吉米多维奇

数学分析

习题集精选详解

主编：郑 琴 赵 颖 张 瑰 王 璞

（上册）

经典名著最新版本 数学名家权威解读

选题精当解析详尽 深入浅出适用面广

东南大学出版社
Southeast University Press

吉米多维奇数学分析习题集
精选详解(上)

主编:郑 琴 赵 颖

张 瑰 王 璞

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部影响力巨大的国际知名学术著作。我们从吉米多维奇的《数学分析习题集》中选择最具代表性的2073道题，汇编成《吉米多维奇数学分析习题集精选详解》上、下册，本书可供高等院校理工类、财经类学生学习、考研使用，也可作为相关专业教师的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集精选详解. 上/郑琴，赵颖，张瑰，王璞主编. —南京：东南大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-5641-2706-0

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①郑… ②赵… ③张… ④王… Ⅲ.①数学分析—题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第053270号

吉米多维奇数学分析习题集精选详解(上)

主　　编	郑琴　赵颖　张瑰　王璞	责任编辑	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼2号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	17　　字　数　400千
版　　次	2011年6月第1版第1次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-2706-0		
定　　价	25.00元		

前　言

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部影响力巨大的国际知名学术著作，尤其在我国，自 20 世纪 50 年代出版以来，一直是各大专院校的必备参考书籍。

该书内容丰富，由浅入深，涉及的内容几乎囊括了高等数学《数学分析》的全部命题。但该书习题数量多（原书共 4462 道题），许多题目在题型和解题方法上具有相似之处，同时该书难题多，许多题目的难度超出教学要求。为了帮助广大学生更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们从吉米多维奇的《数学分析习题集》中选择最具代表性的 2073 道题，汇编成《吉米多维奇数学分析习题集精选详解》上、下册。为了便于读者查阅，本书中各题前所标的黑括号【】中数字表示该题在原书的题号。

这些习题涉及内容广、题型多，既有基础性，又有技巧性，其中基础题从多个角度帮助理解相应的基本概念和基本理论，锻炼基本解题方法；而层次较高的习题，有助于开拓解题思路，使数学的分析能力和应用能力进一步加强。

本书解题思路明了，步骤详细，过程清晰，是广大本、专科理工科同学学习高等数学的理想参考书，同时也可作为研究生入学考试的数学参考书。

本书的策划、编写、审稿等过程得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示由衷感谢。解放军理工大学的颜超、张纯、陆小庆、张晓蓉以及杨传兵、卢月、王浩、邱颖萍、刘娟、胡俊、周雨濛、蔡春光、缪蓉、余华凤、张园等也参加了编写工作，由于我们水平有限，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

目录

第一章　分析引论 ……………………………………（ 1 ）

§1. 实数 ……………………………………………（ 1 ）
§2. 序列的理论 ……………………………………（ 9 ）
§3. 函数的概念 ……………………………………（ 29 ）
§4. 函数的图示法 …………………………………（ 36 ）
§5. 函数的极限 ……………………………………（ 41 ）
§6. 无穷大和无穷小的阶 …………………………（ 81 ）
§7. 函数的连续性 …………………………………（ 87 ）
§8. 反函数、用参数表示的函数……………………（103）
§9. 函数的一致连续性 ……………………………（106）

第二章　一元函数的微分学 ………………………………（115）

§1. 显函数的导数 …………………………………（115）
§2. 反函数的导数、用参数表示的函数的导数、隐函数的导数 ……………………………………………（157）
§3. 导数的几何意义 ………………………………（161）
§4. 函数的微分 ……………………………………（169）
§5. 高阶导数和微分 ………………………………（173）
§6. 罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理 ……………………………………………（195）
§7. 函数的递增与递减、不等式……………………（211）

§8. 凹凸性、拐点…………………………………… (228)
§9. 未定型的求值 ……………………………… (234)
§10. 泰勒公式…………………………………… (245)
§11. 函数的极值、最大值和最小值 ………………… (254)
§12. 依据函数的特征点作函数图形………………… (264)
§13. 函数的极大值与极小值问题…………………… (281)
§14. 曲线相切、曲率圆、渐屈线…………………… (289)

第三章　不定积分 …………………………………… (293)

§1. 最简单的不定积分 ………………………… (293)
§2. 有理函数的积分法 ………………………… (342)
§3. 无理函数的积分法 ………………………… (361)
§4. 三角函数的积分法 ………………………… (386)
§5. 各种超越函数的积分法 …………………… (407)
§6. 函数积分法的各种例题 …………………… (423)

第四章　定积分 …………………………………… (438)

§1. 定积分作为和的极限 ……………………… (438)
§2. 用不定积分计算定积分的方法 …………… (441)
§3. 中值定理 …………………………………… (466)
§4. 广义积分 …………………………………… (473)
§5. 面积的计算方法 …………………………… (496)
§6. 弧长的计算方法 …………………………… (509)
§7. 体积的计算方法 …………………………… (514)
§8. 旋转曲面面积的计算方法 ………………… (523)
§9. 矩的计算法、重心坐标……………………… (529)
§10. 力学和物理学中的问题…………………… (534)
§11. 定积分的近似计算方法…………………… (536)

第一章　分析引论

§1. 实　数

1. 数学归纳法

为了证明某定理对任意自然数 n 是正确的，只要证明下面两点：

(1) 该定理对 $n=1$ 是正确的；(2) 若该定理对任何一个自然数 n 是正确的，则它对其后的一个自然数 $n+1$ 也是正确的.

2. 分割

若把有理数分为 A、B 两类，使其满足下列条件：(1) 两类均非空集；(2) 每个有理数必属于一类，且仅属于一个类；(3) 属于 A 类(下类) 的任何数都小于属于 B 类(上类) 的任意数，此分类法被称之为分割.

(a) 若或者下类 A 有最大数，或者上类 B 有最小数，则分割 $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ 确定一个有理数；(b) 若 A 类没有最大数，且 B 类没有最小数，则分割 $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数*.

3. 绝对值

若 x 为实数，则由下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

---

* 今后如没有相反的说明，我们把所研究的数都理解为实数.

$$|x| = \begin{cases} -x, & 若\ x < 0, \\ x, & 若\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

对于任何实数 x 和 y,下列不等式成立:

$$|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

4. 上确界和下确界

设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合,若:

(1) 每一个 $x \in X$* 满足不等式

$$x \geqslant m,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$,存在 $x' \in X$,使得

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样,若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$ 存在 $x'' \in X$,使得

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界,则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界,则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5. 绝对误差和相对误差

若 $a(a \neq 0)$ 是被测量的准确值,而 x 是这个量的近似值,则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差,而

---

* 符号 $x \in X$ 表示元素 x 属于集合 X.

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

如果 x 的绝对误差不超过其第 n 个有效数字的单位的一半，则说明 x 有 n 位准确的数字.

【6】 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则当 $n=k+1$ 时,由于

$$x_i > -1 \quad (i=1,2,\cdots,k+1),$$

所以 $1+x_i>0$,因此有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\ &\geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\ &= (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\ &\quad +(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

又由于 $\quad x_ix_j \geqslant 0, \quad (i,j=1,2,\cdots,k+1),$

所以 $\quad (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})$

$$\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【7】 证明若 $x>-1$,则不等式 $(1+x)^n \geqslant 1+nx\,(n>1)$ 成立,且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

证 当 $n=2$ 时,

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geqslant 1+2x.$$

即不等式成立,当等号成立时,有 $x=0$.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即$(1+x)^k \geqslant 1+kx$ 且等号仅当 $x=0$ 时才成立.

当 $n=k+1$ 时,由于 $1+x \geqslant 0$,有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geqslant (1+kx)(1+x)\\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x,\end{aligned}$$

且等号仅当 $x=0$ 时才成立.

于是,由数学归纳法,对任何自然数 $n(n>1)$,不等式$(1+x)^n \geqslant 1+nx$ 成立,且仅当 $x=0$ 时等号成立.

【8】 证明:当 $n>1$ 时,$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

提示:利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1,2,\cdots).$$

证 当 $n=2$ 时,因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

而
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而
$$(k+1)!<\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}=\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}.$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 $n>1$ 有 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$.

【10】 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证　当 $n=1$ 时,显然有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式成立.

设当 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}.$$

而　$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

事实上,我们有 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$,

即　$$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2.$$

从而我们有 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$,

因此

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

即当 $n=k+1$ 时,不等式成立.

由数学归纳法,命题证毕.

【16】 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$(其中 m 和 n 为自然数,且 $0<m<n$)的集合无最小和最大元素.并求该集合的上确界和

下确界.

证 令$E=\left\{\dfrac{m}{n}\middle| m,n\text{ 为自然数,且 }0<m<n\right\}$,若$\dfrac{m}{n}\in E$,则$\dfrac{m+1}{n+1}\in E$,且$\dfrac{m+1}{n+1}>\dfrac{m}{n}$.因此$E$中无最大元素.

又若$\dfrac{m}{n}\in E$,则$\dfrac{m^2}{n^2}\in E$,且$\dfrac{m^2}{n^2}<\dfrac{m}{n}$,故$E$中无最小元素.显然$\sup E=1,\inf E=0$.

【18】 $\{x\}$为数集,$-x$为x的相反数,证明:(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$;(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证 (1) 设$\inf\{-x\}=m$,则有

(a) 当$-x\in\{-x\}$时,$-x\geqslant m$;

(b) 对任何$\varepsilon>0$,存在$-x'\in\{-x\}$,使得

$$-x'<m+\varepsilon,$$

因此由(a)及(b)得

(c) 当$x\in\{x\}$时,$x\leqslant -m$;

(d) 对任何$\varepsilon>0$,存在$x'\in\{x\}$,使得

$$x'>-m-\varepsilon.$$

因此 $\sup\{x\}=-m$,

即 $m=-\sup\{x\}$,

所以 $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

(2) 设$\sup\{-x\}=M$,则由上确界的定义有

(a) 当$-x\in\{-x\}$时,$-x\leqslant M$;

(b) 对任何$\varepsilon>0$,存在$-x'\in\{-x\}$,使得

$$-x'>M-\varepsilon.$$

因此由(a)及(b)得

(c) 当$x\in\{x\}$时,$x\geqslant -M$;

(d) 对任何$\varepsilon>0$,存在$x'\in\{x\}$,使得

$$x' < -M + \varepsilon.$$

因此 $\inf\{x\} = -M$,

即 $M = -\inf\{x\}$,

亦即 $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

【19】 设$\{x+y\}$是所有$x+y$的和的集合,其中$x \in \{x\}$,$y \in \{y\}$.证明下列等式成立:

(1) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (1) 设$\inf\{x\} = m_1$,$\inf\{y\} = m_2$,则有

(a) 当$x \in \{x\}$,$y \in \{y\}$时,$x \geqslant m_1$,$y \geqslant m_2$,

从而 $x + y \geqslant m_1 + m_2$;

(b) 对任何$\varepsilon > 0$,存在$x' \in \{x\}$,$y' \in \{y\}$,使得$x' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2}$,$y' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}$,从而$x' + y' < (m_1 + m_2) + \varepsilon$.

因此 $\inf\{x+y\} = m_1 + m_2$,

即 $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

(2) 同理可证:

$$\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

【20】 设$\{xy\}$是所有xy乘积的集合,其中$x \in \{x\}$,$y \in \{y\}$,且$x \geqslant 0$,$y \geqslant 0$.证明:

(1) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

证 (1) 设$\inf\{x\} = m_1$,$\inf\{y\} = m_2$,因为$x \geqslant 0$,$y \geqslant 0$,故$m_1 \geqslant 0$,$m_2 \geqslant 0$,于是我们有:

(a) 当$x \in \{x\}$,$y \in \{y\}$时,

$$x \geqslant m_1 \geqslant 0, \quad y \geqslant m_2 \geqslant 0,$$

从而 $xy \geqslant m_1 m_2$;

(b) 对任何$\varepsilon > 0$,存在$x' \in \{x\}$,$y' \in \{y\}$,使得

$$0 \leqslant x' < m_1 + \varepsilon, \quad 0 \leqslant y' < m_2 + \varepsilon,$$

从而存在 $x'y' \in \{xy\}$，使得

$$0 \leqslant x'y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中 $\quad \varepsilon' = (m_1 + m_2)\varepsilon + \varepsilon^2.$

因此 $\quad \inf\{xy\} = m_1 \cdot m_2 = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}.$

(2) 同理可证：

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}.$$

【26】 解不等式 $|x+2| + |x-2| \leqslant 12.$

解 令 $x+2 = t$，则有

$$|t| + |t-4| \leqslant 12,$$

即 $\quad |t-4| \leqslant 12 - |t|.$

两边平方得 $t^2 - 8t + 16 \leqslant 144 - 24|t| + t^2$，

即 $\quad 3|t| \leqslant 16 + t.$

将上式两边平方，化简得 $t^2 - 4t - 32 \leqslant 0$，

解之得 $\quad -4 \leqslant t \leqslant 8,$

即 $\quad -4 \leqslant x + 2 \leqslant 8,$

因此 $\quad -6 \leqslant x \leqslant 6.$

【31】 当测量长度 10 cm 时，绝对误差为 0.5 mm；当测量距离 500 km 时，绝对误差等于 200 m. 哪种测量较为精确？

解 用相对误差 $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$ 进行比较，其中 a 为被测量的精确值，Δ 为绝对误差.

对于前者：$\delta = \dfrac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%.$

对于后者：$\delta = \dfrac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%.$

所以，测量距离 500 km 时，测量较为精确.

【32】 设数 $x = 2.3752$，若这个数的相对误差为 1%，试求此数包含几位精确数字？

解　因为$\frac{\Delta}{2.3752}=0.01$,所以$\Delta=0.023752<0.05=\frac{0.1}{2}$.
因此,此数包含两位精确数字.

【37】　测得直角平行六面体$x=24.7\ \mathrm{m}\pm0.2\ \mathrm{m}$;$y=6.5\ \mathrm{m}\pm0.1\ \mathrm{m}$,$z=1.2\ \mathrm{m}\pm0.1\ \mathrm{m}$.这个平行六面体的体积$V$在什么范围内?若测量结果都取其平均值,则求出的这个平行六面体的体积的绝对误差和相对误差为多少?

解　$24.5\times6.4\times1.1\leqslant V\leqslant24.9\times6.6\times1.3$,
即$172.480(\mathrm{m}^3)\leqslant V\leqslant213.642(\mathrm{m}^3)$.

当x,y,z均取平均值时,

$$V=24.7\times6.5\times1.2=192.660(\mathrm{m}^3),$$

$$\Delta_1=213.642-192.660=20.982(\mathrm{m}^3),$$

$$\Delta_2=192.660-172.480=20.180(\mathrm{m}^3),$$

故

$$\Delta\leqslant20.982(\mathrm{m}^3),$$

$$\delta\leqslant\frac{20.982}{172.480}\approx12.2\%.$$

§2. 序列的理论

1. 序列极限的概念

假设对于任何的$\varepsilon>0$,存在数$N=N(\varepsilon)$,使得当$n>N$时,

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称序列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$或$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$有极限$a$(简称收敛于$a$),即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.特别地,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则称$x_n$为无穷小.

没有极限的序列称为发散的.

2. 极限存在的准则

(1) 若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

(2) 单调且有界的序列具有极限.

(3) 柯西判别法　序列$\{x_n\}$极限存在的必要且充分条件是：对于任何的$\varepsilon>0$,都存在数$N=N(\varepsilon)$,使当$n>N$和$p>0$时，有
$$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon.$$

3. 序列极限的基本定理

假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在,则有

(1) 若$x_n\leqslant y_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4. 数 e

序列$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$具有有限极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots.$$

5. 无穷极限

符号$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$表示：对于任何的$E>0$,都存在数$N=N(E)$,使当$n>N$时,$|x_n|>E$.

6. 极限点(聚点)

若存在子序列：
$$x_{p_1},x_{p_2},\cdots,x_{p_n},\cdots\quad(1\leqslant p_1<p_2<\cdots),$$
使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\xi$,则数$\xi$(或符号$\infty$)称为已知序列$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$的聚点.

任何有界序列至少有一个有穷的聚点(**布尔查诺-维尔斯特拉斯原理**).如这个聚点是惟一的,则它就是该序列的有穷极限.

序列$\{x_n\}$的最小聚点(有穷的或无穷的)$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$称作下极限;

而其最大聚点$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 称为此序列的上极限. 等式$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 是序列$\{x_n\}$ 的(有穷的或无穷的) 极限存在的必要且充分条件.

【44】 证明:$x_n=n^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$无界,但是当$n\to\infty$时,它并不是无穷大.

证　因为

$$x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & \text{当 } n=2k \text{ 时},\\ \dfrac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时},\end{cases}$$

所以$x_{2k}\to\infty$,$x_{2k+1}\to 0(k\to\infty)$,故$x_n$ 无界,且不趋于无穷大.

假设 n 为自然数列,确定下列各式$(47\sim 57)$ **的值:**

【47】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解　因为$|\sin n!|\leqslant 1$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

【51】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

解　$\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}.$$