

 **文都教育**

文都考研命题研究中心策划  
全国200座城市考研辅导班指定用书

**考研数学** **2011**


**接力题典**

**1800**

**通关 高分 夺冠必备**

主编◎汤家凤

“基础——强化——高分”层层上升步步为营  
紧扣最新考试大纲要求 科学选题精练精讲  
解题思路清晰展现 方法技巧权威点拨

 原子能出版社

 **文都教育**

文都考研命题研究中心策划  
全国200座城市考研辅导班指定用书

013-44/243  
:2011  
2009

**考研数学 2011**

**接力题典**

**1800**

**通关 高分 夺冠 必备**

主编◎汤家凤

 **原子能出版社**

**图书在版编目(CIP)数据**

考研数学接力题典1800:通关、高分、夺冠必备/汤家凤著. —北京:原子能出版社,2009.11  
ISBN 978-7-5022-4730-0

I. 考... II. 汤... III. 高等数学-研究生-入学考试-习题  
IV. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第209975号

**考研数学接力题典1800:通关、高分、夺冠必备**

---

总编辑 杨树录  
策 划 文都考研命题研究中心  
责任编辑 张 梅 侯茸方  
特约编辑 官 静  
印 刷 北京九天志诚印刷有限公司  
出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)  
经 销 全国新华书店  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 26.5 字 数 350千字  
版 次 2009年11月第1版 2009年11月第1次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5022-4730-0 定 价 40.00元

---

网址:<http://www.aep.com.cn>

E-mail: [atomep123@126.com](mailto:atomep123@126.com)

发行电话:010-68452845

版权所有 侵权必究

# 前 言

硕士研究生入学统考数学试卷分为三种,分别为数学一、数学二、数学三,各卷种试卷题型结构均为选择题、填空题、解答题(包括计算题、证明题、应用题等),其中客观题(选择题及填空题)占56分左右,主观题(解答题)占94分左右。由于考研数学复习内容广泛,基本概念、基本公式、基本方法多,同时强调计算能力、逻辑推理能力、抽象思维能力、空间想象能力及综合运用所学知识解决实际问题的能力,所以对于广大考生而言,要在复习过程中做到牢固掌握基础知识并且融会贯通就显得很棘手,拥有一本能够通过分层递进习题训练实现基础知识的掌握和解题的方法技巧的同步提高,帮助同学们最终取得高分的复习参考书成为广大学子的迫切要求。

本书是编者在长期进行考研数学授课和对最新数学考试大纲深入研究的基础上,根据考试命题的重点和考生的弱点,从广大考生的实际要求出发精心编写而成。全书分为高等数学、线性代数、概率统计三大部分(其中数学二对概率统计不作要求),每一部分的各个专题的题目都将知识要点系统融入问题之中,帮助考生在做题的过程中进一步加深对知识点、基本原理和基本方法技巧的理解和掌握。

## 本书的亮点在于:

1. 每一部分的题型设置严格依据最新考纲的规定,在题目选取方面,“通关题”融合了基本概念、原理、方法的考查,知识点覆盖面广,题型丰富新颖。考生通过这一部分习题的系统训练,能够对大纲规定的考点产生深入透彻的认识,掌握解题常用的方法和要领。

2. 每一部分挑选大量要求同学们运用综合运算能力和解决实际问题能力作答的问题,这与考纲要求考生具备一定的综合运算知识的能力、空间想象能力、计算能力、运用所学知识解决实际问题以及一定的逻辑推理的能力相符合。考生通过“高分题”部分的练习,可以显著提高计算能力、推理能力、空间想象能力和逻辑推理能力,这对数学考试取得高分起着至关重要的作用。

3. 每一部分设置一定量的难度较大、综合性较高的题目,这一部分的“夺冠题”对数学基础要求更高,有些题目具有一定的构造性,在计算复杂度和解题方法、技巧方面对同学们提出较高难度的挑战,比较适合复习最后阶段练习使用。

为方便读者使用,本书中仅对数学一考生要求的部分标有“\*”记号;仅对数学二、数学三考生要求的部分相应标有“○”“△”记号;公共部分无标记(依据最新

考试大纲)。

数学的复习是一个循序渐进的过程,同学们复习时一定要先把基本概念、基本公式、基本原理掌握好,然后做一些基础练习(在每年的试题中基本题型占有相当大的比例,切忌一开始就好高骛远),掌握好基础后再通过综合题型的训练进一步掌握各种方法和技巧,从而大幅度提高解题能力和应试水平,这也是本书的出发点和目的所在。

在本书的编写过程中,文都考研命题研究中心的全体同志做了大量有益的工作,尤其是宫静老师付出非常辛勤的劳动,在此表示衷心的感谢。

由于本书的编写过程时间仓促,错误和疏漏之处难免,欢迎广大读者和同行不吝指教。

**编者**

**2009年11月**

# 目 录

## 第一部分 接力题典 1800

<b>第一篇 高等数学</b> .....	3
一、函数、极限、连续 .....	3
二、一元函数微分学 .....	12
三、一元函数积分学 .....	25
四、向量代数与空间解析几何 .....	39
五、多元函数微分学 .....	42
六、重积分 .....	47
七、曲线积分与曲面积分 .....	52
八、无穷级数 .....	57
九、常微分方程与差分方程 .....	66
<b>第二篇 线性代数</b> .....	72
一、行列式 .....	72
二、矩阵 .....	74
三、向量 .....	79
四、线性方程组 .....	83
五、矩阵的特征值和特征向量 .....	89
六、二次型 .....	96
<b>第三篇 概率统计</b> .....	99
一、随机事件与概率 .....	99
二、随机变量及其分布 .....	103
三、多维随机变量及其分布 .....	106
四、随机变量的数字特征 .....	112
五、大数定律和中心极限定理 .....	116
六、数理统计的基本概念 .....	118
七、参数估计 .....	121
八、假设检验 .....	123

## 第二部分 接力题解 1800

<b>第一篇 高等数学答案解析</b> .....	127
---------------------------	-----

一、函数、极限、连续 .....	127
二、一元函数微分学 .....	151
三、一元函数积分学 .....	183
四、向量代数与空间解析几何 .....	216
五、多元函数微分学 .....	223
六、重积分 .....	235
七、曲线积分与曲面积分 .....	247
八、无穷级数 .....	264
九、常微分方程与差分方程 .....	286
<b>第二篇 线性代数答案解析 .....</b>	<b>301</b>
一、行列式 .....	301
二、矩阵 .....	305
三、向量 .....	312
四、线性方程组 .....	319
五、矩阵的特征值和特征向量 .....	332
六、二次型 .....	350
<b>第三篇 概率统计答案解析 .....</b>	<b>357</b>
一、随机事件与概率 .....	357
二、随机变量及其分布 .....	364
三、多维随机变量及其分布 .....	373
四、随机变量的数字特征 .....	386
五、大数定律和中心极限定理 .....	398
六、数理统计的基本概念 .....	400
七、参数估计 .....	405
八、假设检验 .....	410

# 第一部分

接力题典 1800





# 第一篇 高等数学

## 一 函数、极限、连续

### ◆ 通关题 ◆

#### 一、填空题

1. 设  $f(x) = \sin x$ ,  $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$ , 则  $\varphi(x) =$  \_\_\_\_\_, 定义域为 \_\_\_\_\_。
2. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{2009}}{(x-1)^k - x^k} = C (\neq 0, \infty)$ , 则  $k =$  \_\_\_\_\_,  $C =$  \_\_\_\_\_。
3. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x+1} - ax^2 - bx - c \right) = 2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_,  $c =$  \_\_\_\_\_。
4. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} =$  \_\_\_\_\_。
5. 设  $a > b > c > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} =$  \_\_\_\_\_。
6. 设  $x > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + x^n + \left( \frac{x^2}{2} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} =$  \_\_\_\_\_。
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x \arctan 2x}} =$  \_\_\_\_\_。
8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} =$  \_\_\_\_\_。
9.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \tan \frac{\pi}{4} x =$  \_\_\_\_\_。
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x} =$  \_\_\_\_\_。
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] =$  \_\_\_\_\_。
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right] =$  \_\_\_\_\_。
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} =$  \_\_\_\_\_。
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \sin \frac{x}{3} \right)^{\frac{2}{x}} =$  \_\_\_\_\_。

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x - \sin x)^{\frac{1}{x^2 \ln(1+x)}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt = \underline{\hspace{2cm}}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos x dx}{\ln(1+x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
19. 设  $a \neq \frac{1}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \sin \frac{1}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - \ln(e^2 + x)}{\arctan x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[ \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \sqrt{4n^2 + 1} \pi = \underline{\hspace{2cm}}$ .
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt - \ln \sqrt{1+x^2}}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{x}{e^{x^2} - 1} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^2 - x \ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
31. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\dots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
32. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .
33. 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $k \sin^2 x \sim \sqrt{4+x^2} - \sqrt{4-x^2}$ , 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .
34. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x - \cos x}{2x^2}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$  处处连续, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .
35. 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin 2x^2 + e^{ax^2} - 1}{\ln(1+2x^2)}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

36. 设  $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{2}{\arctan x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

37. 设  $f(x)$  连续可导,  $f(0) = 0$  且  $f'(0) = b$ , 若  $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \sin x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处

连续, 则  $A =$  \_\_\_\_\_。

二、选择题

1. 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f\{f[f(x)]\}$  等于 ( )

(A) 0

(B) 1

(C)  $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

2.  $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ ,  $-\infty < x < +\infty$  是 ( )

(A) 有界函数

(B) 单调函数

(C) 周期函数

(D) 偶函数

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中, 哪个是比其他三个更高阶的无穷小 ( )

(A)  $x^2$

(B)  $1 - \cos x$

(C)  $\sqrt{1-x^2} - 1$

(D)  $x - \tan x$

4. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 下列无穷小中, 阶数最高的是 ( )

(A)  $\ln(1+x^2) - x^2$

(B)  $\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2$

(C)  $\int_0^{x^2} \ln(1+t^2) dt$

(D)  $e^{x^2} - 1 - x^2$

5. 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(x - \sin x) \ln(1+x)$  是比  $e^{x^n} - 1$  高阶的无穷小, 而  $e^{x^n} - 1$  是比  $\frac{1}{x} \int_0^x (1 - \cos^2 t) dt$  高阶的无穷小, 则  $n$  为 ( )

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

6.  $f(x) = 2^x + 3^x - 2$ , 当  $x \rightarrow 0$  时 ( )

(A)  $f(x) \sim x$

(B)  $f(x)$  是  $x$  的同阶但非等价的无穷小

(D)  $f(x)$  是  $x$  的高阶无穷小

(D)  $f(x)$  是  $x$  的低阶无穷小

7. 设  $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin^2 t dt$ ,  $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

(A) 低阶无穷小

(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小

(D) 同阶但非等价的无穷小

8. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  ( )

(A) 等于 1

(B) 为  $\infty$

(C) 不存在但不是  $\infty$

(D) 等于 0

9. 当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$  的极限为 ( )

(A) 2

(B) 0

(C)  $\infty$

(D) 不存在但不是  $\infty$

10. 设  $f(x)$  连续且  $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  为 ( )

(A)  $a^2$

(B)  $a^2 f(a)$

(C) 0

(D) 不存在

11. 设  $f(x)$  一阶连续可导, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\arcsin x}} =$  ( )  
 (A)  $e^{-1}$  (B)  $e$  (C)  $e^2$  (D)  $e^3$
12. 设  $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的 ( )  
 (A) 连续点 (B) 第一类间断点  
 (C) 第二类间断点 (D) 不能判断连续性的点
13. 设  $f(x)$  是不恒为零的奇函数, 且  $f'(0)$  存在, 则  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  ( )  
 (A) 在  $x = 0$  处无极限 (B)  $x = 0$  为其可去间断点  
 (C)  $x = 0$  为其跳跃间断点 (D)  $x = 0$  为其第二类间断点
14. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ , 则  $f(x)$  ( )  
 (A) 无间断点 (B) 有间断点  $x = 1$   
 (C) 有间断点  $x = -1$  (D) 有间断点  $x = 0$
15. 设  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{ax+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = b$ , 其中  $a, b$  为常数, 则 ( )  
 (A)  $a = 1, b = 1$  (B)  $a = 1, b = -1$   
 (C)  $a = -1, b = 1$  (D)  $a = -1, b = -1$
16.  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 则  $x = 0$  是函数  $g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  的 ( )  
 (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点  
 (C) 连续点 (D) 第二类间断点

### 三、解答题

求下列极限:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} (x \neq 0)$
- 设  $a_n = \sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3+n^2+n+1} + \frac{2^2}{n^3+n^2+n+2} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^2+n+n} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n^2}} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right]$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \cdots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\ln(1+x)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \ln(1+2x)}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos 2x}{x(e^x - 1)}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - A}{x - a} = K, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^A}{x^2 - a^2} (a \neq 0).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \tan^2 \frac{1}{x^2}$$

$$15. \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left[1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right]}{\arctan^2 x} = A, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$$

18. 设  $f(x) = \int_0^{\tan x} \arctan t^2 dt$ ,  $g(x) = x - \sin x$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 比较这两个无穷小的关系。

19. 设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \cos x]^{\frac{1}{x}} = e^3$ , 且  $f'(0)$  存在, 求  $f'(0)$ 。

20. 设  $f(x)$  二阶连续可导,  $f''(0) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$ 。

求下列极限:

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} \right)^{n+1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x - \tan x)}}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \text{ (其中 } a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n))$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \sin x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2 \sin x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x \ln(1+x) - 1}{x - \sin x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \ln(1-x) - \ln(1-x^2)}{x^4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax - a \sin x}{x(1 - \cos ax)}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{2x-1}} - e^{\frac{1}{2x+1}})$$

31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{\pi}{n} - \arctan \frac{\pi}{n+1} \right)$
32. 设曲线  $y = x^n$  在点  $(1, 1)$  处的切线交  $x$  轴于点  $(\xi_n, 0)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^{2n}$ .
- 求下列极限中的参数:
33. 确定常数  $a, b, c$  的值, 使得当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x(1 + bx + cx^2) = 1 + ax + o(x^3)$ .
34. 确定常数  $a, b, c$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x (e^t - 1) dt} = c$ , 其中  $c$  为非零常数.
35. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 0$ , 求  $a, b$ .
36. 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} + cx + d) = 0$ , 求  $a, b, c, d$ .
37. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$  是连续函数, 求  $a, b$ .
38. 求常数  $m, n$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{\sin(x^2 - 1)} = 3$ .
39. 设  $a_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}_{(n \text{ 重})}$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
40. 设  $a_1 = 1, a_{n+1} + \sqrt{1 - a_n} = 0$ , 证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
41. 设  $x_1 = 2, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
42. 设  $a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0, n = 1, 2, \dots$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
43. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^x \sin^n x}{1 + e^x} dx$ .
44. 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  的连续性.
45. 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n} (x > 0)$  的连续性.
46. 设  $f(x) = \frac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ , 求  $f(x)$  的间断点及其类型.
47. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ , 讨论函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处的连续性.
48. 设  $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ , 试补充定义使得  $f(x)$  在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上连续.

### ◆ 高 分 题 ◆

#### 一、填空题

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{e^x - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \sin(x^2 - t^2) dt}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x^2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x)(\sqrt{x+1} - 1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x \cos 2x \sim cx^k$ , 则  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \arctan \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln^2(1+x)} - 1}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设  $f'(x)$  连续,  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln \cos(x-t) dt}{\sqrt{1+f^2(x)} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 设  $f(x)$  连续, 且  $f(1) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} f(xt) dt}{x^3 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 设  $f(x)$  一阶连续可导, 且  $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{x^2 \int_0^x f(t) dt} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^x - 3^x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{\ln(1+x)(1 - \cos \sqrt{x})} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  的邻域内二阶连续可导, 且  $f'(a) \neq 0$ ,

设  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(3-x) - 3}{x-1} = -1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

19. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \cos^2 x - 1$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



20. 设  $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

21. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{iax}}{\arcsin x/2}, & x > 0 \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

22. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 - \cos x) + 2\ln(1 + bx^2)}{e^x - x - 1}, & x > 0 \\ 3, & x = 0 \\ \frac{2bx \sin x + \int_0^{x^2} \cos t dt}{x \arctan x}, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_。

## 二、选择题

1. 设当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $ax^3 + bx^2 + cx \sim \int_0^{\ln(1+2x)} \sin t dt$ , 则 ( )

(A)  $a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 0$  (B)  $a = -\frac{1}{3}, b = 1, c = 0$

(C)  $a = \frac{1}{3}, b = -1, c = 0$  (D)  $a = 0, b = 2, c = 0$

2. 设  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, g(x) = x^3 + x^4$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小  
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

3. 设  $f(x) = \int_0^{\sqrt{1+x}-1} \sin t dt, g(x) = \int_0^{x^2} \arccos t dt$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的 ( )

- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小  
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

4. 设  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  为两个数列, 则下列说法正确的是 ( )

- (A) 若  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都发散, 则  $\{a_n b_n\}$  一定发散  
(B) 若  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  都无界, 则  $\{a_n b_n\}$  一定无界  
(C) 若  $\{a_n\}$  无界且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$   
(D) 若  $a_n$  为无穷大, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ , 则  $b_n$  一定是无穷小

5. 设  $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 则 ( )

- (A)  $a > 0, b > 0$  (B)  $a < 0, b < 0$   
(C)  $a \geq 0, b < 0$  (D)  $a \leq 0, b > 0$

6. 设  $\alpha \sim \beta (x \rightarrow a)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}$  等于 ( )

- (A)  $e$  (B)  $e^2$  (C) 1 (D)  $e^{\frac{1}{2}}$

7. 设函数  $f(x)$  连续, 且  $f'(0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$  使得 ( )

- (A) 对任意的  $x \in (0, \delta)$  有  $f(x) > f(0)$