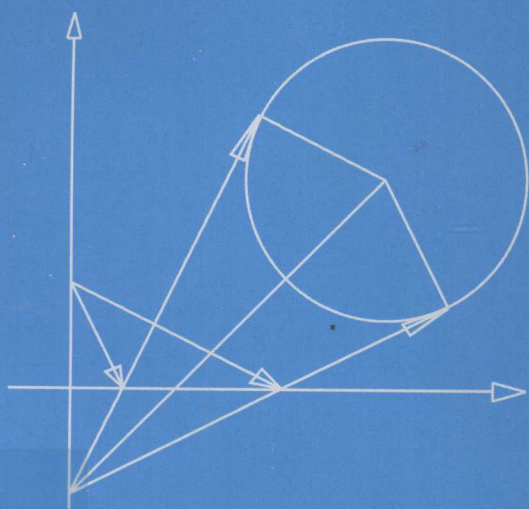


深圳市碧波中学校本教材系列丛书

新课标

高考数学专题复习教程

■ 主编 林 伟



数学

西南师范大学出版社

校友

新课标高考数学专题复习教程

湛师图书馆



A1598972

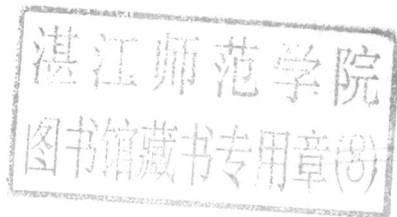
新课标高考数学专题复习教程

主 编 林 伟

副主编 陶继智

编 著 林 伟 陶继智

陈松俭 廖金龙



E1674.6

427.23

西南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

新课标高考数学专题复习教程/林 伟主编。——四川：西南师范大学出版社、2007.9

ISBN7-5621-1512-5/G.957

I. 数学... II. 林... III. 中学—校本教材系列丛书... IV. G034

新课标高考数学专题复习教程

主编：林 伟

西南师范大学出版社发行

（重庆 北碚）

各地新华书店经销

开本 889mm×1194mm 1/16 7.5印张 160千字

2007年第一版 2007年9月第一次印刷

ISBN7-5621-1512-5/G·957

定价：25.70元

前言

2004年秋,高中新课程改革实验首先在山东、宁夏、广东、海南四省区展开。新课程改革尊重学生个性,重视创新思维,关注人文素养,培养创造能力,是一场关系民族素质的革命。因此,如何应对新课改下的高考呢?这是广大教师、考生、家长共同关注的焦点。为帮助广大考生顺利通过高考,我们充分发挥集体备课的力量,组织骨干教师,本着夯实基础,提高能力,练就实战本领的宗旨。

本丛书以新课标教材(必修)为蓝本,依据最新《课程标准》及《考试说明》编写。集中体现新课标的教学要求,充分融汇新课程标准教材的改革思想和精神,敏锐反映高考改革发展的最新趋向,突出“科学、应用、创新”的特点,更加符合学生学习的接受心理和认知规律。透彻整理学习要点及解题依据,实例点拨和应考技巧,轻松提高应考技能,使学生花最少的时间和精力轻松学习,从容应考,是本丛书的出发点。它具有以下特点:

1. 紧扣新课改。教材的多样性,也就使将来的高考不可能具体在哪一套教材上,而是重点考查知识和能力。因此,本书着眼于高考必考的知识点进行分析、归类、指导,对使用各种教材的学生都具有科学的指导作用。

2. 注重整体规划。我们没有按习惯的编写方式,而是以题目作为平台,通过具体的试题,分析新课程以后的考试内容,总结近年来高考改革的趋势,分析新课程实施以后的高考要求。丛书呈现出完整的复习体系。

3. 讲究科学合理。从编排看,本丛书遵循各学科规律和学生认知规律,循序渐进地引导学生务实应考的基础,提升实战的能力;从题目设计看:本丛书选题先易后难,具有梯度,所选例题典型,所用习题精当,所创题型全面而规范。

4. 突出实用。本丛书知识复习,力求做到精要,好懂,有用。例题讲解重思路、讲方法;习题设计有梯度、有创意、讲练结合、简明有效,能紧扣高考题型,做到题题有本、步步仿真。对于重点、难点,能有意识地加大训练的力度,有利于学生的自学自练。

本书以最新的《新课程标准》为依据,以对教材的宏观控制为基础,本书以单元为基本学习单位进行设计。设计训练题目,体现梯度,由易到难,题量适中,能起到深刻地理解并运用该考点的知识,达到提高能力的作用。

本书具有较强的前瞻性、实用性和参考性。本书的编写提纲由编者共同讨论确定,随后分工完成初稿。初稿完成之后,由科研处林伟负责统稿。参加编写的人员有陈松俭(第一、二讲)、廖金龙(第三、七讲)、陶继智(第四、五、六讲)、林伟(第八、九、十、十一讲)。

但是,由于时间仓促,书中难免有疏漏之处,恳请广大师生批评指正。

编者

2007年7月29日

目 录

第一讲	导数与函数专题	1
第二讲	三角与向量专题	8
第三讲	数列与不等式专题	13
第四讲	直线、平面、简单几何体专题.....	26
第五讲	解析几何专题	43
第六讲	数学应用问题	50
第七讲	概率与统计专题	58
第八讲	函数与方程的思想方法	66
第九讲	数列结合思想	76
第十讲	化归与转化的思想	85
第十一讲	分类讨论思想	98

第一讲 导数与函数专题

□课标解读:

纵观近几年的新课程各省市的高考卷,函数的主干知识、知识的综合应用以及函数与方程思想等数学思想方法的考查,一直是高考的重点内容之一.在高考试卷上,与函数相关的试题所占比例始终在20%左右,且试题中既有灵活多变的客观性试题,又有一定能力要求的主观性试题.

由于函数在高中数学中具有举足轻重的地位,它仍将是2007年新课标高考的一个热点.对函数试题的设计依然会围绕几个基本初等函数和函数的性质、图像、应用考查函数知识;与方程、不等式、解几等内容相结合,考查函数知识的综合应用;在函数知识考查的同时,加强对函数方程、分类讨论、数形结合、等价转化等数学思想方法的考查.

导数是高中数学新教材与新课标中新增的知识之一,体现了现代数学思想,在研究函数性质时,有独到之处.纵观各地的新课程高考试卷,大多数以一个大题的形式考察这部分内容.内容主要是与单调性、最值、切线这三方面有关.复习中也要注重导数在解决科技、经济、社会中的某些实际问题中的应用.

新课标高考更要重视函数与导数的结合.利用导数判定一些函数的单调性、求函数的极值和最值,这是研究函数性质的强有力的工具,并且具有普遍的适用性,也是新课程高考卷的一个热点内容.要求我们在复习中高度重视,尤其要加强对三次函数性质的探讨,因为三次函数求导后又与传统的重点内容二次函数相互联系.

□例题精讲:

【例1】完成下面一组典型的基础练习:

- 函数 $y = \sqrt{\log_2 x - 2}$ 的定义域是 ().
A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty]$ C. $(4, +\infty)$ D. $[4, +\infty]$
- 对任意 x , 有 $f'(x) = 4x^3$, $f(1) = -1$, 则此函数为 ().
A. $f(x) = x^4$ B. $f(x) = x^4 - 2$ C. $f(x) = x^4 + 1$ D. $f(x) = x^4 + 2$
- 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 ().
A. $y = 3x - 4$ B. $y = -3x + 2$ C. $y = -4x + 3$ D. $y = 4x - 5$
- 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____
- 已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3(a+2)x + 1$ 既有极大值又有极小值, 则实数 a 的取值范围 _____.

【例2】求 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x^2}{4}$ 在区间 $[0, 2]$ 的最大值和最小值.

【例3】设函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ ($x \in R$)，已知 $g(x) = f(x) - f'(x)$ 是奇函数。
(1) 求 b 、 c 的值； (2) 求 $g(x)$ 的单调区间与极值。

【例4】设 a 为实数，函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的极值；

(II) 当 a 在什么范围内取值时，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点。

【例5】设 $a \in R$ ，函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$ 若 $f(x) = 0$ 的解集为 A ，

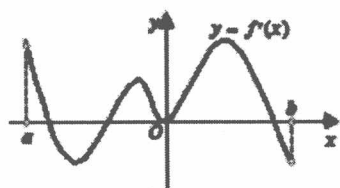
$B = \{x \mid 1 < x < 3\}$ ， $A \cap B \neq \Phi$ 求实数 a 的取值范围。

【例6】已知 a 是实数，函数 $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$ ，如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有零点，求 a 的取值范围。

导数与函数专题训练

※ 基础达标

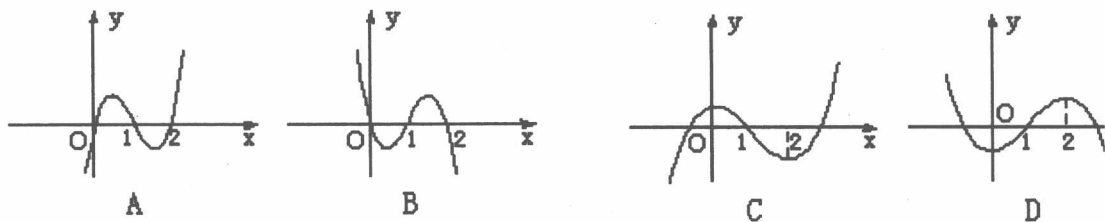
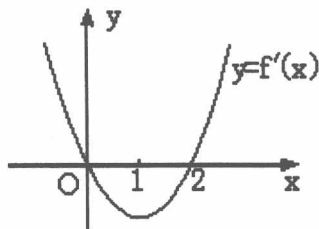
- 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 是减函数的区间为 ().
 A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 2)$
- 若曲线 $y = x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x + 4y - 8 = 0$ 垂直, 则 l 的方程为 ().
 A. $4x - y - 3 = 0$ B. $x + 4y - 5 = 0$ C. $4x - y + 3 = 0$ D. $x + 4y + 3 = 0$
- 设 $f_0(x) = \sin x, f_1(x) = f_0'(x), f_2(x) = f_1'(x), \dots, f_{n+1}(x) = f_n'(x), n \in \mathbb{N}$, 则 $f_{2005}(x) =$ ().
 A. $\sin x$ B. $-\sin x$ C. $\cos x$ D. $-\cos x$
- 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a, b) , 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有极小值点 ().
 A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 若点 P 在曲线 $y = x^3 - x + 2$ 上移动, 经过点 P 的切线的倾斜角为 α , 则 α 的取值范围为 ().
 A. $[0, \frac{\pi}{2})$ B. $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ C. $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ D. $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$
- 已知定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2



- 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \lg x$, 设 $a = f(\frac{6}{5}), b = f(\frac{3}{2}), c = f(\frac{5}{2})$, 则 ()

A $a < b < c$ B $b < a < c$ C $c < b < a$ D $c < a < b$

- 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则 $y = f(x)$ 的图象最有可能的是 ()



- 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的导数为 $f'(x)$, $f'(0) > 0$, 对于任意实数 x , 有

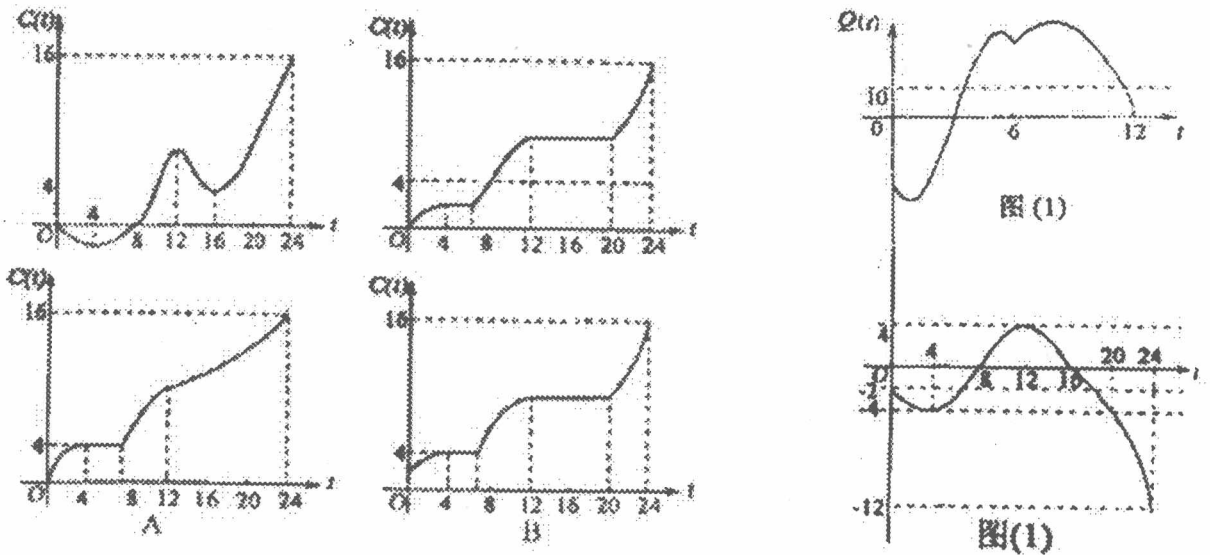
$f(x) \geq 0$, 则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 ()

- A. 3 B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

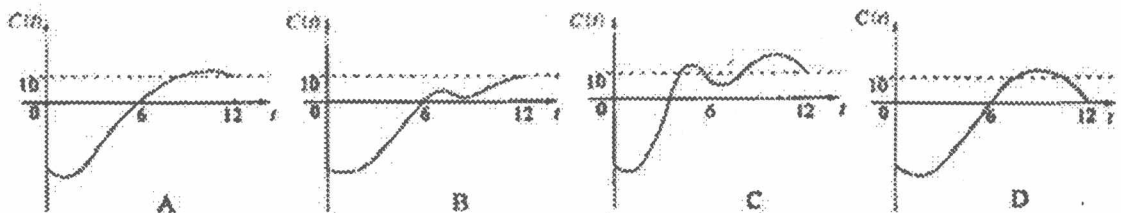
10. 关于 x 的方程 $(x^2-1)^2 - |x^2-1| + k = 0$, 给出下列四个命题:

- ①存在实数 k , 使得方程恰有 2 个不同的实根;
 ②存在实数 k , 使得方程恰有 4 个不同的实根;
 ③存在实数 k , 使得方程恰有 5 个不同的实根;
 ④存在实数 k , 使得方程恰有 8 个不同的实根. 其中假命题的个数是 ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 某地一天内的气温 $Q(t)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与时刻 t (单位: 时) 之间的关系如图(1)所示, 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 内的温差(即时间段 $[0, t]$ 内最高温度与最低温度的差). $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的图象大致是



某地一年内的气温 $Q(t)$ (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与时间 t (月份) 之间的关系如图(1)所示, 已知该年的平均气温为 10°C . 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 的平均气温, $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的应该是 ()



12. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4$ ($a > 0$). 若 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = 0$, 则

- A. $f(x_1) > f(x_2)$ B. $f(x_1) = f(x_2)$
 C. $f(x_1) < f(x_2)$ D. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

13. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4$ ($0 < a < 3$). 若 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = 1 - a$, 则

- A. $f(x_1) < f(x_2)$ B. $f(x_1) = f(x_2)$
 C. $f(x_1) > f(x_2)$ D. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = x - x^4$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) =$ _____.

15. 若曲线 $|y| = 2^x + 1$ 与直线 $y = b$ 没有公共点, 则 b 的取值范围是_____.

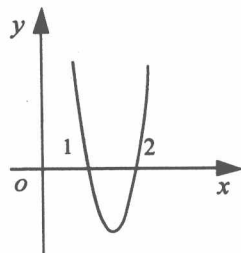
若曲线 $y^2 = |x| + 1$ 与直线 $y = kx + b$ 没有公共点, 则 k 、 b 分别应满足的条件是_____.

15. 已知 a, b 为常数, 若 $f(x) = x^2 + 4x + 3$, $f(ax + b) = x^2 + 10x + 24$, 则 $5a - b =$ _____.

16. 函数 $y = \log_a(x+3) - 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny + 1 = 0$ 上, 其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为_____.

17. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(1, 0)$, $(2, 0)$, 如图所示. 求:

(1) x_0 的值; (2) a, b, c 的值.



18. 设函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx$ 的图像与直线 $12x + y - 1 = 0$ 相切于点 $(1, -11)$.
 (1) 求 a, b 的值; (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

※能力提高

19. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(2-x) = f(2+x)$, $f(7-x) = f(7+x)$, 且在闭区间 $[0, 7]$ 上, 只有 $f(1) = f(3) = 0$.

(I) 试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性;

(II) 试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005, 2005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论.

20. 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值是 12.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 是否存在自然数 m , 使得方程 $f(x) + \frac{37}{x} = 0$ 在区间 $(m, m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + (a+d)x^2 + (a+2d)x + d$, $g(x) = ax^2 + 2(a+2d)x + a+4d$, 其中 $a > 0$, $d > 0$, 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, x_1 为 $g(x)$ 的极值点, $g(x_2) = g(x_3) = 0$, 并且 $x_2 < x_3$, 将点 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, g(x_1))$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ 依次记为 A, B, C, D.

(1) 求 x_0 的值;

(2) 若四边形 APCD 为梯形且面积为 1, 求 a, d 的值.

22. 已知定义在正实数集上的函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax$, $g(x) = 3a^2 \ln x + b$, 其中 $a > 0$. 设

两曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 有公共点, 且在该点处的切线相同.

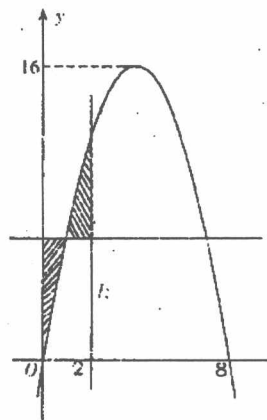
- (I) 用 a 表示 b , 并求 b 的最大值;
 (II) 求证: $f(x) \geq g(x)$ ($x > 0$).

23. 设函数 $f(x) = tx^2 + 2t^2x + t - 1$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$).

- (I) 求 $f(x)$ 的最小值 $h(t)$;
 (II) 若 $h(t) < -2t + m$ 对 $t \in (0, 2)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

24. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 直线 $l_1: y = -t^2 + 8t$ (其中 $0 \leq t \leq 2t$ 为常数);
 $l_2: x = 2$. 若直线 l_1 , l_2 与函数 $f(x)$ 的图象以及 l_1 , y 轴与函数 $f(x)$ 的图象所围成的封闭图形如阴影所示.

- (I) 求 a , b , c 的值
 (II) 求阴影面积 S 关于 t 的函数 $S(t)$ 的解析式;
 (III) 若 $g(x) = 6 \ln x + m$, 问是否存在实数 m , 使得 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象有且只有两个不同的交点? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 说明理由.



第二讲 三角与向量专题

课标解读：从新教材开始的新课程高考命题情况来看，对向量与三角的考查立足于基础题和中档题，位置一般在选择的前位和解答题的前三个，并以向量与三角相结合的问题作为命题热点。客观题主要是三角函数图象性质，或是利用诱导公式与倍角公式进行三角变形求值。一定要注意，对比老教材最明显的区别就在于降低了三角变形要求。向量是新增内容，从新高考命题思路看，主要是把向量作为工具与三角或解析几何、立体几何相结合进行考查，或在小题中对向量的概念基本运算进行考查，我们需要关注向量的坐标运算和它们的几何意义，加强数与形相结合的关注度，同时也要对向量的矢量运算给以足够的重视。

【自我检测一、二】

1. 同角三角函数基本关系式：_____，_____，_____.
2. 诱导公式是指 α 的三角函数与 $-\alpha$ ， $180^\circ \pm \alpha$ ， $90^\circ \pm \alpha$ ， $270^\circ \pm \alpha$ ， $360^\circ - \alpha$ ， $k360^\circ + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) 三角函数之间关系：奇变偶不变，符号看象限.
3. 两角和与差的三角函数： $\sin(\alpha \pm \beta) =$ _____；
 $\cos(\alpha \pm \beta) =$ _____； $\tan(\alpha \pm \beta) =$ _____.
4. 二倍角公式： $\sin 2\alpha =$ _____； $\cos 2\alpha =$ _____ = _____ = _____
 $\tan 2\alpha =$ _____.
5. 半角公式： $\sin \frac{\alpha}{2} =$ _____， $\cos \frac{\alpha}{2} =$ _____， $\tan \frac{\alpha}{2} =$ _____ = _____ = _____.
6. 万能公式 $\sin \alpha =$ _____， $\cos \alpha =$ _____， $\tan \alpha =$ _____.
7. 三角函数的图象与性质：

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
定义域			
值域			
图象			
单调性			
奇偶性			
周期性			

- 1、_____叫做向量；
- 2、_____叫做共线向量（平行向量）；
- 3、_____叫做相等向量；
- 4、_____叫做单位向量.
- 5、向量加法法则是_____，_____减法法则是_____.
- 6、设 $a = (x_1, y_1)$ ， $b = (x_2, y_2)$ ， $\lambda \in \mathbb{R}$
 $a + b =$ _____，它满足的运算性质有_____。
 $a - b =$ _____，它满足的运算性质有_____。
 $\lambda a =$ _____，它满足的运算性质有_____。
 $=$ _____ = _____，它满足的运算性质有_____。

$\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$
 $a // b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}; a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

7、正弦定理的内容是_____。

8、余弦定理的内容是_____。

9、定比分点坐标公式是_____ (其中 $\lambda =$ _____)。

10 平移公式是 _____。

11. $S_{\Delta} =$ _____ 12.. 扇形弧长公式是: $L =$ _____ 面积公式 $S =$ _____

例题精讲

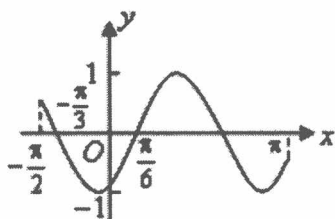
(1) 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 等于

- A. $\frac{1}{7}$ B. 7 C. $-\frac{1}{7}$ D. -7

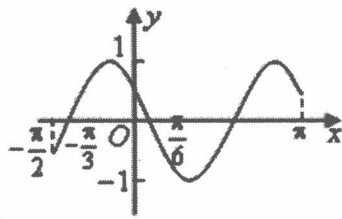
(2) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$, 则 $f(x)$ 的值域是

- A. $[-1, 1]$ B. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ C. $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

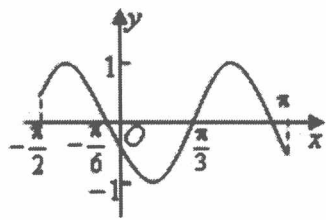
(3) 函数 $y = \sin(2x - \frac{p}{3})$ 在区间 $[-\frac{p}{2}, p]$ 的简图是 ()



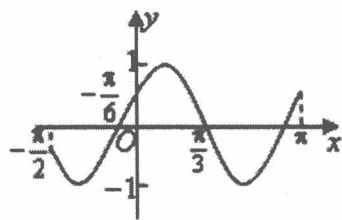
A.



B.



C.



D.

(4) 要得到函数 $y = \sin x$ 的图象, 只需将函数 $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
 C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

(5) 为了得到函数 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$, $x \in R$ 的图像, 只需把函数 $y = 2\sin x$, $x \in R$ 的图像上所有的点

- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)
- (B) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)
- (C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)
- (D) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

(6) $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c 设向量 $\vec{p} = (a+c, b), \vec{q} = (b-a, c-a)$, 若 $\vec{p} \parallel \vec{q}$, 则角 C 的大小为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

(7) 设函数 $f(x) = \cos(\sqrt{3}x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$). 若 $f(x) + f'(x)$ 是奇函数, 则 $\varphi =$ _____。

例 2 已知向量 $a = (\sin \theta, 1), b = (1, \cos \theta)$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- (I) 若 $a \perp b$, 求 θ ;
 (II) 求 $|a+b|$ 的最大值.

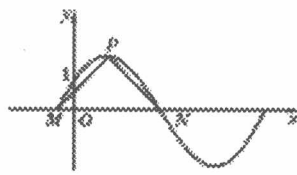
例 3 已知函数 $f(x) = A \sin^2(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 函数, 且 $y = f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1, 2)$.

- (1) 求 φ ;
 (2) 计算 $f(1) + f(2) + \dots + f(2008)$.

例 4 如图, 函数 $y = 2\sin(\pi x \phi), x \in \mathbb{R}$, (其中 $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$)

的图象与 y 轴交于点 $(0, 1)$.

- (I) 求 ϕ 的值;
 (II) 设 P 是图象上的最高点, M, N 是图象与 x 轴的交点, 求 \vec{PM} 与 \vec{PN} 的夹角.

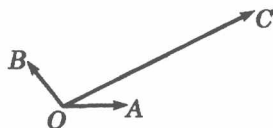


例 5 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 且满足 $0 \leq \vec{AB} \cdot \vec{AC} \leq 6$, 设 \vec{AB} 和 \vec{AC} 的夹角为 θ .

- (I) 求 θ 的取值范围; (II) 求函数 $f(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \sqrt{3} \cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

三角与向量专题训练

- 若 $\triangle ABC$ 的内角 A 满足 $\sin 2A = \frac{2}{3}$, 则 $\sin A + \cos A =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $-\frac{5}{3}$
- 函数 $y = |\sin x|$ 的一个单调增区间是 ()
 A. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
- 设 $\mathbf{a} = (4, 3)$, \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 上的投影为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, \mathbf{b} 在 x 轴上的投影为 2, 且 $|\mathbf{b}| \leq 14$, 则 \mathbf{b} 为 ()
 A. (2, 14) B. $(2, -\frac{2}{7})$ C. $(-2, \frac{2}{7})$ D. (2, 8)
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ ()
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
- P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 若 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则 P 是 $\triangle ABC$ 的 ()
 A. 外心 B. 内心 C. 重心 D. 垂心
- 已知向量 $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\mathbf{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$, 且 $\mathbf{a} \neq \pm \mathbf{b}$, 那么 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角的大小是_____.
- 在四面体 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE} =$ _____ (用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示).
- 已知 $\alpha, \beta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\sin(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{12}{13}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ _____.
- 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, 其中与 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的夹角为 120° , \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OC} 的夹角为 30° , 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$, 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的值为_____.
- 下面有五个命题:
 ①函数 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ 的最小正周期是 π .
 ②终边在 y 轴上的角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.
 ③在同一坐标系中, 函数 $y = \sin x$ 的图象和函数 $y = x$ 的图象有三个公共点.
 ④把函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y = 3\sin 2x$ 的图象.
 ⑤函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 在 $(0, \pi)$ 上是减函数.



其中真命题的序号是_____ (写出所有正确的序号)

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{3}\cos 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(I) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(II) 若不等式 $|f(x) - m| < 2$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

12. 已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$ 、 $B(0,0)$ 、 $C(c,0)$

(1) 若 $c = 5$, 求 $\sin \angle A$ 的值; (2) 若 $\angle A$ 是钝角, 求 c 的取值范围.

13. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $\omega > 0$)

(I) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 若对任意的 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $y = f(x)$, $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 有且仅有两个不同的交点, 试确定 ω 的值 (不必证明), 并求函数 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ 的单调增区间.

14. 设 $f(x) = 6\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$.

(I) 求 $f(x)$ 的最大值及最小正周期;

(II) 若锐角 α 满足 $f(\alpha) = 3 - 2\sqrt{3}$, 求 $\tan \frac{4}{5}\alpha$ 的值.

15. 已知 A, B, C 是三角形 $\triangle ABC$ 三内角, 向量 $\vec{m} = (-1, \sqrt{3})$, $\vec{n} = (\cos A, \sin A)$, 且 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 1$

(I) 求角 A ; (II) 若 $\frac{1 + \sin 2B}{\cos^2 B - \sin^2 B} = -3$, 求 $\tan B$

16. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2} + 1$, 且 $\sin A + \sin B = \sqrt{2}\sin C$.

(I) 求边 AB 的长; (II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{6}\sin C$, 求角 C 的度数.