研究生教学用书

黎曼几何讲义

忻元龙 编著

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

研究生教学用书

黎曼几何讲义

忻元龙　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何讲义/忻元龙编著. —上海:复旦大学出版社,2010. 12
(研究生教学用书)
ISBN 978-7-309-07673-8

Ⅰ. 黎… Ⅱ. 忻… Ⅲ. 黎曼几何-研究生-教材 Ⅳ. O186. 12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 208427 号

黎曼几何讲义
忻元龙 编著
出品人/贺圣遂 责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
同济大学印刷厂

开本 787×960 1/16 印张 12.25 字数 215 千
2010 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07673-8/O·460
定价: 25.00 元

序　　言

作者从 1988 年开始为复旦大学数学研究所研究生讲授“黎曼几何”课程，迄今已有 10 余次.

美国加州大学 Berkeley 分校伍鸿熙教授，于 1984 年夏天，在北京大学举办的暑期教学中心讲授微分几何. 后来根据他的讲稿，整理成书《黎曼几何初步》，由北京大学出版社出版. 开始，我的课程完全按该书前 11 节内容讲解. 后来，根据学生的接受程度和本人在讲课中的体验，慢慢地，在内容取舍、次序安排、定理的证明方法等方面都有所改变，形成现在的《黎曼几何讲义》. 全书正文为 15 节. 由于本课程是在“微分流形”的基础上开设的，在付梓的时候，又在书后加了长长的一节附录，介绍“微分流形”的基本概念，以利读者在学习 Riemann 几何时查阅. 本书习题不多，其实，其中有些内容，在我的课程中原来就是习题或考题，现在也一并写在书中了. 限于作者的学术水平，书中难免有欠妥甚至错误之处，恳请读者斧正.

本讲义从 Riemann 流形的定义开始，在充分研究测地线的基础上，再用测地线作为工具，探讨 Riemann 流形的几何性质，直到各种“比较定理”，涵盖了经典“整体 Riemann 几何”的基本内容. 这些内容供一个学期 50—60 学时讲授. 本课程是为基础数学专业的硕士研究生开设的学位课程. 对几何方向的学生还需要有后续课程，如“Riemann 几何续论”，“子流形理论”等课程，才能逐步进入研究领域. 近年来由于微分几何的影响越来越大，也有很多应用数学专业、理论物理专业的研究生旁听或正式修学本课程.

笔者在读大学的时候开始学习 Riemann 几何. 那是 1962 年，苏步青先生亲自为我们讲授一学年的课. 教材是油印讲义，内容基本取自 L. P. Eisenhart 的 *Reimannian Geometry* 一书. 这是用张量分析写成的经典 Riemann 几何的书. 这几十年来，Riemann 几何有很大发展，学科格调也有极大的改变. 但是，笔者很怀念早年的学习生活和苏先生言传身教的崇高风范.

复旦大学出版社范仁梅女士多次与作者联系，热心接洽，这才促成本讲义的出版，在此表示衷心的感谢.

忻元龙

2010 年 6 月于复旦大学

目　　录

1 引　言

微分几何的发展,起初与微积分的发展是同步的.当时,有很多重要的数学家用微积分解决了很多几何问题.在 Gauss 之前,代表人物是 L. Euler, G. Monge, J. L. Lagrange,但是最重要的是德国大数学家 C. F. Gauss.他是数学中的全才,他的数学研究几乎遍及数学的所有领域,在数论、代数、非欧几何、复变函数、微分几何等领域都做出开创性的贡献.他在 1827 年时出版了一本书,叫《曲线与曲面的一般研究》[11].他这本书的出版一般被认为是微分几何作为独立学科的开始.Gauss 当时担任天文台的台长,所以通常认为他的几何工作与天文的发展和大地测量等实际问题是有关系的.大学课程念的微分几何内容基本上就是 Gauss 那个时候的理论和结果.

从微分几何发展的历史来讲,在 Gauss 以后,在 19 世纪,最重要的当属 C. F. Riemann 和 F. Klein,他们都是德国数学家.德国的制度是这样的,拿了博士学位以后,不能马上当教授,做教授要有教授资格,要做一个报告.Riemann 那时到哥廷根大学去做教师资格报告[21].他给了几个题目,后来委员会选了最后的题目.他在 1854 年的那个演讲,实际上标志 Riemann 几何的开始.Riemann 几何是曲线曲面论的质的发展.Gauss 研究的是 3 维欧氏空间的曲线曲面的性质.Riemann 先把几何对象推广到高维,更重要的是,他把 Gauss 曲面论中内蕴的几何性质和外在的几何性质分开来了.

考虑在$\mathbb{R}^3$中的曲面,参数方程为 $x^i = x^i(u, v)$, x^i 表示在三维空间中的位置向量,据此可决定曲面的第一基本形式和第二基本形式.第一基本形式通常写成

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2.$$

第一基本形式反映了曲面上邻近两点曲线的长度.第二基本形式记成

$$L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2,$$

由曲面在空间的位置决定,反映了曲面在空间的状态,平面与柱面的第一基本形式一样,但其第二基本形式不一样.Riemann 在 Gauss 曲面论的基础上,将由曲面的度量所决定的性质与曲面放在高维欧氏空间中,这两个事情区分开来.在曲面第一基本形式基础上,对 n 维空间,也能定义它的度量形式

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j.$$

它决定了 n 维空间的度量性质，这个度量称为 Riemann 度量. 对一个 n 维流形，有了度量，就构成了 Riemann 流形. Riemann 的想法反映了人类对空间形式的了解比以前有了进一步的深化. 最简单的例子可以考虑平环. $\mathbb{R}^2$ 关于整数 Z 的商空间是柱面，再取整数 Z 的商空间就得到环面 T^2. 利用 $\mathbb{R}^2$ 中的度量可以定义环面中的度量，它的度量跟 $\mathbb{R}^2$ 是局部一样的. 所以存在紧致的二维曲面，在每一点的曲率为 0. 在 Gauss 的 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面论中不可能研究这样一种空间形式. Riemann就在这个著名演讲中提出了 Riemann 几何. 整个演讲只有一个公式. 这个公式是怎样写出来的，直到现在还是个谜. 他给了一个曲率等于 -1 的曲面的二次形式. 这也就是通常所谓的双曲空间 $\mathcal{H}^2$ 的 Poincaré 模型. Riemann 几何将 Lobachevsky 的非欧几何纳入自己的轨道.

在 Gauss 以后对几何发展有影响的另外一个人就是 F. Klein. 他在 1872 年提出了 Erlangen 计划，认为空间的几何性质是由群来决定的. Riemann 和 Klein 分别对几何某一方面的深刻理解，把几何学推向进一步发展. 一个认为几何和度量有关，一个认为几何和群有关，而把这两者统一起来的，就是法国大数学家E. Cartan.

在 Riemann 几何提出以后，有很多发展，这个发展主要是以 Ricci 为代表的意大利几何学派，为了发展 Riemann 几何，他们研究 Ricci 的张量分析，但计算很复杂. 用张量分析研究 Riemann 几何，开始时在整个数学界影响并不大，一方面它比较繁，另一方面它跟其他学科的关系也不太大.

在 Einstein 发表了狭义相对论以后，用了 7 年时间，才建立了广义相对论. 这除了物理上时空概念的理解困难，还有另外一个困难就是几何的原因. 通常几何性质跟坐标没有关系. 他要发展他的广义相对论，就要找到一种数学方法，这是与通常不一样的数学方法，他找到了张量分析. Einstein 在一篇论文中说：为什么建立广义相对论又用了 7 年时间呢？其主要原因是：要摆脱坐标必须有直接的度量意义这个旧概念是不容易的. Riemann 几何一下子就热起来，差不多搞相对论理论物理的人都要学几何. 年代久一点的 Riemann 几何的教科书出版于 20 世纪 20 年代，都是用张量分析作为工具写的. 广义相对论促进了这些书的出版，理论物理对几何的影响相当大.

Riemann 几何的性质跟一点附近的度量有关，另外，几何性质跟群联系在一起，将这两者结合起来，并且在更高的水平上面统一起来，是从 E. Cartan 开始的. Cartan 是法国的大数学家. 从他开始把几何的整个性质建立在微分流形纤维丛的基础上. 纤维丛上有群，研究向量丛有度量，这样就把群的概念跟度量的概念完全统一起来. 当然，Cartan 还发展了活动标架法，继承发展了 G. Darboux

的工作，且在 Klein 观点影响下进一步研究齐性空间的微分几何，他在对 Lie 群 Lie 代数研究的基础上，把对称空间进行了分类.

以前的 Riemann 几何实际上是研究局部性质，研究 Riemann 流形一点附近的性质，并不考虑空间的整体性质. 整体 Riemann 几何一方面有它的需要，另外，拓扑学的发展为它创造了条件.

1943 年前后，陈省身先生在 Princeton 期间，为整体微分几何发展作出了杰出的贡献. 现在我们看一下曲面，它上面有度量，也就有 Gauss 曲率 K，如果曲面是紧的话，就可以在整个曲面上对 Gauss 曲率积分. 不管曲面上的度量怎么样，一个曲面上不一定只有一个度量，还可以有另外一个度量，换了度量以后，K 也就变了，但积分与曲面的度量无关. 这就得到 Gauss-Bonnet 公式.

对高维 Riemann 流形，曲率可以推广，称为 Riemann 曲率张量，被积函数是由曲率张量组成的很复杂的代数式子，这个式子在整个流形上的积分，应该等于这个流形拓扑不变量. 陈先生到 Princeton 的时候，当时也有证明，但那个证明叫外在的证明. 要把 Riemann 流形嵌入在适当高维的欧氏空间中去，作为子流形再来研究. 前文中已谈到，Riemann 的贡献，就是证明曲面本身的性质跟曲面在某个外围空间没有关系. 当时得到的证明是外在证明，陈先生到Princeton的时候，大家都希望有一个内蕴的证明，跟流形怎么放到外围欧氏空间中没有关系，他证明了. 这是陈先生的一个重要的非常漂亮的工作. 后来这个公式称为 Gauss—Bonnet—陈公式[5].

陈先生在这个基础上，又发展了示性类理论[6]，即著名的"陈省身示性类"，简称为陈类. 陈类不仅在微分几何中很重要，在代数几何，甚至数学物理、理论物理中都很重要，已成为现代科学中的基本概念. 从 E. Cartan 以后，几何的发展跟拓扑学走在一起，进一步朝那个方向发展；还有指标理论，都是研究局部不变量的与整体不变量之间的关系. 用拓扑公理化办法也可以定义示性类. 但用几何的方法的好处是便于计算.

上世纪留下的一个大问题是 Henri Poincaré 在 1904 年提出的所谓 Poincaré 猜想. 2 维流形或曲面的拓扑早在 19 世纪就已经清楚了. 对紧曲面可定义一个亏格 g，取值于非负整数，直观上亏格可理解为洞的个数，所有的曲面可用亏格分类. 高维的相应问题要困难得多. 这种流形最基本的是 3 维单位球面. Poincaré 注意到 2 维球面区别于其他曲面的特点在于球面上每条简单闭曲线都可以在球面上连续地形变收缩到一点. Poincaré 提出 3 维时的相应问题：若一个光滑 3 维紧流形具如下的性质：这个流形中的每条简单闭曲线可以连续地收缩为一个点，它同胚于球面吗？

他以很高的预见性评论道：但是，离我们解决这个问题还相当遥远. 20 世纪

50 年代末 60 年代初，出现了一批惊人的成果. 人们发现实际上，高维流形的研究比 3 维流形要容易. 1960 年，S. Smale 证明了 5 维以上的 Poincaré 猜想；20 年以后，M. Freedman 证明了 4 维 Poincaré 猜想. Smale 和 Freedman 都是 Fields 奖获得者. 给定一个光滑 3 维流形，它上面所有的 Riemann 度量构成一个无限维空间. Richard Hamilton 提出一个研究 Ricci 流，即研究微分方程的方法. 换句话说，度量随时间变化. 这是抛物型方程. 人们期望像热传导问题一样，对基本群有限的 3 维流形，正曲率会沿着 Ricci 流逐渐扩散，流形会有常曲率. Hamlton 在很特殊情形证明了猜想：如果从一个正 Ricci 曲率的 3 维流形出发. 但对一般情形会遇到严重困难，这个流会趋于一个奇点. 2003 年，Grisha Perelman 在网上贴出了几篇论文，解决了 Hamilton 方案中的困难.

我们再考虑几何和分析的关系. 看极小曲面问题. 比利时物理学家 J. Plateau 在 1847 年提出下列问题：用一铜丝，任意弯成一条封闭的空间曲线，将其放在肥皂液中，然后把它轻轻取出来，肥皂液以铜丝为边界，张成一个薄膜表面，问数学上怎样来描述这一现象. 首先这个问题很麻烦，麻烦的地方是问题很难归结成数学能做的形式. 一直到 1930 年，这个问题由美国的 Douglas 和 Rado 解决了. 这使 Douglas 和 Ahlfors 共获得 1936 年的第一次 Fields 奖. 实际上，在 $\mathbb{R}^3$ 中给定一条 Jordon 曲线，以它为边界的曲面的拓扑性质可以很复杂. 实际上，他们做的是圆盘拓扑型，并且做的是广义极小曲面，在某一点度量可能退化，还有浸入的自相交问题. 不管怎么样，他们把 Plateau 问题向前推进了一大步.

由于近几十年偏微分程的发展，使得几何中的很多问题得到了解决，以丘成桐为代表. 他解决了很多重要问题，于 1983 年获得 Fields 奖. 例如，他解决了 Calabi 猜想，即紧 Kaehler 流形上每一个陈类一定可用某一个 Kaehler 度量的 Ricci 形式表示. 这是个存在性问题，可化为 Monge-Ampère 方程. Calabi 猜想的解就是方程整体解的存在性问题. 它揭示了 Kaehler 流形上拓扑结构、复结构和度量结构之间的深刻关系，从而促成很多困难问题的解决[33]. 又如，他和 R. Schoen合作，解决了广义相对论中的正质量猜想，是利用极小曲面的方法解决的[22]. 从几何上来讲，它和正数量曲率度量的存在性密切相关，这样，就发展起来几何分析. 丘成桐由于在几何分析领域的杰出贡献，以及他在几何和物理的多个领域产生的深刻而引人注目的影响而荣获 2010 年度的 Wolf 奖. 同时获得 Fields 奖和 Wolf 奖这两项国际数学界最高奖项的数学家是屈指可数的.

几何与物理之间的关系，正如前面提到的，Riemann 几何从少数数学家的书斋走向科学界，当归功于 Einstein 广义相对论. 理论物理对几何的影响还表现在 Yang-Mills 方程. 1954 年，杨振宁在 Princeton，他们想推广 Maxwell 方程，提出了 Yang-Mills 方程[31]. 从几何角度来看，Yang-Mills 理论与几何中纤维丛理论

有关系，但物理学家并不知道纤维丛理论. 在联络论中没有 Yang-Mills 泛函. 后来 Yang-Mills 得到了这个泛函. 数学家回过来看，的确感到这个泛函很有道理. 对流形上的向量丛，有了联络就有曲率. Yang-Mills 泛函实际上是曲率模长的积分. 它是定义在联络空间上的，它的自变量是联络. 当联络变的时候曲率也变了，泛函值也变了. Yang-Mills 场就是这个泛函的临界点. 临界点不一定是最小点. 物理学家感兴趣的是真正意义上的极小点，称为瞬子解. 后来研究瞬子解的全体，Donaldson[8] 发现它构成一个流形. 对这个流形的研究就得到原来这个流形的很多性质. 这就是所谓低维拓扑中的分析方法，Donaldson 得到这个结果是站在巨人的肩膀上的，是建立在 Atiyah 关于 Yang-Mills 场重要贡献的基础上.

几何的发展一直处在数学发展的核心地位，为很多大数学家所关注. 也由于空间的几何性质密切关系到人类对时空的认识，所以几何的发展也受到物理学家的密切关注. 从另外一方面来看，几何的问题比较简洁，问题的目标很明确，问题不是人为想出来的，是自然的. 这就需要运用数学的综合知识，才能够把它彻底解决. 几何的问题都是非线性的，到现在为止，人类对非线性现象的认识还是很不够，所以，几何的研究，几何的进一步发展将推动人类对非线性现象认识的发展.

从微分几何的发展可见，Riemann 几何处于重要的地位，很多重要问题与此密切相关. 作为微分几何方向硕士研究生的专业基础课，本课程介绍 Riemann 几何的基本概念和方法，从而为学生进一步深造和学习相关学科奠定基础.

2 Riemann 度量

设 M 是一个 m-维光滑流形. 对每点 $p \in M$, 在点 p 的切空间 T_pM 上定义一个对称正定双线性形 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 这个对应在下列意义下是光滑的: 存在点 p 附近的坐标邻域 U, 它的坐标是 $(x^1, \cdots, x^m)$. 以 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \cdots, m$, 表示坐标曲线的切向量. 定义它们间的内积为 $g_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. 光滑性意味着所有 g_{ij} 在 U 中是光滑的. 这就在 M 中定义了 **Riemann 度量**, 从而它成为一个 **Riemann 流形**.

g_{ij} 依赖于局部坐标的选取. 例如, 在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 通常的平坦度量在 Descartes 坐标系 $\{x^1, x^2, x^3\}$ 中为 $g_{ij} = \delta_{ij}$, 但是在柱面坐标 $\{r, \theta, z\}$ 中或球面坐标 $\{\rho, \theta, \phi\}$ 中, 对应的 g_{ij} 改变了. 我们注意到二次微分形式

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

不依赖于局部坐标的选取, 它称为度量形式或 Riemann 度量. ds 是无穷小曲线的长度, 也称为线素. 上式中, 指标 i, j 都是重复指标, 表示在它的取值范围内作和, 这里将作和记号省略了. 在文献中, 通常称为 Einstein 和式约定. 本书中应用这个约定.

Riemann 度量也可用向量丛的语言来描述. 设 $S(M) = T^*M \odot T^*M$ 为切丛 TM 的对称共变张量积丛. 那么, 该丛的任一光滑截面定义了 M 上的一个 Riemann度量, 只要它在每一点是正定的.

一旦度量给定, 切向量的长度就知道了, 同一点出发的向量间的夹角也知道了. 对任何 $X, Y \in T_pM$, 有

$$|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle},$$

$$\cos\angle(X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X||Y|}.$$

从而, 我们也可以求一条曲线的长度. 设 $\gamma: [a, b] \to M$ 是 Riemann 流形 M 上的一条分段光滑的曲线, 它的长度被定义为

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}| \, dt.$$

由此可见,古典曲面论中的第一基本形式也就是$\mathbb{R}^3$中曲面的 Riemann 度量. Riemann几何也就是古典曲面论中内蕴几何的推广.

例 2.1 设$M = \mathbb{R}^m$. 那么M只被一个坐标领域$(x^1, \cdots, x^m)$所覆盖,并且$g_{ij} = \delta_{ij}$定义了常用的度量而成为普通的欧氏空间.

例 2.2 m-维球面$S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; |x|^2 = 1\}$是作为$(m+1)$-维欧氏空间$\mathbb{R}^{m+1}$中的标准嵌入子流形定义的. 设$i: S^m \to \mathbb{R}^{m+1}$为标准嵌入. 对任何$p \in S^m$, $X, Y \in T_pS^m$, 由下式定义了诱导度量

$$\langle X, Y \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle i_* X, i_* Y \rangle_{\mathbb{R}^{m+1}}.$$

这就是曲面论中定义第一基本形式的方法. 它对欧氏空间中的浸入子流形都适用.

例 2.3 在球面S^m中,定义一个等价关系～,它将球面中的对径点看为一点. 那么,我们得到实射影空间$RP^m = S^m/\sim$. 设$\pi: S^m \to RP^m$是覆盖映照. 那么对任何$p \in RP^m$, $\pi^{-1}(p) = q_1, q_2$. 设$X \in T_p(RP^m)$, 它有两个不同提升$\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$,它们有相同的长度. 因此可以定义

$$\langle X, X \rangle = \langle \overline{X}_1, \overline{X}_1 \rangle,$$

从而射影空间RP^m也成为 Riemann 流形.

例 2.4 设$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$为单位开实心球. 在它上面可定义 Riemann度量

$$ds^2 = \frac{4}{[1 - \sum_i (x^i)^2]^2} \sum_i (dx^i)^2.$$

这就是单位球中著名的 Poincaré 度量.

一般地,我们有下列定理.

定理 2.1 *微分流形 M 上总存在一个 Riemann 度量.*

证明 设(U_α, x_α^i)是M上的一个局部有限的坐标图册. 那么,M上存在一个附属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\phi_\alpha\}$. 在每个U_α上定义

$$ds_\alpha^2 = \sum (dx_\alpha^i)^2.$$

这样,在M上的 Riemann 度量定义为

$$ds^2 = \sum \phi_\alpha ds_\alpha^2.$$

事实上，对任何 $q \in M$，取坐标邻域$(U,\ x^i)$，使它的闭包$\overline{U}$是紧的. 由于$\{U_\alpha\}$的局部有限性，U 只和有限个 $U_{\alpha 1}$，$\cdots$，$U_{\alpha\gamma}$相交，因此，$\mathrm{d}s^2$ 限制在 U 上成为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \phi_{\alpha\lambda} \mathrm{d}s^2_{\alpha_\alpha} = g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

其中

$$g_{ij} = \sum_{\alpha,\ k} \phi_{\alpha_\lambda} \frac{\partial x^k_{\alpha_\lambda}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k_{\alpha_\lambda}}{\partial x^j}.$$

对任何 $p \in U$，由于 $0 \leqslant \phi_\alpha \leqslant 1$，$\sum \phi_\alpha = 1$，存在 β，使 $\phi_\beta(p) > 0$，因此

$$\mathrm{d}s^2(p) \geqslant \phi_\beta \mathrm{d}s^2_\beta > 0,$$

由此可见，$\mathrm{d}s^2$ 是处处正定的.

证迄

3 Levi-Civita 联络

设 M 是 Riemann 流形，$\pi: E\to M$ 是向量丛，$\Gamma(E)$ 表示由 E 上所有截面组成的无限维向量空间. 向量丛 E 上的**联络(connection)**是满足下列性质的映照 $\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$(对 $X\in\Gamma(TM)$ 和 $\phi\in\Gamma(E)$，$\nabla_X\phi$ 表示 (X, ϕ) 在映照 ∇ 下的像)：

(1) 对任何 $f\in\Gamma(M\times\mathbb{R})$，有

$$\nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi;$$

(2) 对任何 $Y\in\Gamma(TM)$，有

$$\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi+\nabla_Y\phi;$$

(3) 对任何 $\psi\in\Gamma(E)$，有

$$\nabla_X(\phi+\psi) = \nabla_X\phi+\nabla_X\psi;$$

(4) 对任何 $f\in\Gamma(M\times\mathbb{R})$，有

$$\nabla_X f\phi = X(f)\phi+f\nabla_X\phi.$$

我们知道任何向量丛上联络总是存在的. 特别地，切丛 TM 上必存在联络. 对 Riemann 流形 M，我们现在感兴趣的是与 Riemann 度量密切相关的联络，即满足下列附加条件的所谓 **Levi-Civita 联络**：对任何向量场 X, Y, Z，有

$$\begin{aligned}&\text{(i) } X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle+\langle Y, \nabla_X Z\rangle;\\&\text{(ii) } \nabla_X Y-\nabla_Y X = [X, Y].\end{aligned}\tag{3.1}$$

对此，有所谓 Riemann 几何的基本定理(定理 3.1).

定理 3.1 *Riemann 流形 M 上总存在唯一的 Levi-Civita 联络.*

证明 为证明唯一性，我们只要说明对任何切向量场 X, Y 和 Z，$\langle\nabla_X Y, Z\rangle$ 是确定的. 反复利用 Levi-Civita 的条件(i)和(ii)，我们有

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle-\langle Y, \nabla_X Z\rangle\\&= X\langle Y, Z\rangle-\langle Y, \nabla_Z X\rangle-\langle Y, [X, Z]\rangle\\&= X\langle Y, Z\rangle-Z\langle Y, X\rangle+\langle\nabla_Z Y, X\rangle-\langle Y, [X, Z]\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X\langle Y, Z\rangle - Z\langle Y, X\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle \\
&= X\langle Y, Z\rangle - Z\langle Y, X\rangle + Y\langle Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle \\
&\quad - \langle Y, [X, Z]\rangle \\
&= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle Y, X\rangle \\
&\quad - \langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle.
\end{aligned}
$$

据此得到

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&- \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle\}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

另一方面,我们用(3.2)式定义$\nabla_X Y$. 容易验证它必定是 Levi-Civita 联络.

证迄

现在我们来给出 Levi-Civita 联络的局部表达式. 设 U 为坐标领域,坐标为 $(x^1, \cdots, x^m)$, $\frac{\partial}{\partial x^i}(1\leqslant i\leqslant m)$ 是坐标曲线的切向量,那么, $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. 令

$$
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},
$$

其中 Γ_{ij}^k 称为克式记号(Christoffel, 1869),它可表达为

$$
\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \tag{3.3}
$$

其中(g^{ij})是(g_{ij})的逆矩阵.

注意到(3.3)式是(3.2)式的特殊情形.

对任何联络∇和 M 上的曲线 c 以及沿曲线的向量场 X,如果 $\nabla_{\dot c} X = 0$, 那么称 X 沿曲线 c **平行移动**. 它定义了对应切空间的线性同构.

习题 设 $c:[a, b]\to M$ 是 M 上的光滑曲线,∇是 Levi-Civita 联络. 那么,对任何 $X\in T_{c(a)}M$, 存在唯一的向量场 $X(t)\in T_{c(t)}M$, 使 $X(t)$是沿曲线 c 平行移动,并满足 $X(a) = X$.

Levi-Civata 联络的条件(3.1)中的第二个条件是无挠联络的条件. 现在来考察第一个条件的几何意义.

Riemann 流形中的 Levi-Civita 联络定义了度量空间之间的等距同构. 事实上,设 $\gamma:[a, b]\to M$ 是 M 上的光滑曲线,并且, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. 如果 $\{e_1, \cdots, e_m\}$是点 p 切空间 T_pM 的单位正交基,将 e_i 沿 γ 平行移动,我们得到

$e_i(t)$,那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle e_i(t),\ e_j(t)\rangle &= \dot{\gamma}(t)\langle e_i(t),\ e_j(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_i(t),\ e_j(t)\rangle + \langle e_i(t),\ \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_j(t)\rangle = 0.\end{aligned}$$

所以,对任何 $t \in [a, b]$, 有

$$\langle e_i(t),\ e_j(t)\rangle = \delta_{ij}.$$

以 $\mathcal{P}^\gamma: T_pM \to T_qM$ 表示沿 γ 的平行移动,则 $\mathcal{P}^\gamma(e_i) = e_i(b)$. 这说明$\mathcal{P}^\gamma$ 将 T_pM 的单位正交基映到 T_qM 的单位正交基. 所以,平行移动$\mathcal{P}^\gamma$ 是度量空间之间的等距同构.

反之,设 M 上的一条曲线 $\gamma:[0, 1] \to M$ 使 $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$,且 $\dot{\gamma}(0) = X(p)$, 这里 X, Y, Z 是任何切向量场. 记$\mathcal{P}^\gamma$ 是 T_pM 和 T_qM 间的同构,且设 $\{e_i(t)\}$ 是用平行移动得到的沿 γ 的单位正交基. 我们有 $Y(\gamma(t)) = Y^i(t)e_i(t)$, $Z(\gamma(t)) = Z^i(t)e_i(t)$, 那么

$$\begin{aligned}X(p)\langle Y,\ Z\rangle = \dot{\gamma}(0)\langle Y,\ Z\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i Y^i(t)Z^i(t)\ \Big|_{t=0} \\ &= \sum \frac{\mathrm{d}Y^i}{\mathrm{d}t}(0)Z^i(0) + \sum Y^i(0)\frac{\mathrm{d}Z^i}{\mathrm{d}t}(0) \\ &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}(0)}Y,\ Z\rangle + \langle Y,\ \nabla_{\dot{\gamma}(0)}Z\rangle \\ &= \langle \nabla_{X(p)}Y,\ Z\rangle + \langle Y,\ \nabla_{X(p)}Z\rangle.\end{aligned}$$

上述分析说明,Riemann 流形中的 Levi-Civita 联络是保持度量的联络.

4 曲率张量

对向量丛上的联络，总可定义曲率. 而在 Riemann 几何中的曲率是关于它切丛上 Levi-Civita 联络的曲率张量. 曲面论中重要的内蕴几何量是 Gauss 曲率. 它在 Riemann 几何中的推广是截面曲率，它可由曲率张量来定义. 进而可定义 Ricci 曲率，数量曲率. 从曲率张量出发还可定义曲率算子、复截面曲率等. 如果流形还有复结构，还可定义全纯截曲率、全纯双截曲率等. 这里先引进曲率张量，并给出它的性质，再引入上述各种曲率. 对曲率的理解，以及它们和其他几何不变量或拓扑不变量的关系是微分几何中的重要课题.

设 M 是 Riemann 流形，具 Levi-Civita 联络. 定义相应的**曲率张量 (curvature tensor)** 如下：

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \tag{4.1}$$

其中 X, Y, Z 是 M 上的向量场.

命题 4.1 *$R(X, Y)Z$ 在 $p \in M$ 的值仅依赖于 X_p, Y_p 和 Z_p，而不依赖于那些向量在点 p 附近的值. 进而，对应*

$$X_p, Y_p, Z_p \to R(X_p, Y_p)Z_p$$

关于每个变量是线性的.

证明 对 M 上的任何函数 f，有

$$\begin{aligned}
&-\nabla_{fX} \nabla_Y Z = -f \nabla_X \nabla_Y Z, \\
&\nabla_Y \nabla_{fX} Z = \nabla_Y (f \nabla_X Z) = Y(f) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z, \\
&\nabla_{[fX, Y]} Z = \nabla_{\nabla_{fX} Y} Z - \nabla_{\nabla_Y fX} Z = f \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{Y(f) X} Z - f \nabla_{\nabla_Y X} Z \\
&\qquad = f \nabla_{[X, Y]} Z - Y(f) \nabla_X Z.
\end{aligned}$$

将上面 3 式两边分别相加给出

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

对 R 的变量 Y, Z 的情形也同样证明，这里略去而留给读者作为练习.

现在设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 那么