YUNCHOUXUE

普通高等院校规划教材
PUTONG GAODENG YUANXIAO GUIHUA JIAOCAI

管理科学与工程系列
GuanLi KeXue Yu GongCheng XiLIE

# 运筹学

主编/宋荣兴 孙海涛
副主编 荆湘霞 吕秀艳

经济科学出版社
Economic Science Press

YUNCHOUXUE

普通高等院校规划教材

PUTONG GAODENG YUANXIAO GUIHUA JIAOCAI

管理科学与工程系列

GuanLi KeXue Yu GongCheng XiLIE

# 运筹学

主编／宋荣兴 孙海涛

副主编 荆湘霞 吕秀艳

经济科学出版社

Economic Science Press

**图书在版编目（CIP）数据**

运筹学／宋荣兴，孙海涛主编．—北京：经济科学出版社，2011.1

普通高等院校规划教材．管理科学与工程系列

ISBN 978-7-5141-0003-7

Ⅰ.①运…　Ⅱ.①宋…②孙…　Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材　Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 205450 号

责任编辑：纪晓津
责任校对：徐领柱
版式设计：代小卫
技术编辑：董永亭

**运　筹　学**

主　编　宋荣兴　孙海涛
副主编　荆湘霞　吕秀艳
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京欣舒印务有限公司印刷
三佳集团装订厂装订
787×1092　16 开　25 印张　460000 字
2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷
印数：0001—5000 册
ISBN 978-7-5141-0003-7　定价：38.00 元
**（图书出现印装问题，本社负责调换）**

# 管理科学与工程系列教材

# 总序

值此管理科学与工程学会成立之际，谨以这套管理科学与工程系列丛书是献给从事管理科学与工程专业的学界同仁。

改革开放经历30多年的发展，中国经济改革进入了一个崭新的发展时期。追溯20世纪，管理理论与实践得到了飞速发展，研究领域不断拓宽，从初期的经验管理到后期的科学管理；从工业化时代的规模经营管理到信息化时代的基于信息基础的企业再造；从注重等级和控制的“金字塔”组织模式到基于网络信息技术和知识的“柔性”组织模式，这种历史的沿革无论在管理理念、方法上，还是在管理的技术、实践上都发生了巨大的变化。1996年国家自然科学基金委员会管理科学升格为管理学部；1997年在教育部学科目录调整过程中，管理学同经济学并列成为独立的一级学科；2002年中国工程院设立管理学院院士。这些重大的变革标志管理科学与工程的重要地位得到社会各界的认可。

管理科学与工程教育如何迎接21世纪的挑战，适应变化的需要。世界著名的管理学家彼得·F·德鲁克（Peter F. Drufcker）曾经指出“对我们的社会来说，管理是一种最显著的创新。”另一位世界著名管理学家亨利·明茨伯格（Henry Mintzberg）也曾经指出：“彻底重塑传统管理教育的时代已经来临。”在时代呼唤“管理教育创新”的背景下，组织编著一套适应21世纪要求的管理科学与工程学科规划教材是非常必要和及时的。

管理科学与工程精品课程系列教材建设将坚持全面、系统、分层次、高质量的建设原则，以教育部管理科学与工程类学科专业教学指导委员会最新发布的专业规范为基准，遵循教改方面。教材建设是培

养专业人才的基础建设之一，经过20多年的教学实践和科学研究，在培养人才的同时，积累了较丰富的教学经验和大量的工程实践案例，在此基础上编写《管理学原理》、《技术经济学》、《管理信息系统》、《运筹学》、《工程项目管理》、《建设工程造价管理》、《房地产经营管理》、《生产运作管理》、《人力资源与组织行为学》等管理科学与工程主要课程教材。教材重点关注管理科学与工程平台课程体系建设，强调管理科学与工程实践性很强的特点和信息技术不断渗透的趋势。相信这套教材的出版发行将有助于管理科学与工程人才的培养。

希望这套教材的出版，能受到国内各大学同仁的欢迎，对管理科学与工程这门新兴学科的发展起到有力的推动作用。

中国工程院院士
中国社会科学院学部委员
中国管理科学与工程学会理事长

李京文

2009年6月于北京

# 前言

运筹学是20世纪40年代后期发展起来的一门研究人类对各种资源的运用及筹划活动的新兴学科，其目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律，以便最大限度地发挥有限资源的效益，从而达到总体或全局有效或平衡的目标。它注重用定量分析的方法解释、解决人类在生产生活、经营管理、工程技术等活动出现的决策问题，为科学化决策提供数理依据和技术支持，是管理决策者进行科学决策的重要辅助工具。伴随国际经济一体化和组织经营活动的多元化、经营目标的多样性的发展趋势，运筹学将在人类的生产、生活、经营管理、工程技术等活动中发挥更大的作用。

本书是青岛理工大学管理科学与工程系列教材之一，它是为满足经济管理类专业本科生教学需要而编写的，同时也可作为经济管理类硕士研究生、管理人员及相关人员的参考书。本书在编写过程中结合经济管理类学生的专业特点，从以下方面进行了考虑：(1) 根据学生学习的需要，注重理论与方法的有机结合。一方面较全面系统地介绍了运筹学学科体系的理论和方法；另一方面又突出方法的实际应用。(2) 注重对学生应用能力的培养。本书各章节中所涉及的实例密切结合经济管理的实际问题，通过实例潜移默化地引导学生去发现问题、分析问题、解决问题；同时在每章中对计算机应用软件进行介绍，以帮助学生加强对问题的理解和分析，提高他们的实际应用能力。(3) 借鉴国内外同类教科书近年来的最新研究成果，对本书体系进行优化，既强化对重点知识内容的叙述，又对一般应用性知识进行介绍，尽量做到深入浅出。本书在编写过程中大量参阅了国内外同类教科书，在此一并表示感谢。

本书由宋荣兴、孙海涛任主编，荆湘霞、吕秀艳任副主编，各章编写具体分工：各章软件应用由宋荣兴负责编写；第一章、第三章由孙海涛负责编写；第二章由李培培负责编写；第四章由孙海涛、孙传朋负责编写；第五章、第六章、第七章由荆湘霞负责编写；第八章、第十章、第十二章由吕秀艳负责编写；第九章由占家权负责编写；第十一章由张振森负责编写。本书完成后，由李永江主审，

李永江对本书提出了许多中肯的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

虽经努力，但因作者水平所限，书中疏漏及错误在所难免，恳请各位专家及读者批评指正。

编 者

2010 年 8 月

# 目　录

# 第一章 线性规划

线性规划（Linear Programming）是运筹学中研究较早且比较成熟的一个重要分支，它主要研究在线性等式（或不等式）的限制下，使得某一线性目标函数取得最大值（或最小值）的问题。早在 1939 年，苏联数学家康托洛维奇（Л. В. Канторович）就提出了生产组织和管理中的线性规划模型。1947 年美国学者丹捷格（G. B. Dantzig）提出了求解一般线性规划的单纯形方法。单纯形法的出现使得线性规划在理论上趋于成熟，应用日益广泛和深入。特别是能用于处理成千上万个约束条件和变量的计算机软件的出现，使得线性规划在工业、农业、商业、交通运输、军事、经济计划与管理、决策等领域中都得到了重要的应用。

## 第一节　线性规划问题及其数学模型

### 一、线性规划问题的提出

人类在进行一定的活动中，经常会碰到这样的问题，即在资源（如资金、原材料、设备、人工等）有限的条件下，如何统筹安排、合理规划，以最少的资源完成确定的任务或目标。这样的问题属于资源的最优利用问题，也是线性规划所要研究的问题。

**【例 1－1】**某企业计划利用三种资源生产甲、乙两种产品，已知生产单位产品的资源消耗、单位产品的利润等数据如表 1－1 所示。假定市场需求无限制，企业决策者应如何安排生产计划，使企业利润最大？

表 1－1 产品、资源消耗及利润情况

| 资源 \ 消耗 \ 产品 | 甲 | 乙 | 现有资源 |
|---|---|---|---|
| 设备（台时） | 1 | 1 | 16 |
| 材料 A（千克） | 3 | 2 | 36 |
| 材料 B（千克） | 0 | 5 | 65 |
| 利润（元/件） | 90 | 70 | |

**解：**这是一个线性规划问题，该问题可用一定的数学语言来描述，即可以用一定的数学模型表示。设 $x_1$、$x_2$ 分别表示甲、乙两种产品的生产数量（件），称为决策变量，且 $x_1$、$x_2 \geqslant 0$；$z$ 表示企业的总利润。由题意，问题可转换成求变量 $x_1$、$x_2$ 的值，使得总利润最大，即：

$$\max z = 90x_1 + 70x_2$$

此时称 $z = 90x_1 + 70x_2$ 为目标函数。

由目标函数可知，两种产品生产的越多，企业获得的利润就越多，但企业两种产品的生产量要受到企业现有设备和材料的限制，这就是两种产品生产量的资源约束，称为约束条件。就设备而言，生产两种产品实际消耗的设备总台时，不能超过现有的设备总台时，这种关系可以用数学语言表述为：

$$x_1 + x_2 \leqslant 16$$

对材料 A 来讲，生产两种产品实际消耗的总量，不能超过现有资源量，即：$3x_1 + 2x_2 \leqslant 36$。

对材料 B 来讲，生产两种产品实际消耗的总量，也不能超过现有资源量，即：$5x_2 \leqslant 65$。

则该问题的数学模型可归纳为：

$$\max z = 90x_1 + 70x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 16 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 36 \\ 5x_2 \leqslant 65 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

**【例 1－2】**设某种动物每天需要摄入的蛋白质、矿物质、维生素的最低量及 A、B、C、D、E 五种饲料每千克营养成分的含量及单位价格如表 1－2 所示。

表 1-2 五种饲料营养成分含量及单位价格

| 类别 | A | B | C | D | E | 每天最低摄入量（克） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 蛋白质（克） | 3 | 2 | 1 | 6 | 18 | 700 |
| 矿物质（克） | 1 | 0.5 | 0.2 | 2 | 0.5 | 30 |
| 维生素（克） | 0.5 | 1 | 0.2 | 2 | 0.8 | 100 |
| 价格（元/千克） | 2 | 7 | 4 | 3 | 8 | |

试建立该问题的数学模型。要求既满足该种动物每天营养成分的需要量，又使总的费用最省。

**解**：该问题可看做是一个五种饲料的混合搭配问题，并且要求总的费用最省。设 $x_j$ 为第 $j$ 种饲料的每天使用量，根据题意得该问题的线性规划模型为：

$$\min z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 8x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 \geqslant 700 \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 \geqslant 30 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.8x_5 \geqslant 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

## 二、线性规划问题数学模型的一般形式

由上述两个例子可以看出，线性规划问题的数学模型由三个要素组成：

（1）变量，或称决策变量，它们是问题中所要解决的未知量，表明规划中用数量表示的方案、措施，可由决策者决定和控制；

（2）目标函数，是决策变量的函数，按问题的目标不同分别在这个函数前加上 max 或 min；

（3）约束条件，由一组含决策变量的等式或不等式组成，表明决策变量取值时所受到的各种资源条件的限制。

假定线性规划问题中含有 $n$ 个决策变量 $x_j(j=1, \cdots, n)$，在目标函数中 $x_j$ 的系数为 $c_j$（$c_j$ 通常称为价值系数）；有 $m$ 种资源的限制，每种资源数量用 $b_i(i=1, \cdots, m)$ 表示；用 $a_{ij}$ 表示变量 $x_j$ 取值为 1 个单位时所消耗或含有的第 $i$ 种资源的数量，通常称 $a_{ij}$ 为技术系数或消耗系数。则上述线性规划问题的数学模型可表示为：

目标函数 $\max$（或 $\min$）$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$\text{约束条件}\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b_m\\x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant0\end{cases}$$

简写为：

$$\max\ (\text{或}\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_i & (i=1,\cdots,m)\\x_j\geqslant0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

用向量形式进行表达时，模型可写为：

$$\max\ (\text{或}\min)\ z=CX$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}P_jx_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b\\x_j\geqslant0\end{cases}$$

其中：$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$；$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$；$P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$；$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$

用矩阵形式来表示可写为：

$$\max\ (\text{或}\min)\ z=CX$$

$$\begin{cases}AX\leqslant(\text{或}=,\ \geqslant)b\\X\geqslant0\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

其中 $A$ 称为约束方程组（约束条件）的系数矩阵。

变量 $x_j$ 的取值一般为非负，即 $x_j\geqslant0$；从数学意义上可以有 $x_j\leqslant0$。即如果变量 $x_j$ 表示第 $j$ 种产品本期内产量相对于前期产量的增加值，则 $x_j$ 的取值范围为 $(-\infty,\ +\infty)$，称 $x_j$ 取值不受约束，或 $x_j$ 无约束。

## 三、线性规划问题的标准形式

由于目标函数和约束条件内容和形式上的差别，线性规划问题可以有多种表达式。为了便于讨论和制定统一的算法，规定线性规划问题的标准形式如下：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

标准形式的线性规划模型中，目标函数为求最大值（有些教科书上规定是求最小值），约束条件全为等式，约束条件右端常数项 $b_i$ 全为非负值，变量 $x_j$ 的取值全为非负值。对不符合标准形式（或称非标准形式）的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式。

（1）目标函数为求最小值，即为：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

因为求 $\min z$ 等价于求 $\max(-z)$。令 $z' = -z$，即化为：

$$\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

（2）约束条件的右端项 $b_i < 0$ 时，只需将等式或不等式两端同乘（$-1$），则等式右端项必大于 0。

（3）约束条件为不等式，这里有两种情况：

①约束条件为"$\leqslant$"不等式，则在不等式的左端加入一个非负的松弛变量。

如 $2x_1 + x_2 \leqslant 40$，可令 $x_3 = 40 - 2x_1 - x_2$，或 $2x_1 + x_2 + x_3 = 40$，显然 $x_3 \geqslant 0$。

②约束条件为"$\geqslant$"不等式，则在不等式的左端减去一个非负的剩余变量。

如 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 \geqslant 700$，可令 $x_6 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 - 700$ 或 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 - x_6 = 700$，$x_6 \geqslant 0$。

松弛变量和剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用和超出的资源量，二者均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为 0。

（4）取值无约束的变量。如果变量 $x$ 代表某产品当年销售收入与销售成本之差，显然 $x$ 的取值可能为正也可能为负，这时可令 $x = x' - x''$，其中 $x' \geqslant 0$，$x'' \geqslant 0$，将其代入线性规划模型即可。