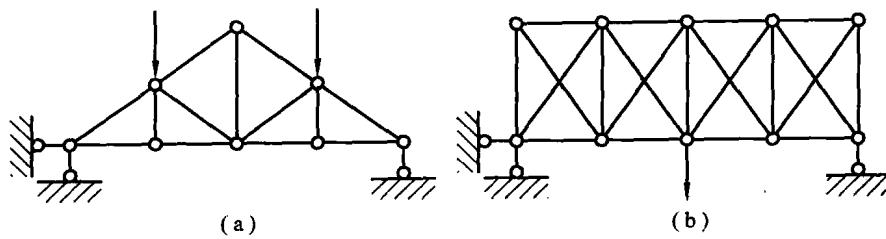


图 10

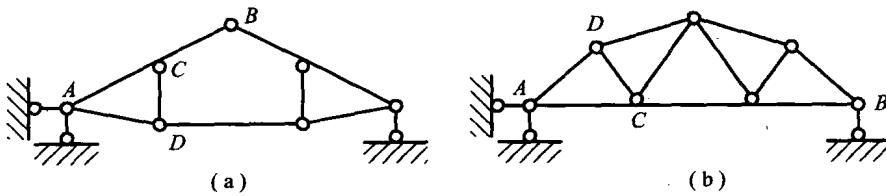


图 11

### 3.2 荷载的分类

对于平面结构，通常可以将荷载归纳为集中荷载和线分布荷载两种，线分布荷载此后简称为分布荷载。除此对荷载还有不同的分类法。

#### (1) 按荷载作用时间的长短分类有：

① 恒载——在结构的使用期内，长期不变或变化值可以忽略的荷载称为恒载。如结构的自重，结构上不动的附属装置、设备等的自重，这些都是恒载。

② 活载——施加在结构上可以变化的荷载称为活载。常见的活载有：只改变大小的，如移动的人或物的荷载；也有只改变荷载位置的，如吊车或列车荷载，这种荷载也称为移动荷载。

#### (2) 按荷载作用性质分类有：

① 静载——由零缓慢地增加（加速度可忽略）到某一定值的荷载。最后的定值即为静载值。  
② 动载——随着时间变化，必须考虑加速度影响的荷载。

#### (3) 按荷载与构件的接触情况分类有：

① 直接荷载——荷载直接与构件相接触。  
② 间接荷载——荷载不直接与构件相接触。

## 4 工程结构梁

房屋建筑、公路、铁路建设中，遇到最多的就是简支梁、下端固定的柱子，除此以外就是各种各样的梁，其中多跨静定梁、多跨连续梁、组合结构梁是工程中最常见的结构，其计算也可以用较为简便的力法和力矩分配法求解；对于桁架梁，一般用于建造大型桥梁和大型房屋结构，其计算比组合梁更为简易，所以本书略去不讲。而多跨连续梁应用得最多，故本教材着重讲授连续梁的内力计算，作为前面知识的具体应用。

# 第1章 平面体系的几何组成

## § 1.1 几何构造分析的目的

结构是用来承受荷载的，通常情况下是由若干杆件互相联结而组成，但不能将杆件随意拼成结构。应该要求结构在承受荷载后，能牢固地维持它本身原有的几何形状和位置。这样的结构，才能在工程上使用。为此，要求结构必须满足一定的组成规律。一般将由若干杆件所构成的一个整体，称为体系。

由实践可知，如图 1.1 (a) 所示的体系，在外荷载作用下，若不考虑材料的微小变形时，能保持其几何形状和位置不变，这样的体系，称为几何不变体系。又如图 1.1 (b) 所示的体系，即使在很小的外荷载的作用下，各杆件也会发生相对的机械运动，不能保持其原有的形状和位置，这样的体系称为几何可变体系。显然，几何可变体系不能作为工程结构使用。就体系的几何形状和位置是否可变，进行体系的几何构造分析，称为体系的几何组成分析或机动分析。

平面体系几何组成分析的目的：

(1) 在结构设计选定计算简图时，必须分析它是否几何可变，从而决定它能否在工程结构上使用。

(2) 为了确定结构是静定还是超静定，以便采取相应的计算方法。

(3) 利用平面体系几何组成分析，掌握结构的构造特征，为后续的结构计算打下基础。

在进行几何组成分析时，由于略去了材料的弹性变形，因而将一根梁，一根链杆，或在体系中已被判明为几何不变的部分，都可视为一个刚体，它在平面体系中称为刚片。

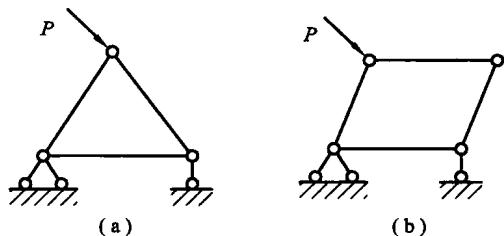


图 1.1

## § 1.2 自由度和约束的概念

### 1.2.1 平面体系的自由度

判断体系是否是几何可变，可从体系中的刚片是否会发生机械运动的分析着手。换句话说，就是从体系是否有自由度的分析着手。所谓体系的自由度，是指一个体系运动时，可以独立变化的几何参数的数目。这个数目，就是用来确定该体系的位置所必需的独立坐标数目。

例如在平面内的一个点的运动，它的位置可用两个坐标变量  $x$ 、 $y$  来确定，如图 1.2 (a) 所示，故自由度等于 2。一个刚片在平面内运动时，它的位置由刚片上面任一点  $A$  的坐标  $(x, y)$  和过  $A$  点的任一直线的倾角  $\varphi$  三个参数才能确定，如图 1.2 (b) 所示，所以一个刚片在平面内的自由度等于 3。

由体系自由度的定义和上述分析可知，在通常的情况下，若一个平面体系有  $n$  个独立的运动，就说明这个体系有  $n$  个自由度。

在工程上使用的结构，均为几何不变体系，对于大地其自由度为零或小于零。对于大地凡自由度大于零的体系，都是几何可变的。

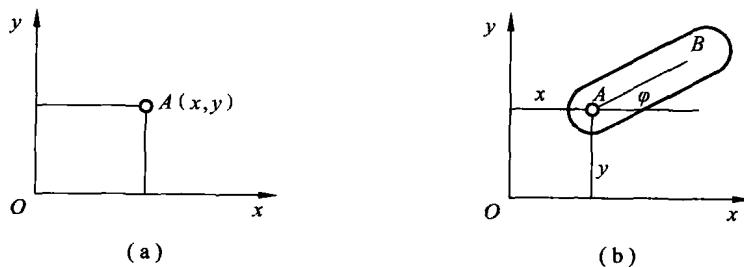


图 1.2

### 1.2.2 各种约束的分析

体系的自由度，可以通过在体系内加入某些装置，使刚片运动受到限制而减少，减少自由度的装置称为联系或约束。凡能减少一个自由度的装置，称为一个联系或一个约束。

#### 1. 链杆约束

用一根链杆  $AB$  将刚片与地基相联结，如图 1.3 (a) 所示。因  $A$  点不能沿链杆方向移动，故刚片将只有两种运动的可能，即刚片绕  $A$  点转动及刚片随链杆上的  $A$  点绕  $B$  点转动，刚片的自由度由原来的 3 减为 2。故一根链杆为一个联系或一个约束。

#### 2. 单铰约束

如图 1.3 (b) 所示，用一个铰  $A$  联结两个刚片。刚片 I 的位置可由  $A$  的坐标  $(x, y)$  和直线  $AB$  的倾角  $\varphi_1$  来确定，因此，它的自由度为 3；而刚片 II 就只有绕  $A$  点转动的自由，其位置用倾角  $\varphi_2$  就可以完全确定，因而减少了两个自由度。这样两个刚片的自由度由 6 减少为 4。

可见，用铰 A 联结两个刚片减少了两个自由度。将这种联结两个刚片的铰称为单铰。显然，一个单铰相当于两个联系，即相当于两根链杆的约束。反之，同时联结两刚片的两根链杆，也相当于一个单铰的作用。

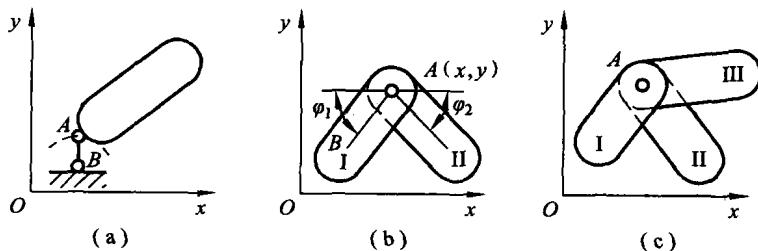
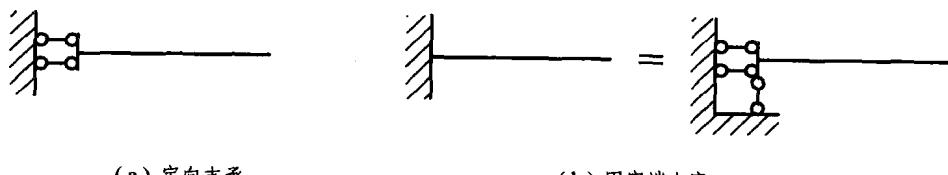


图 1.3

### 3. 复铰约束

将同时联结两个以上刚片的铰称为复铰。如图 1.3 (c) 所示，刚片 I、II、III 共用一个复铰联结。若刚片 I 的位置已确定，则刚片 II 和 III 只能绕 A 点转动，从而每一刚片各减少了两个自由度。故此，联结三个刚片的复铰，实际上相当于两个单铰。由此可推知：联结  $n$  个刚片的复铰，其作用相当于  $(n-1)$  个单铰。

关于支座的约束，在计算自由度时，可将不同形式的支座化为链杆支座。如上所述，活动铰支座相当于一根链杆支座，固定铰支座相当于两根链杆约束。如图 1.4 所示，对于一个定向支座，可减少刚片的 2 个自由度，相当于两根链杆支座；而一个固定端支座对刚片的约束，可减少刚片的 3 个自由度，故相当于三根链杆支座。



(a) 定向支承

(b) 固定端支座

图 1.4

### 1.2.3 复铰的识别

一个平面体系，通常可以看成是由若干个刚片加入某些联系，并用支座链杆与地基相联结而组成的。因此，在分析刚片之间的联系时，必须正确判别复铰所包含的联系数，在复铰折算成单铰计算联系数时，应正确地识别该复铰所联结的刚片数，如图 1.5 (a)、(b) 和 (c) 所示的几种情况，其相应的单铰数分别为 1、2、3。

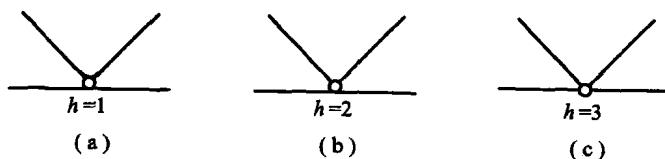


图 1.5

### § 1.3 几何不变体系的简单组成规则

上节介绍了体系几何不变的必要条件，本节将研究几何不变体系组成的充分条件。几何不变体系的简单组成规则，也就是几何不变体系构成的组成规律。

#### 1.3.1 刚片和点的组成规则

将一个外点与一个刚片（或几何不变的部分）相联结成一个不变整体，需要在点与刚片之间用两根不在同一直线上的链杆相连（如图 1.6 所示），故又称这种点为二杆外点，在不变体系上增加或撤除一个二杆外点，体系仍为一个几何不变体系。

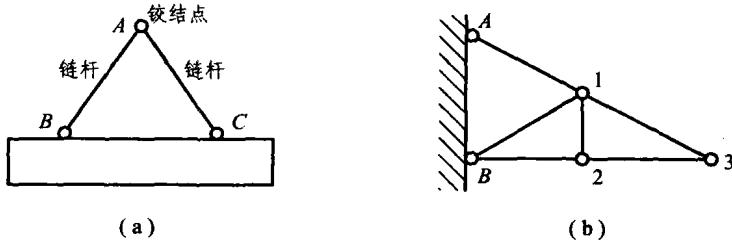


图 1.6

利用“刚片和点的规则”，在分析某些体系时是比较方便的。例如分析图 1.6 (b) 所示的体系，首先  $AB$  为刚片；再按“刚片和点的规则”，增加一个二杆外点得结点 1，便得到几何不变体系  $A-1-B$ 。类似又以  $1-A-B$  刚片为基础，增加一个二杆外点得结点 2……如此依次增加二元体，可知最后得到的体系是一个无多余联系的几何不变体系。

反之，也可以用撤除二杆外点的方法来分析图 1.6 所示的体系。因为从一个体系撤除一个二杆外点后，所剩下的部分若为几何不变的，则原来的体系也是几何不变的。现根据“刚片和点的规则”，从图 1.6 所示的体系结点 3 开始撤除一个二杆外点，然后依次撤除二杆外结点 2、1…，最后剩下的刚片  $AB$  是几何不变的，故知原体系是一个几何不变体系。

当然，若撤除二杆外点后，所剩下的部分是几何可变的，则原体系必定也是几何可变的。

#### 1.3.2 两刚片规则

两个刚片用三根既不完全平行也不汇交于一点的链杆相联，这样组成的体系，为无多余联系的几何不变体系。

如图 1.7 (a) 所示，若刚片 I 和刚片 II，用两根不平行的链杆  $AB$  和  $CD$  相联结。设刚片 I 固定不动，则  $A$ 、 $C$  两点为固定；当刚片 II 运动时，其上  $B$ 、 $D$  两点，各自沿与  $AB$  和  $CD$  杆垂直的方向运动。故刚片 II 的相对运动，为绕  $AB$  与  $CD$  杆延长线的交点  $O$  转动， $O$  点称为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。此情形类似于把刚片 I 和 II 用单铰在  $O$  点相联结。这又证明了两根链杆的约束作用相当于一个单铰，这个铰的位置，是在两根链杆的延长线上；并且

此种铰的位置，随链杆位置的微小变动而作微小改变，这种铰称为虚铰。

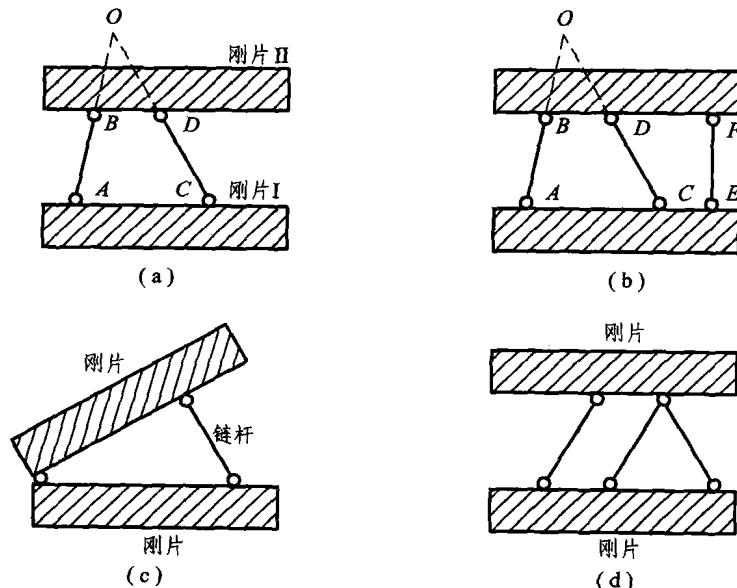


图 1.7

为制止刚片Ⅰ和Ⅱ发生相对转动，还须加上一根链杆 $EF$ ，如图1.7(b)所示。由实践可知，如果链杆 $EF$ 的延长线不通过虚铰 $O$ ，它就能阻止刚片Ⅰ和Ⅱ之间的相对转动。因此，像这样组成的体系，是没有多余联系的几何不变体系。

由于两根链杆的约束作用相当于一个单铰的约束，故两刚片规则还可叙述为：“两刚片用一个铰和一根不通过该铰中心的链杆相联，组成没有多余联系的几何不变体系。”如图1.7(b)、(c)和(d)所示。

利用二刚片规则分析体系如图1.8所示多跨梁。将地基看做一刚片Ⅰ， $ABC$ 看做另一刚片Ⅱ，Ⅰ、Ⅱ之间符合两刚片规则组成一不变部分，再将梁 $DF$ 看做刚片Ⅲ与前一不变部分又符合两刚片规则组成无多余联系的几何不变体系。

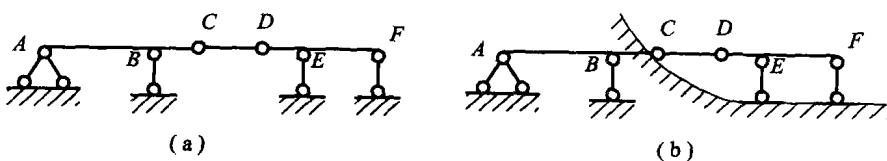


图 1.8

### 1.3.3 三刚片规则

如图1.9(a)所示的刚片Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ，用不在同一直线上的三个单铰 $A$ 、 $B$ 和 $C$ ，使刚片两两相联。这里所指的两两相联，是指每两个刚片之间均用一个单铰联结。若假定刚片Ⅰ不动，则刚片Ⅱ上的 $C$ 点只能在以 $A$ 为圆心、 $AC$ 为半径的圆弧上运动；同理，刚片Ⅲ上的 $C$ 点也只能在以圆心为 $B$ 、半径为 $BC$ 的圆弧上运动。因刚片Ⅱ和Ⅲ用铰 $C$ 相联结，故 $C$ 点