

钱伟长教授

九十华诞 祝寿文集

QIANWEICHANG JIAOSHOU

JIUSHI HUADAN ZHUSHOU WENJI

◎ 主编 周哲玮

上海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

钱伟长教授九十华诞祝寿文集 / 主编周哲玮. — 上海: 上海大学出版社, 2003. 6

ISBN 7-81058-576-2

I. 钱... II. 周... III. 钱伟长—纪念文集
IV. K826.11-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 044236 号

责任编辑: 林溪波 封面设计: 王春杰
责任制作: 张继新 责任校对: 张 懿

**钱伟长教授九十华诞
祝 寿 文 集**

主编 周哲玮

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号 邮政编码 200072)

(E-mail: sdcbs@citiz.net 发行热线 56331131)

出版人: 李顺祺

上海精英彩色印务有限公司 各地新华书店经销

开本: 787×960 1/16 印张: 19.5 字数: 260000

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

印数: 1~1100

定价: 65.00 元

主 编 周哲玮

执行编委 刘宇陆 郭兴明 徐 旭

序

今年10月9日是我的90岁寿辰。我的本意是想开一个小型的茶话会,简单地庆祝一下便足够了。参加会议的对象就定为《应用数学和力学》的编委和编辑部的同志,因为这本杂志从1979年创办至今,走过了风风雨雨,已经成为国际知名的应用数学和力学杂志。这其中,凝聚了广大编委的辛劳,而我始终倾注了很多的心血,再说编委们聚在一起探讨杂志发展是完全必要的。10月9日上午的编委会是开了,不过这个会议成了一系列大型祝寿活动的一部分,这大大超出了我的预想。

从今年的8月13日至9月10日,上海大学党委和广大教师为我的90寿辰举办了一系列的庆祝活动,来宣传我的教育思想和教育理念,并向到会的国内国际同行展示一下上海大学这些年来所取得的成绩,尤其是“四校合并”新上大组建并经过院系调整后,学校在基础设施建设、学科建设、人才培养、服务上海地方经济建设与促进社会文化发展等各个方面的成果。总的说来,这些活动是紧密结合学校的教学与科研活动的。

如果说上海大学的同事们是用教学与科研的丰硕成果来给我祝寿的话,那么《应用数学和力学》杂志的编委和上海市应用数学和力学研究所的同行们,则是用他们最近几年的最新成果和学术成就来祝贺我的生日,我对于这种形式的祝寿活动是很乐意接受的。《应用数学和力学》杂志创立之初,在国内首先采用编委推荐稿件的编委负责制,而且绝大部分的编委是从事应用数学和力学教学与科研工作第一线的年轻学者,这样做的目的是为了给年轻学者提供一个施展才华、展



示学术研究活动的平台。正像后来有些人所说的,这本杂志也给了那些投稿无门、却又执著探索真理的“小人物”们一片成长壮大的天空,给了他们平等进行学术交流的舞台。可以骄傲地说,《应用数学和力学》杂志在自身发展成熟并壮大的同时,也造就了大批的学术研究骨干,而且其中不乏有成就突出者。这也可以从他们这次为祝寿活动而撰写的学术论文反映出来。

他们的论文选题涉及数学和力学的方方面面:既有对固体力学的创新研究,也有对流体力学的最新探索;既有对力学机理和模型(如湍流)的试验,也有对材料本构关系的研究;既有对基础理论和工程问题的非线性分析,也有对非线性分析方法的新发展。特别值得关注的是,许多文章具有很强的工程应用背景。总结他们成功的经验,我觉得他们抓住了做学问的要点,那就是结合生产实践和工程技术的要求,结合社会经济文化的发展,在客观实际中发现问题并提炼问题,从而找到解决问题的方法,有些甚至是创造了新的方法。这种进行科研的经验对于科技工作者都是值得借鉴的。而对于在高等教育战线的同志们来说也一样重要。因为这可以启示我们如何培养具有创新精神的人才。我一贯认为,从事高等教育的教师一定要做到教学与科研相结合,自己做科研,自己创新,才能培养具有创新精神、创新意识和创新能力的人才。

祝寿活动结束了,但是培养人才、进行学术研究、探求真理和服务于社会的任务依然艰巨。我希望我的同事们、同行们继续努力,树立终身学习、不断创新、永远奉献和“科教兴国”的崇高理想,在我们共同的科研事业的阵地和教书育人的舞台上书写绚烂的人生篇章。

钱伟长

2002年11月22日



目 录

壁湍流近壁区相干结构的动力学模型·····	周 恒	1
二维超、跨声速有旋流动的势函数变分原理族·····	刘高联, 沈远胜	6
波纹扁球壳的大挠度方程 ·····	刘人怀, 王 璠	15
无界域问题的谱方法求解 ·····	周哲玮, 张 璟	23
自由参数摄动法·····	陈山林	35
非线性振动系统周期解的分岔理论及应用·····	陈予恕	44
组合超弹性柱体中空穴的动态生成 ·····	程昌钧, 任九生	50
论理性力学的框架·····	戴天民	59
压电弹性动力学中 Volterra 积分方程的数值解法 ·····	丁皓江, 王惠明, 陈伟球	72
广义凸空间内的广义矢量平衡问题·····	丁协平	78
抛物型变分不等式的边界最优控制问题 ·····	周世兴, 郭兴明	85
横观各向同性饱和土地基与圆板的动力相互作用 ·····	黄 义, 王小岗	93
基体为可压缩幂次材料的孔隙介质的有效性质 ·····	黄筑平	101
两自由度强非线性非自治系统周期解的存在性稳定性及近似表达式 ·····	李 骊	109
多重尺度方法的创立、发展和意义 ·····	李家春	125
柱状粒子在流体中沉降特性的研究 ·····	林建忠, 石 兴	130
非线性积分微分方程最优控制的奇摄动 ·····	林宗池, 周哲彦, 林苏榕	136
碱质对流模型的特征线解 ·····	刘慈群, 宋付权	142
湍流逆梯度运输的机理 ·····	刘宇陆, 邱 翔	148
一种新的混沌同步行为——广义滞后同步 ·····	刘曾荣	161
Parametric Links Among Monte Carlo, Phase-field, and Sharp-Interface Models of Interfacial Motion ·····	Pu Liu and Mark T. Lusk	165
屈曲波型受约束的圆柱壳失稳 ·····	吕和祥, 侯金华	182
功能梯度复合材料剪切板的 Kármán 型方程 ·····	沈惠申	190

十次对称二维准晶中的点热源	沈亚鹏, 王 旭 196
离散变量结构优化设计研究的最新进展	孙焕纯 201
角线裂纹的特征超奇异积分方程与线奇异性	汤任基 210
正方形弹性夹杂对裂纹应力强度因子的影响	王银邦 219
Experimental Investigations on Diffusion Characteristics of High Concentration Jet Flow in Near Region	Wang Daozeng, Zhang Yan, Fan Jingyu 225
飞航导弹用埋入式管道内外三维湍流流动特性的数值分析	翁培奋, 丁 珏 236
基函数法——一种新型在非结构网格上离散微分算子的数值计算方法	吴望一 246
Pansystems Relativity(泛系相对论)784e $\rightarrow$ R-SOME	Guo Dinghe, Wu Xuemou 248
Investigation of the Stability of Inviscid Compressible Swirling Flows	Nan Xia 256
弹塑性柱壳冲击屈曲问题研究	杨桂通 268
300 MW 水氢冷发电机出线盒裂纹事故分析	姚文娟, 叶志明, 徐福娣, 邱家训 273
微分方程中的 $C-D$ 对与 $C-D$ 可积系统	张鸿庆, 闫振亚 279
Some Convergence Theorems for Asymptotically Quasi-nonexpansive Type Mappings in Banach Spaces	Zhang Shi Sheng 284
非线性大挠度方法应用于弹塑性壳体和复合材料叠层板壳的非线性 静动力稳定性理论的发展	周承倜 289
Oscillation For Differential Equations With Variable Coefficient And Variable Delay	Xianyi Li and Huan Wen Zhou 295



壁湍流近壁区相干结构的动力学模型

周 恒

(天津大学, 天津 300072)

摘要: 文中说明了相干结构在湍流中的作用, 提出了相干结构的动力学模型, 包括不稳定波模型、单个相干结构模型、相干结构的相互作用及相干结构的被激发问题。

1. 引言

20 世纪 60 年代后期, 通过实验, 确证了壁湍流近壁区存在着相干结构。它是湍能的主要产生者, 对湍流的维持和演化起着关键的作用。这一发现曾激发了很多湍流研究人员的希望, 认为这可能是解决湍流问题的突破口。随后, 在约 20 年的期间, 众多的研究人员对它进行了研究。但是, 尽管通过实验和直接数值模拟, 人们对相干结构的形态有了不少的了解, 但这些研究结果对湍流的计算却没有产生什么实质性的影响。我们认为其主要原因是, 几乎所有的上述研究都只是运动学的研究, 只提供了对相干结构的某种定性描述, 因而无法在计算中应用。但在上述众多的研究中, Blackwelder 发现在检测相干结构时得到的信号和检测转捩过程中的不稳定波得到的信号非常相似。根据这一提示, 我们从 20 世纪 90 年代开始, 利用流动稳定性理论中的概念和方法, 提出了相干结构的动力学模型。

2. 相干结构的不稳定波模型

壁湍流近壁区(从壁面到约 100 个粘性长度处)的小尺度湍流强度很小, 因而在那里可以用准层流模型。在对基本流做了一些假定后, 我们利用了流动稳



定性理论中的共振三波概念,提出了相干结构的理论模型^[1]。用不稳定波在给定时间内的增长倍数是否超过某一给定值作为该不稳定波是否会发展成相干结构的判据。改变不同的波参数,得到很多可能的相干结构参数。它们的事后统计概率密度分布曲线和由直接数值模拟中出现的相干结构的事后统计概率密度基本一致。每一个相干结构都对应一种低速条纹结构。它们的统计平均值和实验中所得的也很一致。此外,这种相干结构模型提供的流场有流向或近似流向涡的结构和由实验或直接数值模拟所得的结果也一致。这些都可以看做是理论模型正确的间接证据。

3. 单个相干结构的理论模型

虽然相干结构的波的模型基本上是合理的,但有一点与实验不符,即波模型中的相干结构应是波串,而实验中的相干结构则更像是一个一个独立的结构。因此在1989年W. Reynolds提出,是否应该用孤立波作为相干结构的模型。但在粘性流中,从原则上讲不存在孤立波。由于波模型中相干结构的流场结构基本是合理的,因此我们提出将波模型中的一个周期中的速度分布作为一个孤立的相干结构的初始流场,用直接数值模拟的方法,研究其演化规律,重点是看集中在局部范围的扰动在随后的演化中是否仍能保持在局部范围内^[2]。结果是,这种扰动在一定时间内的确可以保持在一个局部范围内。而且,其涡结构的演化也和实验观察到的性质一致。如涡的前缘将会逐渐抬起,会诱导出高剪切层等。

4. 两个相干结构的相互作用

尽管单个相干结构模型取得了一定的成功,但还不能解释一些实验中观察到的现象,如低速条纹的间距,条纹数目随离壁面距离的增加而减少,等等。波模型之所以能解释低速条纹的间距,实质上反映了相干结构间的相互作用。因此,我们又研究了两个相干结构的相互作用问题^[3]。

在文献[2]中,我们曾研究了沿流向前后排列的两个相干结构的相互作用,结果发现他们基本上没有相互作用。这并不奇怪,因为相干结构在流向的尺度远大于展向尺度。因此在[3]中,我们着重研究了沿展向排列,而沿流向可以有一定错位的两个相干结构的相互作用,看什么样的展向及流向距离有利于相干结构的发展,或有利于相干结构的增长。

仍旧采用直接数值模拟的方法,将两个相干结构的初始流场放在计算区入



口的下游处,如图 1 所示。

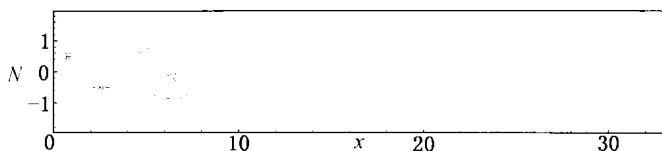


图 1 两个相干结构的初始位置。图中所画为 $y^+ = 15$ 的平面内流向扰动速度等值线图。 y^+ 为以黏性长度计量的距壁面的法向距离

这里两个相干结构在流向及展向都有间距。它们可以是相同的,也可以是不相同的。改变它们的流向及展向间距,看它们按某种定义下的幅值增长的快慢。结果发现,增长率较大的组合其展向间距平均值约为 100 个黏性长度,流向间距平均值约为 200 个黏性长度。甚至于当单独存在时不增长的也可增长起来。增长率的大小提供了一种选择性,这就解释了低速条纹的平均值是 100 个黏性长度的问题。同时,由于这两个相干结构不一定是相同的,而且可以前后错开,因此低速条纹并不严格是流向的。在计算中还发现,在演化过程中,流场中的涡会抬升、合并。这也和实验中观察到的一致,也解释了在 y^+ 增加时低速条纹数会减少的现象。图 2 是演化至某一时刻横截面上的扰动速度矢量图。从中可清楚看出涡结构。

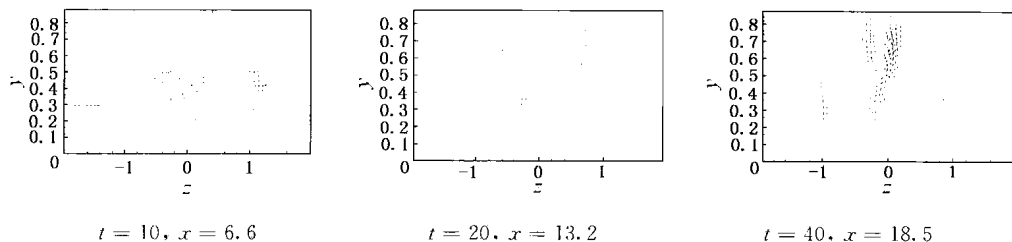


图 2 不同时刻,不同流向位置的 $y-z$ 平面速度矢量图

应该说明的是,我们不可能计算太多的情况。因此上述结果只能说明我们的模型是合理的,但不是包罗一切的。

5. 相干结构的被激发问题

上述模型需要有初始扰动,因此下一个问题就是相干结构的初始扰动从何

而来。我们研究的相干结构位于近壁区,它和外区的分界面一般认为位于 $y^+ = 100 \sim 120$ 处。从实验和数值计算的结果看,近壁区和外区是两个有相互影响,但又有不同性质的区。因此,我们提出了外区扰动激发近壁区相干结构的模型。所用的方法仍然是直接数值模拟。取计算区的上边界于 $y^+ = 120$ 处。由实验,该处的扰动均方根值约为 $0.03 U$,其中 U 为外流速度。假设在计算区内的初始扰动为 0,但在上边界的一部分(见图中阴影部分),存在向前和向下的速度,其大小即取为 $0.03 U$ 。在若干时间后,撤掉这一扰动。结果在计算域中的确激发出了一个扰动速度场。场中有涡结构,如图 3。

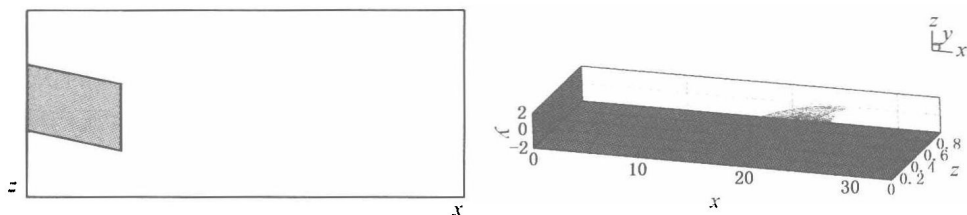


图 3 左图阴影处为扰动区。右图为等 ω_x 面, ω_x 为流向涡量

从计算结果看,激发的扰动的确和单个相干结构的流场相似,有流向或近似流向涡。在演化过程中涡的前沿会逐渐抬起,如图 3 所示,和实验或直接数值模拟的结果也相符。^①

到此,我们有了一个基本完整的相干结构动力学模型,它可以说明相干结构的起因、演化及给出扰动速度的分布。

6. 相干结构动力学模型与湍流计算

理论研究的最终目的不仅是对事物提供解释,还应提供定量计算的方法。我们首先利用所给模型对湍流近壁区的热交换提出了一种计算方法^[4],但这只是湍流中标量输运的问题。更根本的是动量输运的问题,因为它决定了湍流本身。

在湍流的模式理论中,近壁区一直没有合理的模式,需要单独处理,有所谓的壁面率。这实际上是一个经验公式。陆利蓬在我们提出的相干结构模型基础上,基本成功地从理论上给出了壁面率的理论公式^[5]。

^① 这一部分内容尚未发表。

由此可见,虽然迄今为止,相干结构的研究还没有对湍流计算产生什么实质性的影响,但从上面的例子看,如果能给出正确的动力学模型,还是有希望取得进展的。

说明 上述工作,主要是我的研究生熊忠民、陆利蓬、陆昌根、马峥、张哲、张东明等做的。[5]是陆利蓬到北航工作后做的。罗纪生教授在指导他们方面,做了大量工作。

参考文献

- [1] 周恒,熊忠民,湍流边界层近壁区相干结构起因的研究,中国科学(A辑),1994,24(9): 941—948(有英文稿)
- [2] 周恒,陆昌根,罗纪生,湍流边界层近壁区单个相干结构的模拟,中国科学(A辑),1999, 29(4): 366—372(有英文稿)
- [3] 张东明,罗纪生,周恒,湍流边界层近壁区相干结构的动力学模型(已投稿,尚未发表)
- [4] 周恒,马峥,张哲,湍流边界层近壁区的传热问题,中国科学(A辑),1998,28(6): 529—534(有英文稿)
- [5] Lu Lipeng, Chen Maozhang, A theoretical model for Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in near-wall region[J] *Science in China (A)* 2000, 43(2): 199—204.



二维超、跨声速有旋流动的 赝势函数变分原理族

刘高联 沈远胜

(上海大学,上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

摘要: 本文以作者以前提出的赝势函数为基础,从 Lagrange 空间的 Hamilton 原理出发,首先变换到 Euler 空间,然后通过拉氏乘子法消除约束,成功地导出了相应的二维有旋流动的新变分原理及广义变分原理。从而为用有限元法求解有旋流动(特别是跨声速流动)奠定了完密的理论基础。

1. 引言

对于亚声速流动,势函数模型曾是一个非常简便的求解工具,应用甚广。但是,如果流动是有旋的(例如,在弯形激波后区内),则严格地讲,势函数已不复存在。可是势函数模型在求解方面的优越性使人们仍不甘割爱,竟在有激波的跨声速流中仍千方百计地提出了各种近似势函数模型^[1]。文[1]中首先指出了这些近似模型的物理上的不相容性,并利用文[2]提出的缩项法引入了一种新通用函数——赝势函数,它是势函数对有旋流动的一个自然的、物理上相容、数学上求解简便的推广,然后,文[1]还导出了该赝势函数模型的变分原理及其对跨声速叶栅的有限元解,验证了其有效性。但文[1]在导出变分原理时,曾设涡势函数 Π 为已知量,故须对它进行迭代修正,这在实用上是很方便的,但在理论上则未免有欠完密,尚有改进余地。为了弥补这一缺陷,本文将重新严格地建立赝势函数模型的完密的变分原理。

2. 二维有旋流动的赝势函数模型

二维定常、无粘、有旋流动的赝势(Φ)-涡势(Π)模型的基本方程为(1)---(6):

$$\text{连续方程} \quad \partial(\rho u_i)/\partial x_i = 0 \quad (1)$$

$$y \text{ 向动量方程} \quad \partial \Pi / \partial x_1 - \rho T dS/d\Psi + \rho dH/d\Psi = 0 \quad (2)$$

$$\text{能量方程} \quad p/\rho + E + u^2/2 = H \quad (3)$$

$$\text{流函数定义式} \quad \partial \Psi / \partial x_1 + \rho u_2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Gibbs 恒等式} \quad T dS = dE + p d(1/\rho) \quad (5)$$

$$\text{膈势定义式} \quad \partial \Phi / \partial x_1 = u_1, \quad \partial \Phi / \partial x_2 = u_2 - \Pi \quad (6)$$

其中: E —内能; Φ —膈势; Π —涡势; S —熵; T —温度; H —滞止焓; $H(\Psi)$ 已知。

边界条件(图 1):

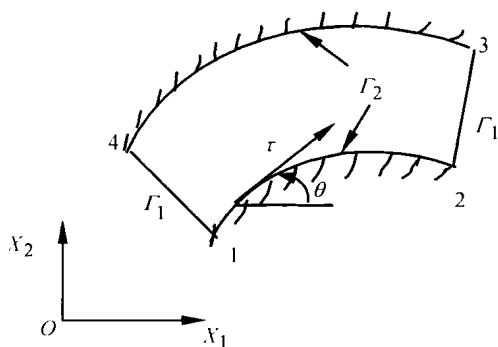


图 1 二维流道

Γ_1 上: 已知

$$\rho u_n = (q_n)_{pr}(x_2) \quad (7)$$

故有

$$\Psi(x_2) = \int_0^\tau \rho u_n d\tau = \int_0^{x_2} (q_n)_{pr} \cdot dx_2 / \sin \theta \quad (8)$$

Γ_2 上: 类似地已知

$$\rho u_n = (q_n)_{pr}(x_1) \text{ 及 } \Psi = \Psi_{U,L}(x_1) \quad (9)$$

其中在入口面 14 上:

$$\Psi_1 = Q(\text{流量}), \Psi_1 = 0$$

下标 U、L 分别指示“上、下”。

此外, 在激波上, 应满足 Rankine-Hugoniot 条件^[1,5]。

3. 膺势函数的亚广义变分原理

3.1 Lagrange 空间中的 Hamilton 原理^[3,4]

对定熵流 ($S = S(\alpha)$) 有: $\delta \Pi'(x) = 0$

$$\Pi'(\bar{x}) = \int_{(t)} \int_{(V_a)} \rho_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} - E(\rho, S) \right\} dV_a dt, \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

其变分约束为

$$(i) \rho = \rho_0/J, \quad J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} = dV/dV_a \quad (11A)$$

$$(ii) S = S(\alpha) \quad (11B)$$

$$(iii) \text{Gibbs 恒等式: } TdS = dE + pd(\rho^{-1}) \quad (11C)$$

其中: x_i 为 Euler 坐标; α_i 为 Lagrange 坐标; $x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$; dV_a 为 Lagrange 空间中微元体积; dV 为 Euler 空间中微元体积; 下标 0 指示起始时刻的量。在激波前后, $S(\alpha)$ 函数取不同形式。

若引入流速

$$u(= u_i i_i)$$

$$u_i = \partial x_i / \partial t \quad (11D)$$

这里 $\partial/\partial t$ 表示 Lagrange 空间的时间偏导(当 α_i 保持定值时), 它同 Euler 空间中的 D/Dt 同义。则式(10)可改写为

$$\Pi'(\bar{u}) = \int_{(t)} \int_{(V_a)} \rho_0 \left\{ \frac{u_i u_i}{2} - E(\rho, S) \right\} dV_a dt \quad (12)$$

其约束为: (11A—D) 式。

3.2 Euler 空间中的亚广义变分原理 I

为此, 由(11A)式 $\rho dV = \rho_0 dV_a$ (质量守恒定律)代入(12)式, 同时考虑到本文考虑的是定常流, 故(12)式对 t 的积分可取消, 于是得

$$\Pi_1(\bar{u}) = \int_{(A)} \rho \left\{ \frac{1}{2} u_i u_i - E(\rho, S) \right\} dA \quad (13)$$

它的约束(11A—D)式也经变换成:

$$\nabla \cdot \rho \bar{u} = 0 \quad (14A)$$

$$S = S(\alpha) \quad (14B)$$

$$TdS = dE + pd(\rho^{-1}) \quad (14C)$$

但是(11D)可变换如下有两种方法:

(i) 用下式代替:

$$\frac{D\alpha_i}{Dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \cdot \frac{Dx_j}{Dt} \stackrel{(11D)}{=} u_j \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0 \quad (14D)$$

(ii) 由上式的末段等式得 u_i 有非零解的条件:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = 0 \quad (15A)$$

不难看出,上式的一个通式解为: $\alpha_1 = F_1(\alpha_2)$ 或 $\alpha_2 = F_2(\alpha_1)$, 可见(14D)式只须取其中之一即可。让我们取(14D)式中 $i = 1$, 并改记 α_1 为 α , 则得

$$u_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0 \quad (15B)$$

可见 u 同 $\nabla \alpha$ 正交: $\bar{u} \cdot \nabla \alpha = 0$, 故只需令 (g 为任意函数):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = -gu_2, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = gu_1 \quad (15C)$$

则(15B)式恒成立。而上式的相容条件为

$$\frac{\partial(gu_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(gu_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (15D)$$

将它同(14A)式对比,知必有(设 C 为任一常数):

$$g = C\rho \quad (15E)$$

不失普遍性,可取 $C=1$, 然后代入(15C)式,得

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = -\rho u_2, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = \rho u_1 \quad (15F)$$

显然,由与式(4)对比知 α 实即流函数,因此我们今后改 α 为 Ψ , 并以(15F)式来代替(11D)式作约束。

现再用拉氏乘子 β_1, β_2 和 ϕ 分别将约束(15F)和(14A)结合到泛函 Π_1 中去, 构成新泛函 Π'_1 如下:

$$\begin{aligned} & \Pi'_1(\bar{u}, \rho, \Psi, \phi, \beta_1, \beta_2) \\ &= \int_{(\Lambda)} \left\{ \rho \left[\frac{u_i u_i}{2} - E(\rho, S(\Psi)) \right] + \beta_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \rho u_1 \right) - \beta_2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \rho u_2 \right) + \phi \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right\} d\Lambda \end{aligned} \quad (16)$$

它仍以(14C)式为约束,不过我们将用下列两式来代替(14C)式:

$$\partial E / \partial S|_\rho = T, \quad \partial E / \partial \rho|_S = p / \rho^2 \quad (14C)'$$

由 $\delta \Pi'_1 = 0$ 可得 Π'_1 的驻值条件如下:

欧拉方程

$$\delta u_i: u_i = \beta_i + \partial \phi / \partial x_i \quad (17A)$$

$$\delta \rho: p / \rho + E + u^2 / 2 = 0 \quad (\text{即 } h + u^2 / 2 = 0) \quad (17B)$$

$$\delta \alpha: \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} - \rho T \frac{dS}{d\Psi} = 0 \quad (17C)$$

$$\delta \beta_i: \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \rho u_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -\rho u_2 \quad (17D)$$

$$\delta \phi: \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (17E)$$

将(17A)、(17C)式同(6)、(2)式对比,可知识别乘子 ϕ 和 β_i 如下:

$$\phi = \Phi, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \Pi \quad (18)$$

将它们及(17A)式代入(16)式,并对其末项分部积分,同时为了使(17B)式可写成能量方程(3)的形式,在泛函中增补了一项—— ρH ,得泛函 Π'_1

$$\begin{aligned} & \Pi''_1(\rho, \Psi, \Phi, \Pi) \\ &= - \int_{(\Lambda)} \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \Phi)^2 + \Pi^2] + \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) + E(\rho, S(\Psi)) - H(\Psi) \right\} d\Lambda \end{aligned} \quad (19)$$

取其变分,得

$$\delta \Pi''_1 = \int_{(\Lambda)} \{ f_1 \delta \rho + f_2 \delta \Psi + f_3 \delta \Phi + f_4 \delta \Pi \} d\Lambda + I'_B \quad (20A)$$

其中

$$I'_B = \oint_{(\Gamma)} - \{ \underbrace{\rho \vec{u} \cdot \vec{n}}_{u_n} \delta \Phi + \Pi \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{n}}_{n_i} \delta \Psi \} ds \quad (20B)$$