目　录

第一章　向量代数

斜座标系—仿射座标系

§1．求和約定

在張量分析计算中，广泛地采用指标符号，这样可以大为簡化运算。

<u>求和約定</u>(Summation Convention)

例如

$$A = \sum_{i=1}^{3} A^i e_i$$

可以簡写为

$$A = A^i e_i \qquad (1\cdot1)$$

这种Einstein 求和約定认为：凡有一重复指标就意味着在該指标的所有值上求和。重复指标是<u>哑指标</u>dummy index。由此可见哑指标可以为还未被采用的任何其它的符号来代替，于是，我們可以写

$$A = A^i e_i = A^m e_m \qquad (1\cdot2)$$

<u>自由指标</u>

現考察下列方程組

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 \\ y_2 &= A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 \\ y_3 &= A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 \end{aligned} \qquad (1\cdot3)$$

按Einstein 求和約定，上列方程組可写为

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{1j}x^j, \\ y_2 &= A_{2j}x^j, \quad j = 1, 2, 3 \\ y_3 &= A_{3j}x^j, \end{aligned}$$

还可进一步写为

$$y_i = A_{ij}x^j, \quad x, j = 1, 2, 3, \qquad (1\cdot4)$$

在(1·4)式的方程组中，每一个方程的每一項中只出現一次的指标，如指标 i 称为“自由指标” free index ，一个自由指标每次只取整数 1，2 或 3 中的一个。

例1·1· 求和指标一定要一上一下，指标重复只能一次，如 $a_i b_i x_i$ 这样的表达式就不在此約定的范圍之內。若要对它求和，必須保留原来的求和約定符号。

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i x_i$$

例1·2· 必須指出指标求和的范圍，如 $i_1 = 1, \cdots, n$，以后如未指明均取 $n = 3$，如

$$A^i e_i = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3\,,$$

例1·3· 双重求和

$$\begin{aligned} A^{ij} e_i e_j = {} & A^{11} e_1 e_1 + A^{12} e_1 e_2 + A^{13} e_1 e_3 \\ & + A^{21} e_2 e_1 + A^{22} e_2 e_2 + A^{23} e_2 e_3 \\ & + A^{31} e_3 e_1 + A^{32} e_3 e_2 + A^{33} e_3 e_3 \end{aligned}$$

例1·4· 展开下式(有二个自由指标)

$$T_{ij} = A_i^{\ m} A_{jm} \qquad i, j, m = 1, 2, 3$$

$$T_{11} = A_1^{\ m} A_{1m} = A_1^{\ 1} A_{11} + A_1^{\ 2} A_{12} + A_1^{\ 3} A_{13}$$

$$T_{12} = A_1^{\ m} A_{2m} = A_1^{\ 1} A_{21} + A_1^{\ 2} A_{22} + A_1^{\ 3} A_{23}$$

$$T_{13} = A_1^{\ m} A_{3m} = A_1^{\ 1} A_{31} + A_1^{\ 2} A_{32} + A_1^{\ 3} A_{33}$$

....

$$T_{33} = A_3^{\ m} A_{3m} = A_3^{\ 1} A_{31} + A_3^{\ 2} A_{32} + A_3^{\ 3} A_{33}$$

§2. 基向量和对偶基(互逆基)向量

2·1· 基向量(basis vectors)

在三維欧氏空间內，找不到一組四个綫性独立的向量。另一方面，可以找到很多組三个綫性独立的向量。取任一組三个独立的向量为

$$e_1, e_2, e_3$$

这一组向量称为基(或基系 base system)。

从線性相关的概念，显然我們可以把三維空间內的任何向量表示成基向量的線性組合(图1·1)

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = A^i e_i \qquad (2·1)$$

諸向量 $A^1 e_1$, $A^2 e_2$, $A^3 e_3$ 称为向量A的向量分量，A^1, A^2, A^3 称为伴隨基 e_1, e_2 和 e_3 的向量A的数量分量或度量數(Scalar components or measure numbers)，以后规定分量取上指标 Superscripts 基取下指标 Subscripts。

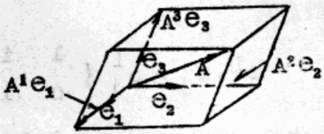


图1·1 向量的分量

2·2· 对偶基或互逆基(Dual or Reciprocal Basis)

引出 与任意基相伴的是另一种基，后者可以从前者推导出来，其构造方法如下：取向量A与叉积 $e_1 \times e_2$ 的数量积，

$$A\cdot(e_1\times e_2) = A^3 e_3\cdot(e_1\times e_2)$$

解得 A^3 为

$$A^3 = A\cdot\frac{e_1\times e_2}{e_3\cdot(e_1\times e_2)} = A\cdot\frac{e_1\times e_2}{[e_1 e_2 e_3]} \qquad (2·2a)$$

类似求得 A^1, A^2 为

$$A^1 = A\cdot\frac{e_2\times e_3}{[e_1 e_2 e_3]},\quad A^2 = A\cdot\frac{e_3\times e_1}{[e_1 e_2 e_3]} \qquad (2·2b)$$

定义

$$e^1 = \frac{e_2\times e_3}{[e_1 e_2 e_3]},\quad e^2 = \frac{e_3\times e_1}{[e_1 e_2 e_3]},\quad e^3 = \frac{e_1\times e_2}{[e_1 e_2 e_3]} \qquad (2·3)$$

这組向量 e^1, e^2, e^3 称为基向量 e_1, e_2, e_3 的对偶或互逆基向量。将(2·3)代回到(2·2)式有

$$A^1 = A\cdot e^1,\ A^2 = A\cdot e^2,\ A^3 = A\cdot e^3,\ 或\ A^i = A\cdot e^i \qquad (2·4)$$

于是

$$A=(A\cdot e^i)e_i \tag{2·5a}$$

<u>基本性质1</u>　<u>正交性——Kronecker 数</u>

从上面对偶基的定义看出存在下列关系：

$$e^1\cdot e_1=e^2\cdot e_2=e^3\cdot e_3=1 \tag{2·6a}$$

写成一般形式

$$e^i\cdot e_j=\delta^i_j\left\{\begin{array}{ll}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{array}\right. \tag{2·6b}$$

符号 δ^i_j 称为 Kronecker delta

<u>基本性质2</u>．对偶基是綫性独立的。因为在綫性关系

$$\alpha_1e^1+\alpha_2e^2+\alpha_3e^3=0$$

中，所有数量 α_1，α_2 和 α_3 均为零，其实只要取上面关系与 e_i 的数量积就可証明 $\alpha_i=0$，$i=1, 2, 3$。

根据此性质，就可以用对偶基来表示任意向量

$$A=A_1e^1+A_2e^2+A_3e^3=A_ie^i \tag{2·7}$$

注意，这里对偶基为上指标，对应分量为下指标。

因 e^i 系是綫性独立的，可以采用类似上面的过程，用对偶基来表示原来的基 e_j

$$e_1=\frac{e^2\times e^3}{(e^1e^2e^3)},\ e_2=\frac{e^3\times e^1}{(e^1e^2e^3)},\ e_3=\frac{e^1\times e^2}{(e^1e^2e^3)} \tag{2·8}$$

在计算叉积时，按右手规則。类似于（2·4）有

$$A_1=A\cdot e_1,\ A_2=A\cdot e_2,\ A_3=A\cdot e_3,\ 或\ A_i=A\cdot e_i \tag{2·9}$$

及

$$A=(A\cdot e_i)e^i \tag{2·5b}$$

要注意，我們实际上只有一种基，因为对偶基是由给定基推导出来的。但是对于给定基我們却有两种方式表达同一向量，这就是向量A的协变（Cogredient）分量 A_1，A_2，A_3 和逆变（Contragr-edient）分量 A^1，A^2，A^3。这两个术語是得自当给定座标系变换到

另一个座标系时向量分量的变换方式。分量（A_1，A_2，A_3）的变换规律律与基$\{e_1, e_2, e_3\}$的变换规律相同，而分量（A^1，A^2，A^3）的变换规律与$\{e^1, e^2, e^3\}$的变换规律相同（与前一类正相反）。祥见后面。

2.3. 标准正交基系 Orthonormal Basis Systems

定义　当基是单位长并且正交，这种基系就是标准正交基。

性质　因有

$$[e_1 e_2 e_3] = 1 \qquad (2.10)$$

故

$$e^1 = e_1\ , e^2 = e_2\ , \ e^3 = e_3 \qquad (2.11a)$$

令

$$e^i = e_i \equiv \hat{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (2.11b)$$

这就是标准正交基。基系$\{e_1 e_2 e_3\}$与对偶基系$\{e^1, e^2, e^3\}$无区别，因之向量的协变分量与逆变分量间的差别也就消失了。譬如

$$A = \hat{A}_1 \hat{e}_1 + \hat{A}_2 \hat{e}_2 + \hat{A}_3 \hat{e}_3 = \hat{A}_i \hat{e}_i \qquad (2.12)$$

这时$\hat{A}_i$是相应的物理分量（physical components）——即分量具有和向量相同的物理因次。

置换符号　alternating(或Permutation) Symbol

为了表示两个规格化正交向量的叉积（在右手基系中），引入置换符号e_{ijk}是很方便的

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = e_{ijk} \hat{e}_k \qquad (2.13)$$

其中

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{若} i, j, k \text{呈循环次序，但不重复} \\ & (i \neq j \neq k) \\ -1, & \text{若} ijk \text{不呈循环次序，又不重复} \\ & (i \neq j \neq k) \\ 0, & \text{若} ijk \text{有任意重复} \end{cases} \qquad (2.14)$$

在标准正交基中，可分别用Kronecker delta $\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot$

$\hat{e}_j$和置换符e_{ijk}表示两个向量的数量积和向量积：

$$A\cdot B=(\hat{A}_i\hat{e}_i)\cdot(\hat{B}_j\cdot\hat{e}_j)=\hat{A}_i\hat{B}_j\delta_{ij}=\hat{A}_i\hat{B}_i$$
$$A\times B=(\hat{A}_i\hat{e}_i)\times(\hat{B}_j\hat{e}_j)=\hat{A}_i\hat{B}_je_{ijk}\hat{e}_k \qquad (2\cdot15)$$

e－δ恒等式(identity)

Kronecker delta 与置换符号e_{ijk}有关系恒等式

$$e_{ijk}e_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km} \qquad (2\cdot16)$$

这个恒等式在証明向量恒等式时是很有用的。因为任何一个恒等式的向量形式是不变量，只要在一个座标系中証明它成立，它就可以在任意座标系中适用。由于Kronecker delta和置换符号的关系标准正交基是很方便的

例2·1· 已知

$$e_1=-\hat{e}_1+\hat{e}_3$$
$$e_2=\hat{e}_2+\hat{e}_3$$
$$e_3=2\hat{e}_3$$

求得

① $\hat{e}_1=-e_1+\frac{1}{2}e_3$，$\hat{e}_2=e_2-\frac{1}{2}e_3$，$\hat{e}_3=\frac{1}{2}e_3$

点积 $e_1\cdot e_2=2$，$e_2\cdot e_2=2$，$e_3\cdot e_3=4$

$e_1\cdot e_2=1$，$e_2\cdot e_3=2$，$e_3\cdot e_1=2$

叉积

$$e_1\times e_2=\hat{e}_1+\hat{e}_2-\hat{e}_3=-e_1+e_2-\frac{3}{2}e_3$$
$$e_2\times e_3=2\hat{e}_1\qquad=-2e_1+e_3$$
$$e_3\times e_1=-2e_1\qquad=-2e_2+e_3$$

数量三重积

$$(e_1\,e_2\,e_3)=-2$$

② 对偶基

$$e^1=-\hat{e}_1,\ e^2=\hat{e}_2,\ e^3=\frac{1}{2}(\hat{e}_1-\hat{e}_2+\hat{e}_3)$$

$$\hat{e}_1=-e^1,\ \hat{e}_2=+e^2,\ \hat{e}_3=e^1+e^2+2e^3$$

点积 $e^1\cdot e^1=1,\ e^2\cdot e^2=1,\ e^3\cdot e^3=\frac{3}{4}$

$$e^1\cdot e^2=1,\ e^2\cdot e^3=-\frac{1}{2},\ e^3\cdot e^1=-\frac{1}{2}$$

叉积

$$e^1\times e^2=-\hat{e}_3\quad=-e^1-e^2-2e^3$$

$$e^2\times e^3=\frac{1}{2}\hat{e}_1-\frac{1}{2}\hat{e}_3=-e^1-\frac{1}{2}e^2-e^3$$

$$e^3\times e^1=-\frac{1}{2}\hat{e}_2-\frac{1}{2}\hat{e}_3=-\frac{1}{2}e^1-e^2-e^3$$

数量三重积

$$[e^1\ e^2\ e^3]=-\frac{1}{2}$$

例2·2· 求向量A在例2·1基系中的协变分量，逆变分量，已知A为

$$A=2\hat{e}_1+3\hat{e}_2+\hat{e}_3$$

求得結果如下（读者自己计算）

$$A^1=-2,\ A^2=3,\ A^3=0$$

$$A_1=-1,\ A_2=4,\ A_3=2$$

例2·3· 試証明

$$[e^1\ e^2\ e^3][e_1\ e_2\ e_3]=1 \qquad (2\cdot17)$$

証明：利用对偶基定义(2·3)式及下面向量恒等式可立即証得(2·17)

$$(A\times B)\times(C\times D)=-[ABC]D+[ABD]C$$
$$=[ACD]B-[BCD]A \qquad (2\cdot18)$$

例2·4· 試用e-δ恒等式証明向量恒等式

$$(A\times B)\cdot(C\times D)=(A\cdot C)(B\cdot D)-(A\cdot D)(B\cdot C) \qquad (2\cdot 19)$$

証明

$$
\begin{aligned}
(A\times B)\cdot(C\times D) &= \hat{A}_i\hat{B}_j e_{ijk}\hat{e}_k\cdot\hat{C}_m\hat{D}_n e_{mnp}\hat{e}_p \\
&= \hat{A}_i\hat{B}_j\hat{C}_m\hat{D}_n e_{ijk}e_{mnp}\delta_{kp} \\
&= \hat{A}_i\hat{B}_j\hat{C}_m\hat{D}_n e_{ijk}e_{mnk} \\
&= \hat{A}_i\hat{B}_j\hat{C}_m\hat{D}_n(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}) \\
&= \hat{A}_i\hat{B}_j\hat{C}_i\hat{D}_j-\hat{A}_i\hat{B}_j\hat{C}_j\hat{D}_i \\
&= \hat{A}_i\hat{C}_i\hat{B}_j\hat{D}_j-\hat{A}_i\hat{D}_i\hat{B}_j\hat{C}_j \\
&= (A\cdot C)(B\cdot D)-(A\cdot D)(B\cdot C)
\end{aligned}
$$

§3　向量的要求或定义

我們已经看到可以用或者是协变系內的三个分量，或者是逆变系內的三个分量来描述一个向量。于是一个向量可以用一組三个有序数来唯一地确定，这三个有序数就是向量的分量。

是不是只有向量的分量才能描述一个向量呢？不一定，有些并非分量的量也可以用来描述向量。为了说明这一点，考察向量 A，伴随协变基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 有逆变分量 (A^1, A^2, A^3)。令 α，β 和 γ 代表向量 A 与基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 的夹角：

$$\cos\alpha=\frac{A\cdot e_1}{|A|\,|e_1|} \qquad (3\cdot 1a)$$

$$\cos\beta=\frac{A\cdot e_2}{|A|\,|e_2|} \qquad (3\cdot 1b)$$

$$\cos\gamma=\frac{A\cdot e_3}{|A|\,|e_3|} \qquad (3\cdot 1c)$$

这里的每一組 (A^1, A^2, A^3)，(A^1, β, γ)，(α, A^2, γ)，和 (α, β, A^3) 都可确定 A 的大小和方向。

因此，从解析的观点看，我們就可以把向量看成是一組三个有序数，这三个有序数与基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 有一个联系。所謂“有序”是

指第一个数相应于e_1，第二个数相应于e_2，第三个数相应于e_3。

是不是每一組有序数都能确定一个向量呢？不是，因为这三个有序数还必須服从一定規則。为了了解如何建立这样的規則，我們从两个独立的基系中来考察并确定任意向量。尽管在两个不同系中，向量的各种分量是不同的，但向量作为一个整体必須是不变量（invariant）。因此可以建立一种規則，用另一个系中的相应的一組（数）来表示这个系中的一組（数）。

总結上面所讲，从解析的角度，向量定义为一組服从某一种指定規則的三个有序数。这些規則实际上代替了所謂的加法平行四边形定律。到此为止我們还未建立这些規則，怎样建立这些規則請看下节。

§4　不同基的变换定律（Transformation Law）

假設我們有二个不同的基

第一組基及其对偶基为：

$$\{e_1, e_2, e_3\}, \{e^1, e^2, e^3\}$$

第二組基及其对偶基为：

$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}, \{\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3\}$$

向量A用四种方式表示如下：

$$\left.\begin{aligned} A &= A^i e_i \\ &= A_j e^j \end{aligned}\right\}\text{无横綫基}$$
$$\left.\begin{aligned} &= \bar{A}^m \bar{e}_m \\ &= \bar{A}_n \bar{e}^n \end{aligned}\right\}\text{带横綫基} \qquad (4\cdot1)$$

由（2·4）有

$$\bar{A}^s = A\cdot\bar{e}^s \qquad (4\cdot2a)$$

把（4·1）中的A代入（4·2a）有

$$\bar{A}^s = (e_i\cdot\bar{e}^s)A^i = (e^j\cdot\bar{e}^s)A_j \qquad (4\cdot2b)$$

类似由（2·9）得到

$$\bar{A}_s = (e^j \cdot e_s)A_j = (e_i \cdot e_s)A^i \tag{4·2c}$$

方程(4·2b)和(4·2c)的头两式给出了两个基系中逆变分量和协变分量本身间的变换规则。

借助方程(2·5)，我們找到基系间的关系为

$$\bar{e}^s = (\bar{e}^s \cdot e_j)e^j = (\bar{e}^s \cdot e^j)e_j \tag{4·3a}$$

$$= (e_i \cdot \bar{e}^s)e^i = (e^i \cdot \bar{e}^s)e_i \tag{4·3b}$$

类似有

$$e_s = (e^j \cdot \bar{e}_s)e_j = (e_j \cdot \bar{e}_s)e^j \tag{4·4}$$

引入符号

$$a_s^j \equiv e^j \cdot \bar{e}_s \tag{4·5a}$$

$$b_i^s \equiv \bar{e}^s \cdot e_i \tag{4·5b}$$

則有

$$\bar{e}_s = a_s^j e_j \quad \bar{A}_s = a_s^j A_j \quad \text{协变律} \tag{4·5c}$$

$$\bar{e}^s = b_i^s e^i \ . \ \bar{A}^s = b_i^s A^i \quad \text{逆变律} \tag{4·5d}$$

这样就有两种变换律，按照它满足什么律，就指定下指标和上指标。下标基向量(即协变基)与下标分量(协变分量)按同样规律变换，即按协变律(the cogredient law)变换，上标基向量(逆变基)与上标分量(逆变分量)按另一种规律，即逆变律(the contragredient law)变换。

在两种基系中，下标和上标基向量和分量间还有一种关系存在。这种关系称为混合律(mixed lows)。令

$$c_{js} \equiv e_j \cdot \bar{e}_s \tag{4·6a}$$

$$d^{is} \equiv e^i \cdot \bar{e}^s \tag{4·6b}$$

因此有

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_s &= c_{js} e^j \ , \quad \bar{A}_s = c_{js} A^j \ , \\ \bar{e}^s &= d^{is} \bar{e}_i \ , \quad \bar{A}^s = d^{is} A_i \end{aligned}\right\} \text{混合律} \tag{4·6c}$$

在标准正交系中，变换律(4·5)，(4·6)化简为

$$\hat{\bar{e}}_i = (\hat{\bar{e}}_i \cdot \hat{e}_j)\hat{e}_j = \beta_{ij}\hat{e}_j \qquad (4\cdot 7)$$

系数β_{ij}可以看成带横綫座标系相对于不带横綫座标系的方向余弦：

$$\beta_{ij} = \hat{\bar{e}}_i \text{ 与 } \hat{e}_j \text{ 间夹角的余弦}$$

显然，β_{ij}不是对称的，即$\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$

例4·1· 已知$\hat{e}_i$(i=1, 2, 3)是一組标准正交基向量。另定义一組新右手座标基向量为

$$\hat{\bar{e}}_1 = \frac{2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3}{3}, \quad \hat{\bar{e}}_2 = \frac{\hat{e}_1 - \hat{e}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{\bar{e}}_3 = \hat{\bar{e}}_1 \times \hat{\bar{e}}_2 = \frac{(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 4\hat{e}_3)}{3\sqrt{2}}$$

求得β_{ij}矩陣$[\beta]$为

$$[\beta] = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

因为 $\{\hat{\bar{e}}\} = [\beta]\{\hat{e}\}$

习 题 1

1. 証明下述恒等式：

(a) $\delta_{ii} = 3$

(b) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii}$

(c) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$

(d) $e_{ijk}e_{ijk} = 6$

(e) $A_i A_j e_{ijk} = 0$

2. 証明

(a) 向量恒等式

$$A\times(B\times C)\equiv(A\cdot C)B-(A\cdot B)C \qquad (P1\cdot1)$$

(b) 利用(1·32)証明e-δ恒等式

3. 利用指标符号証明下面恒等式

(a) $(A\times B)\cdot(B\times C)\times(C\times A)=(A\cdot(B\times C))^2 \qquad (P1\cdot2)$

(b) $(A\times B)\times(C\times D)=[A\cdot(C\times D)]B-[B\cdot(C\times D)]A$

$(P1\cdot3)$

4. 決定下面向量組是否綫性独立

$$A=\hat{e}_1+\hat{e}_2,\ B=\hat{e}_2+\hat{e}_4,\ C=\hat{e}_3+\hat{e}_4,\ D=\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3+\hat{e}_4$$

这里 $\hat{e}_i$ 是四維空间内的规格正交单位基向量。

5. 已知两个座标系间夹角为

	$\hat{e}$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
$\hat{e}_1$	60°	30°	90°
$\hat{e}_2$	150°	60°	90°
$\hat{e}_3$	90°	90°	0°

決定变换律的方向余弦

6. 在直角笛卡儿座标系中，已知向量A是連接点(1, -1, 3)和从原点到点(6, -6, 4)的綫段的中点，試求A的长度和方向余弦。

7. 向量A和B定义如下：

$$A=3\hat{i}-4\hat{k}$$

$$B=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

其中 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 是标准正交基，試求

(a) A在向量B上的正交投影

(b) 两向量正向间的夹角

8. 令 $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ 为标准正交基，用此基定义协变基如下：

$$e_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\hat{i}+\frac{1}{4}\hat{j},\quad e_2=\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j},\quad e_3=\hat{k}$$

(a) 确定对偶或互逆基$\{e^1, e^2, e^3\}$，用$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$表示之

(b) 确定大小（或模）$|e_1|, |e_2|, |e_3|, |e^1|, |e^2|, |e^3|$

(c) 绘出e_1，e_2，e^1和e^2的略图。

9．已知协变基$\{e_1, e_2, e_3\}$，与第8题相同。向量A的逆变分量为$A^1=1$，$A^2=2$，$A^3=3$，試求协变分量A_1，A_2，A_3。

10．(Gram-Schmit 标准正交化)，令$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是一組綫性独立的向量。利用下述过程构造——标准正交集$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n)$：因为$e_1$是綫性独立集合中的一个元素，$e_1 \neq 0$，因此$|e_1|>0$，令$\hat{e}_1=e_1/|e_1|$，显然$|\hat{e}_1|=1$，其次从原来集合中選取向量$e_2$，并要求向量$e_2' = e_2 - \alpha\hat{e}_1$与$\hat{e}_1$正交:

$$0=\hat{e}_1 \cdot (e_2 - \alpha\hat{e}_1)=(\hat{e}_1 \cdot e_2)-\alpha|\hat{e}_1|^2$$

或$\alpha=(\hat{e}_1 \cdot e_2)$，因此所期望集合的第二个元素为$\hat{e}_2=[e_2-(\hat{e}_1 \cdot e_2)\hat{e}_1]/|e_2'|$。继续这个过程最后得到第$(r+1)$个元素

$$e'_{r+1}=e_{r+1}-(\hat{e}_1 \cdot e_{r+1})\hat{e}_1-(\hat{e}_2 \cdot e_{r+1})\hat{e}_2-\cdots -(\hat{e}_r \cdot e_{r+1})\hat{e}_r \qquad (P1 \cdot 4)$$

$$\hat{e}_{r+1}=\frac{e'_{r+1}}{|e'_{r+1}|}$$

11．由习题8的协变基构造一标准正交基。

12．利用Gram-Schmit标准正交化过程，构造与下面给出的协变基相伴的标准正交集合。

(a) $e_1=\hat{e}_1+\hat{e}_3$，$e_2=\hat{e}_1+2\hat{e}_2-2\hat{e}_3$，$e_3=2\hat{e}_1-\hat{e}_2+\hat{e}_3$

(b) $e_1=2\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3$，$e_2=\hat{e}_1-2\hat{e}_2+\hat{e}_3$，$e_3=-2\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3$

13．驗証两向量的叉积

$$A \times B = e_{ijk} A_i B_j C_k = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 \\ \hat{B}_1 & \hat{B}_2 & \hat{B}_3 \end{vmatrix} \qquad (P1 \cdot 5)$$

14. 验証数量三重积

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = e_{ijk}\hat{A}_i\hat{B}_j\hat{C}_k = \begin{vmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 & \hat{A}_3 \\ \hat{B}_1 & \hat{B}_2 & \hat{B}_3 \\ \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{C}_3 \end{vmatrix}$$

15. 根据实际计算，証明下面恒等式

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \qquad (P1\cdot7)$$

16. 証明 3×3 的矩陣〔A〕的行列式可以表示为

$$\det A = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{rst} a_{ir} a_{js} a_{kt} \qquad (P1\cdot8)$$

其中 a_{ij} 是矩陣〔A〕的第 i 行第 j 列的元素

17. 証明

$$[\mathbf{ABC}][\mathbf{DEF}] = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{F} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{F} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{F} \end{vmatrix} \qquad (P1\cdot9)$$

由此再証明 $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3][\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3] = 1$ (P1·10)

及

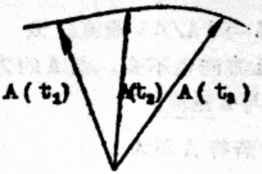
$$e_{ijk} e_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} \qquad (P1\cdot11)$$

第二章　向量微积分——曲線座标系

§1. 曲線座标系

1·1· 引言—对数量的微分

設有一向量 A，它是一个数量 t 的向量函数，$A = A(t)$，一般講，对于不同的 t 值，A 有不同的大小和方向，表示在图 2·1 中。



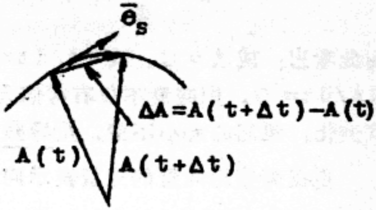


图 2·1　数量的向量函数的变化　　　　图 2·2　向量的微分变化

现在考虑 t 的两个值，t 和 $t+\Delta t$ 如图 2·2 所示。由图很易想像出向量 A 对于 t 的导数

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t} \qquad (1\cdot 1)$$

令 $\Delta s = |\Delta A|$，s 是沿軌迹度量的距离，于是

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

极限情况，$\Delta A/\Delta s$ 是沿軌迹切向方向的单位向量，即 $\hat{e}_s$。因此有

$$\frac{dA}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\hat{e}_s \qquad (1\cdot 2)$$

显然，向量的导数与向量本身的大小和方向均不相同，ds/dt 是距离 s 对于 t 沿軌迹的变化率。

一种重要情况是等长度（大小）的向量，这时由一般情况

$$A\cdot A = A^2(t) \qquad (1\cdot 3a)$$

两边对 t 微分

$$A\cdot\frac{dA}{dt}=A\frac{dA}{dt} \qquad (1\cdot 3b)$$

当 A 有常值大小时，即 $\frac{dA}{dt}=0$，则

$$A\cdot\frac{dA}{dt}=0 \qquad (1\cdot 3c)$$

由此看出：或 A = 0，或 dA/dt = 0，或 A 与 dA/dt 垂直。若 dA/dt = 0，则向量不仅有常值大小，而且方向也不变。若 A 的方向变化，但它的大小不变，则导数 dA/dt 与 A 垂直。

现在考察用向量的分量表示向量的导数若将 A 写为

$$A=A^1(t)e_1+A^2(t)e_2+A^3(t)e_3$$

必须记住基向量也是数量 t 的函数。于是，有

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA^1}{dt}e_1+\frac{dA^2}{dt}e_2+\frac{dA^3}{dt}e_3+A^1\frac{de_1}{dt}+A^2\frac{de_2}{dt}+A^3\frac{de_3}{dt}$$

在笛卡儿 Cartesian 系中，基向量是常数。这时，只有在这种系中导数 de_i/dt 为零。

例 1、1、考察一质点在半径为 a 的园形轨道内以等速 v 运动，则

$$\frac{dr}{dt}=V=\omega\times r,\quad \omega=\frac{v}{a}\hat{e}_z,\quad r=ae_r$$

其中 $\hat{e}_r$ 是沿向径 r 的单位向量，$\hat{e}_r=\frac{r}{a}$，$\hat{e}_z$ 是垂直于轨道平面的单位向量。质点的加速度为（因 $\hat{e}_z$ 的方向不随时间变化）。

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\times\frac{dr}{dt}=\frac{v}{a}\frac{d\hat{e}_z}{dt}\times r+\omega\times V$$

$$=\omega\times V=\left(\frac{v}{a}\right)\hat{e}_z\times(\omega\times r)=\frac{v^2}{a}\left(\hat{e}_z\times(\hat{e}_z\times\hat{e}_r)\right)$$