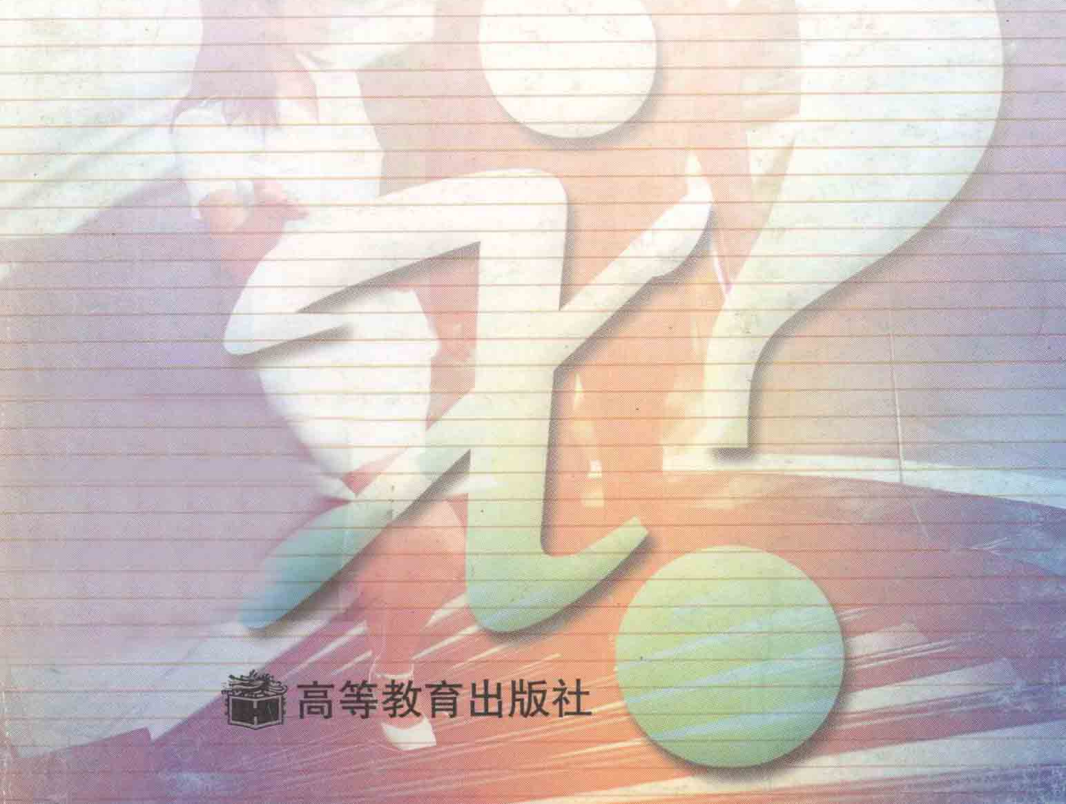
中等职业学校文化课教学用书

数学教学参考书

（财经类）

第三册

主编　陈柏林



高等教育出版社

中等职业学校文化课教学用书

数学教学参考书

（财经类）

第三册

主编　陈柏林

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学教学参考书．财经类．第三册/陈柏林主编．—北京：高等教育出版社，2002.8

中等职业教育教材

ISBN 7-04-011031-8

Ⅰ．数… Ⅱ．陈… Ⅲ．数学课—专业学校—教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 043687 号

数学教学参考书（财经类）第三册

陈柏林 主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2002 年 8 月第 1 版
印　　张	8.75	**印　　次**	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	200 000	**定　　价**	11.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

内 容 提 要

本书是与新编教育部规划中等职业学校教材《数学》(财经类)第三册配套的教学参考书.全书的每一章均与教材的内容相对应,按六个部分编写:一、知识网络;二、教学要求;三、教材说明;四、教学建议;五、部分练习、习题的提示或解答;六、本章参考题.

本书在教学中不仅对教师提供一些帮助和参考,也可作为学生学习数学课程的辅导用书.

前　　言

新世纪的到来使我国面临信息社会和市场经济的巨大挑战，时代要求我们深化中等职业教育改革，培养出高素质的劳动者和中初级专门人才，为适应形势发展，我们以2000年教育部颁布的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》为依据，参考普通高中数学教学基本要求，组织编写了与中等职业教育国家规划教材《数学》(财经类)第三册配套使用的教学参考书，供三年制(或四年制)中等职业学校财经类各专业使用.

本教学参考书均按教材分章编写，每章内容包括：

一、知识网络

概括本章的知识结构及内在联系.

二、教学要求

按教学大纲列出本章认知要求的三个层次(了解、理解、掌握)和能力培养的五个方面(基本运算、基本计算工具使用、数形结合、简单实际应用和逻辑思维能力).

三、教材说明

介绍本章的主要内容、教学重点和难点.

四、教学建议

分节进行内容分析并提出教学建议.

五、部分练习、习题的提示或解答

六、本章参考题

本书共六章.参加本书编写的有北京汽车工业学校陈柏林(主编)、张安、张爱香，北京二轻工业学校张进军，天津财经学校李晓娟，渤海船舶技术学院曹成龙，北京供销学校贝虹，全书由承德工业学校陈祖泽主审，上海航空工业学校张又昌，安徽银行学校余志

祖参加审稿.

由于编者水平所限,对教参中的不妥之处,诚恳地希望广大教师批评指正.

编者

2002年1月

目　　录

第十二章　排列、组合、二项式定理

一、知识网络

分类计数原理
分步计数原理

排列定义

组合定义

排列种数计算公式:

$P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

$n! = P_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$

$0! = 1$

组合种数计算公式:

$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{P_m^m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

组合数的两个性质:

$C_n^m = C_n^{n-m}$

$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$

二项式定理:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$

通项公式: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

应　用

二、教学要求

知识点内容	认知要求			能力培养					学时	
	了解	理解	掌握	基本运算	基本计算工具使用	数形结合	简单实际应用	思维	必学时数	选学时数
排列与组合									10	
分类计数原理		√					√			
分步计数原理		√					√			
排列定义	√							√		
排列种数计算公式		√		√			√			
组合定义	√							√		
组合种数计算公式		√		√						
组合的性质	√						√			
二项式定理	√			√						

三、教材说明

本章内容包括排列、组合和二项式定理.排列与组合是当今发展迅速的组合数学的初步知识,在计算机科学、编程理论、试验设计和其他许多处理离散现象的数学领域中有着广泛的应用.这种以计数问题为特征的内容在中等教育的数学课中较为独特,其思维方法灵活,对训练学生分析问题和解决问题的能力有重要的意义.教材首先提出了分类计数原理和分步计数原理.这两个原理体现了解决复杂问题时将问题分解的两种常用方法,并成为进一步研究排列、组合问题的基础.教材随后介绍了排列的概念,用分步计数原理导出了排列种数计算公式;又介绍了组合的概念,通过组合与排列的关系,导出了组合种数计算公式,并介绍了组合数的两

个性质.最后本章介绍了二项式定理.

全章共分四节.

第一节介绍计数的两个基本原理.教材通过实例,把日常计数时的复杂问题,按解决办法分类和解决过程分步的两种方法上升为分类计数原理和分步计数原理,给出了计算完成一件事共有多少种不同方法的一般算法.它们是贯串全章内容的理论基础.

第二节为排列.教材通过对实例的分析,引入了从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的排列的概念,然后用分步计数原理推导了排列种数的计算公式,并利用这些概念和公式解决简单的排列应用题.

第三节为组合.仍然通过对实例的分析,引入了从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的组合的概念,然后用组合与排列的关系以及分步计数原理推导了组合种数计算公式,在此基础上又进一步介绍组合数的两个性质,最后利用这些概念和公式解决简单的应用题.

第四节为二项式定理.它是多项式乘法的一种,它的系数都是特殊的组合数,是以后学习概率的预备知识,也能推出关于组合数的一些特殊恒等式或解决一些近似计算等问题.

本章重点:

1. 分类计数原理和分步计数原理(加法原理和乘法原理).
2. 排列组合的定义、种数计算公式与简单应用.
3. 二项展开式及其应用.

本章难点:

1. 在运用两个基本原理时正确进行“方法分类”和“过程分步”.
2. 在实际问题中识别、分析和解决排列、组合问题.
3. 灵活运用二项式定理计算和证明某些恒等式.

本章教学约需10学时，具体分配如下(仅供参考)：

§12－1	两个基本原理	约2学时
§12－2	排列	约3学时
§12－3	组合	约3学时
§12－4	二项式定理	约2学时

四、教学建议

§12－1 两个基本原理

1. 分类计数原理和分步计数原理是从日常计数的常识中总结归纳出来的两个基本原理.要向学生指出，它们都是用来求完成一件事共有多少种不同方法的.

2. 教材通过实例归纳出了两个计数原理.要向学生强调：完成一件事可使用几类互不关联的办法时，应使用加法原理.这里的“互不关联的办法”指每一类办法都能单独地完成此事，如不论坐何种车、船，都能从甲地到乙地；无论从书架上的哪一层，都能取出一本书等等.当完成一件事必须分成几个相互关联的步骤时，应使用乘法原理.这里的“相互关联的步骤”指完成这件事需把过程分成几步，逐步完成.如“从甲地到乙地”需分成“甲到丙”、“丙到乙”两步；“从红、白、黄三种颜色的球中各拿一个球”需分成“拿一个红球”、“拿一个白球”、“拿一个黄球”三步，少了任何一步，事情都不能完成.因两个计数原理也叫加法原理和乘法原理，从而归纳出“办法分类用加法”、“过程分步用乘法”的规律.

3. 在讲解例题时要注意培养学生良好的思维习惯，一定要先对问题作分析：看解决此问题需“办法分类”还是“过程分步”，把各类办法、每类办法中的每个步骤分析清后再逐一计数，然后合并.在本章的一开始就使学生能有条有理地进行逻辑思维，这是教好学好本章的关键.

4. 为了避免与排列的概念相混淆，本章将重复排列问题作为

乘法原理的应用放在第一节里．例 5 用 1、2、3、4、5 五个数字组成两位数，各位上数字允许重复与不允许重复，实际上分别是重复排列与排列．它们直接应用乘法原理便可解决，所以先不命名，只作为实例出现，讲解时紧扣乘法原理，在本节不必引申．

5． 例 6 是加法原理与乘法原理的综合应用，关键在于分析要清楚．在此基础上进一步作课上练习，完成练习 12－1 将有助于掌握两个基本原理．

§12－2　排　　列

1． 本节首先通过实例引入了排列的概念．

例 1 是任选二人分别参加周六与周日的活动的问题，每组名单不仅与所选人员有关，而且与谁在周六、谁在周日也有关；例 2 是排三位数问题，每个三位数不仅与其中数字有关，而且与数字所在的位置有关．讲解这两个例题时，应列举出所有的排列．课文中的具体排列是按填空位的方法写出的．若周六选志愿者 A，则名单有 $A \to B$，$A \to C$，$A \to D$；若周六选志愿者 B，则名单有 $B \to A$，$B \to C$，$B \to D$ 等等，它不仅很直观，也体现了组成排列的程序性结构，为下一段归纳排列种数公式作准备．

2． 讲完本节例 1、例 2 后，可向学生指出，若把例子中提出的事物抽象地称作“元素”，那么例 1 变成了从 4 个不同的元素中每次取出 2 个不同元素，按一定的顺序排成一排；例 2 变成从 3 个不同的元素中每次取出 3 个不同元素，按一定的顺序排成一排的问题，从而归纳出排列的定义．必须说明，定义中指的是“一个排列”，而不是指所有不同的排列和不同排列的个数．

排列定义有两个要点：一是“取出 m 个元素”是互不相同的，不允许重复选取；二是“按一定的顺序排成一排”，也就是强调问题必须与元素的位置顺序有关，当元素改变位置顺序时将出现新的结果，是一个新的排列．两个排列，只有当取出的元素完全相同，且排列的顺序也完全相同时才是同一个排列．

3. 当 $m<n$ 时是选排列，$m=n$ 时是全排列.

4. 要使学生理解排列种数公式的来历，通过公式的推导掌握**填空位法**，为解决实际问题打好基础. 要通过讲解例题，使学生懂得如何分步，在每个位置填写取出元素的个数，然后用分步计数原理算出最终结果.

5. 排列种数公式

$$P_n^m=n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$$

比较抽象，讲课时要多举些实例帮助学生熟悉它. 例如可口头介绍：

$$P_{10}^3=\underbrace{10\times9\times8}_{3\text{个}},\quad P_8^5=\underbrace{8\times7\times6\times5\times4}_{5\text{个}}$$

等等，使学生对 P_n^m 是从 n 开始 m 个连续自然数之积产生感性认识，能按 n、m 具体写出乘式求积.

当 n, m 是字母时 P_n^m 更显抽象. 练习 12－2(1)的第 3、4 题帮助学生对它加深理解. 其中第 4 题练习阶乘间的关系.

对元素个数含 x 的等式，应看作方程来解. 如第 5 题应先把 $P_{x-1}^2=2$ 变作 $(x-1)(x-2)=2$. 但这里按排列的定义要求 $x-1\geqslant2\ (n\geqslant m)$. 解题时要注意验根，避免出现增根.

计算 P_n^m 的值，因数的个数较多时用计算器更为方便.

6. 排列的应用题是本节的难点之一. 讲解本段内容，可对题目类型分为由易到难三个层次解决：

(1) 基本题

这是直接应用排列定义列式求解的问题. 求的是从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的取法种数. 如例 1 从 4 人中任选 2 人按周六、日排班共 $P_4^2=12$ 种排法；例 2 用 4、5、7 三个数字组成无重复数字的三位数共 $P_3^3=6$ 个；例 9(1)有 5 件商品排成一排任意放置，共 $P_5^5=120$ 种放法等等. 这类题关键是确认它为排列问题，而非重复排列或组合问题. 确认的方法是看：①元素是否允许

重复取,要求不许重复取,取后不放回(无放回);②取出的元素是否允许变换位置,要求不许变位.经确认是排列后才可代入公式 P_n^m 进行计算.

(2) 变式题

这是一类带有附加条件的排列题.附加条件直接(或间接)表述为某个元素“在”(或“不在”)某个位置上.如例 9(2)“某件商品放在中间”就直接表述了“在”的意思;而例 12“用 0,1,2,3,4,5 组成无重复数字的四位奇数”就间接表述了 0 不能放在首位,0,2,4 不能放在末位的意思,都是典型的变式题.它的解法通常分为直接解法即填空位法与间接解法等.

如例 8(2)“用 0,1,2,3,4 组成无重复数字的三位数”,附加条件是“0 不能作首位”.直接解法是用可作首位的 1,2,3,4 去填首位之空共 P_4^1 种方法,后两位则用其余(含 0)的四个数填空共 P_4^2 种方法,合起来为 $P_4^1 \times P_4^2 = 48$ 种方法;而间接解法是从五个数字中任意取三个数字的所有排列分为两类:①符合题意的“真三位数”;②以“0”为首位的假三位数;列出算式 $P_5^3 = N + P_4^2$,算得所求 $N = P_5^3 - P_4^2$.要通过此例帮助学生掌握这两种思维方法.具体解题时可任选其中一个方法.又如例 12 求奇数时因 0 不能作首位又不能作末位,故填空位法较方便,而求偶数时,0 可作末位,但 0 作末位时不会再作首位,情况较复杂,不便于填空位.注意到奇数个数已知,则用去除法,从总数中减去奇数个数便得偶数个数,计算便捷,所以通常先求奇数个数(末位不涉及 0)再求偶数个数.要详细讲解选择解法的原因,帮助学生提高解决问题的能力.

(3) 综合题

有的问题不是简单的一个排列问题,而有若干个排列合在一起,属于综合题.对这类问题需通过“办法分类”、“过程分步”先把综合的问题分解成简单问题再求解.

如例 9(4),有 5 件商品排成一排,要求某两件放在一起,第一

步把这两件看作一组，另三件各作一组，共四组（而不是三组），对四组进行全排列共 P_4^4 种排法；第二步放在一起的两件在组内全排列共 P_2^2 种排法，由乘法原理共有 $P_4^4\times P_2^2=48$ 种不同排法.

又如例 11，三色信号弹各一颗，可发一颗、或连续发两颗、或连续发三颗，问可表示多少种不同信号？则按发射颗数把信号分成三类，分别出现不同信号 P_3^1,P_3^2,P_3^3 种，由加法原理共有 $P_3^1+P_3^2+P_3^3=15$ 种不同信号.

练习和习题中都有相应的题，要指导学生分步、分类正确求解.

此外在本节与下节都出现**有放回**（允许重复）与**无放回**（不许重复）的情况，如本节例 10 的(1)和(2)，讲解时要注意在指定的条件下每次填空位的元素个数怎么取.

§12-3　组　　合

1. 本节同样通过实例引入了**组合**的概念，对比上节的例 1，因从四名志愿者中任选二人参加同一次活动，他们不分顺序，所以虽也是从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素的问题，但与上节例 1 不同，其区别在于“**不论顺序如何**”.从而归纳出**组合**的概念，并突出了组合与排列的联系与区别.讲解组合概念，一定要与排列对比，本节课文所列举的选正、副组长与选代表；互通一封信与互通一个电话等实例，都是对比着提出的，用这个方法来巩固**组合**的概念.可以通过练习进一步让学生熟悉它们的联系与区别.

2. 组合种数计算公式是通过组合与排列的关系导出的.通过上节对排列的综合题的学习，学生对利用“过程分步”来解题已比较熟悉，所以很容易得出 $P_n^m=C_n^m\cdot P_m^m$，推出 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}$.具体计算时用 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}$ 和计算器，不难求出结果.例 2 的计算可让学生用计算器完成，以熟悉公式.组合种数的阶乘表达式

多用于化简与证明，本节中用于组合数的性质 2 的推演，让学生了解即可.

3. 组合数有**两个重要的性质**:

$$C_n^m=C_n^{n-m} \text{ 与 } C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m,$$

它们可使组合数计算简便.教师不妨在讲解中先举一些简单实例让学生观察 C_n^m 与 C_n^{n-m} 的数值关系，例如:

$$C_4^1=\frac{P_4^1}{P_1^1}=\frac{4}{1}=4; \qquad C_4^3=\frac{P_4^3}{P_3^3}=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4;$$

$$C_5^2=\frac{P_5^2}{P_2^2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10; \qquad C_5^3=\frac{P_5^3}{P_3^3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10;$$

$$C_7^2=\frac{P_7^2}{P_2^2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21; \qquad C_7^5=\frac{P_7^5}{P_5^5}=\frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1}=21$$

等等，通过后一式约分后便是前一式，归纳出 $C_n^m=C_n^{m-1}$.还可作如下解释:值日生共 n 人，需用 m 人扫地，用 $n-m$ 人擦玻璃，现在来分配任务.一种方法是先挑扫地的人，共 C_n^m 种不同分法，剩下的 $n-m$ 人自然去擦玻璃;另一种方法是先挑擦玻璃的人，共 C_n^{n-m} 种不同分法，剩下的 m 人自然去扫地.两种方法结果是一样的，从而 $C_n^m=C_n^{n-m}$.其中性质 1 比较好懂也好记，而性质 2 比较难记，应通过例 4、练习 12－3 第 3、4 题，帮助学生记忆和运用这两个性质.

4. 组合应用题也是本章的难点，和排列的应用题类似，也要指导学生分层次分析.

首先是不带任何附加条件的基本题，如本节例 5 每两个球队赛一场，因无主、客场顺序要求，按组合定义列式 C_{10}^2.

然后是带有“在”与“不在”附加条件的变式题，如本节例 6(1)，从含 2 件次品的 20 件商品中任取 3 件“都是正品”，说明所取元素必须“在”正品集合中，则列式 C_{18}^3而非 C_{20}^3;又如例 6(4)“至少有一件次品”的解法二，从全部取法中去掉“没有次品”的情况(即

“不在”次品集合中取的情况)列式 $C_{20}^{3}-C_{18}^{3}$.

最后是综合题,其中有组合本身需分类分步的,如例 6(2)、(3)与例 7,也有分类分步后既有排列又有组合的,如例 8 及有关练习.这里最根本的是掌握好加法原理和乘法原理,正确地分类分步.

按大纲的要求,不再补充更多的难题.对学生的要求是熟练掌握教材中的例题、练习题,能独立完成习题、复习题即可.

§12-4 二项式定理

1. 教材在复习 $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ 展开式的基础上分析了 $(a+b)^4$ 展开式各项的结构,用不完全归纳的方法给出了**二项式定理**:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{n}=\mathbf{C}_{n}^{0}\boldsymbol{a}^{n}+\mathbf{C}_{n}^{1}\boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b}+\cdots+\mathbf{C}_{n}^{r}\boldsymbol{a}^{n-r}\boldsymbol{b}^{r}+\cdots+\mathbf{C}_{n}^{n}\boldsymbol{b}^{n} \quad (\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^{*})$$

而未采用数学归纳法加以证明,目的是降低难度.要通过分析 $(a+b)^4$ 各项的特点使学生了解二项展开式的各项系数 C_n^r 中的 n, r 与项数 $r+1$ 和 a、b 的指数间的关系,掌握**二项展开式**及**通项公式** $\boldsymbol{T_{r+1}=\mathbf{C}_n^r a^{n-r}b^r}$,并通过例 1、例 2、例 3 进一步熟悉二项展开式及通项公式以便于进行计算.

2. 在讲解例 3 后要向学生进一步解释,这类问题中“不含 a 的项”指 a^0 项,“含 a 的项”指 a^1 项,“含 a^2 的项”指 a^2 项等等,以免学生有误解.

3. 为了方便展开二项式,并对学生进行中华文化史和爱国主义教育,教材介绍了杨辉三角,对有兴趣的学生,可让他们按杨辉三角的规律写出 $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, $(a+b)^7$ 的展开式,并验证上述二项展开式的系数与 C_n^r 的值相等.

4. 讲解二项式定理,目的之一是学会展开二项式,解决有关的计算和近似计算问题;目的之二是为以后学习概率中的二项分