



全国理科高等数学研究会推荐  
微积分同步辅导及考研复习用书

Б. П. 吉米多维奇

# 微积分习题 精选精解

主审 刘建亚 吴 臻  
主编 张天德 李 勇

WEIJIFEN XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社  
www.lkj.com.cn

全国理科高等数学研究会推荐  
微积分同步辅导及考研复习用书

Б. П. 吉米多维奇

# 微积分习题 精选精解

主审 刘建亚 吴 臻  
主编 张天德 李 勇

WEIJIFEN XITI JINGXUAN JINGJIE

## 图书在版编目 (CIP) 数据

微积分习题精选精解/张天德,李勇主编. —济南:山东科学技术出版社,2010.10

ISBN 978 - 7 - 5331 - 5671 - 8

I. ①微... II. ①张...②李... III. ①微积分—高等学校—解题 IV. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 181178 号

## Б. П. 吉米多维奇 微积分习题精选精解

主审 刘建亚 吴 臻

主编 张天德 李 勇

---

**出版者:** 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098088

网址: [www.lkj.com.cn](http://www.lkj.com.cn)

电子邮件: [sdkj@sdpress.com.cn](mailto:sdkj@sdpress.com.cn)

**发行者:** 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路 16 号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

**印刷者:** 山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司

地址: 山东临沂高新技术产业开发区新华路

邮编: 267017 电话: (0539) 2925659

---

开本: 720mm × 1020mm 1/16

印张: 24.25

版次: 2010 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

---

ISBN 978 - 7 - 5331 - 5671 - 8

定价: 36.00 元



## 前言

QIANYAN

B. II. 吉米多维奇是前苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《吉米多维奇数学分析习题集》(含 4462 道习题),内容丰富,覆盖面广泛,针对性强,在我国有较大的影响,书中的许多习题,都广泛地被我国多所高等院校《微积分》教材所采用,有些题目甚至出现在全国考研等试题中。

但是,由于该书题量较大,部分习题难度大,全部用来练习耗时较多,为了让读者在一定时间内达到较好的学习效果,提高学习效率,2007年,我们对该书进行了精选,出版了《吉米多维奇——高等数学习题精选精解》。此书出版后立刻受到高校学生、教师的高度关注,多次再版仍然供不应求。近几年来,财经类院校异军突起,但财经数学(微积分)有别于高等数学,应财经院校的学生强烈要求,我们再次对该书进行了精选,选出了部分难度适中,有代表性且属于微积分范畴的习题,除此之外,作者还结合自己多年对考研试题的研究和多年辅导考研数学的经验,精心选择了少量近年国内研究生入学考试的典型试题,做出了科学、规范的解答,有些还做了点评,指出了解决此类题目的思路和方法。有的题目给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维的能力。

本书共分八章,每章又分若干节。在章节设置上与财经院校《微积分》教材基本一致,涉及的内容涵盖了《微积分》的全部主题,涵盖了硕士研究生入学考试数学三大纲的全部内容。在本书中,每章除最后一节外,每节包括两大部分内容:

**知识要点:**简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统的梳理。

**基本题型:**对每节常见的基本题型进行了归纳总结,便于读者理解和掌握基本知识,有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。



## 前 言

QIANYAN

每章最后一节是综合提高题型,这一节的题目综合性较强,难度较大,有相当一部分是考研真题,通过本节的学习,可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力,把握重点、了解考研动向、开拓视野。

本书由张天德教授、李勇教授主编。山东大学刘建亚教授、吴臻教授对全书作了仔细的校审,并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。该书可以作为在读大学生同步学习的优秀辅导书,也可以作为广大教师的教学参考书,还可以为毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。读者使用本书时,宜先独立求解,然后再和本书作比较,这样一定会获益匪浅。

书中不当之处,恳请指正。

编 者

2010年9月



# 目录

MULU

<b>第一章</b>	<b>极限与连续</b> .....	(1)
§ 1.	函数 .....	(1)
§ 2.	数列的极限 .....	(7)
§ 3.	函数的极限 .....	(9)
§ 4.	无穷小与无穷大 .....	(10)
§ 5.	极限运算法则 .....	(12)
§ 6.	极限存在准则 两个重要极限 .....	(15)
§ 7.	无穷小的比较 .....	(19)
§ 8.	连续函数的运算与初等函数的连续性 .....	(22)
§ 9.	闭区间上连续函数的性质 .....	(27)
§ 10.	综合提高题型 .....	(29)
<b>第二章</b>	<b>导数与微分</b> .....	(41)
§ 1.	导数的概念 .....	(41)
§ 2.	导数的基本公式与运算法则 .....	(50)
§ 3.	高阶导数 隐函数的导数 .....	(55)
§ 4.	微分 .....	(61)
§ 5.	综合提高题型 .....	(63)
<b>第三章</b>	<b>微分中值定理与导数的应用</b> .....	(71)
§ 1.	微分中值定理 .....	(71)
§ 2.	洛必达法则 .....	(82)
§ 3.	泰勒公式 .....	(90)
§ 4.	函数的单调性与曲线的凹凸性 .....	(93)
§ 5.	函数的极值与最大值、最小值 .....	(102)
§ 6.	函数图形的描绘 .....	(108)
§ 7.	导数在经济中的应用 .....	(113)
§ 8.	综合提高题型 .....	(116)
<b>第四章</b>	<b>不定积分</b> .....	(127)
§ 1.	不定积分的概念与性质 .....	(127)



# 目 录

MULU

§ 2. 换元积分法 .....	(131)
§ 3. 分部积分法 .....	(137)
§ 4. 有理函数的积分 .....	(140)
§ 5. 综合提高题型 .....	(145)
<b>第五章 定积分 .....</b>	<b>(149)</b>
§ 1. 定积分的概念与性质 .....	(149)
§ 2. 微积分基本公式 .....	(157)
§ 3. 定积分的换元法和分部积分法 .....	(165)
§ 4. 广义积分 .....	(175)
§ 5. 定积分的应用 .....	(182)
§ 6. 综合提高题型 .....	(195)
<b>第六章 多元函数微积分 .....</b>	<b>(219)</b>
§ 1. 多元函数的基本概念 .....	(219)
§ 2. 偏导数 .....	(223)
§ 3. 全微分 .....	(230)
§ 4. 多元复合函数的求导法则 .....	(234)
§ 5. 隐函数的求导法则 .....	(240)
§ 6. 多元函数极值及其应用 .....	(243)
§ 7. 二重积分 .....	(254)
§ 8. 综合提高题型 .....	(271)
<b>第七章 无穷级数 .....</b>	<b>(287)</b>
§ 1. 常数项级数的概念和性质 .....	(287)
§ 2. 正项级数的审敛法 .....	(294)
§ 3. 任意项级数的审敛法 .....	(300)
§ 4. 幂级数 .....	(307)
§ 5. 函数展开成幂级数 .....	(320)
§ 6. 综合提高题型 .....	(328)



# 目 录

MULU

第八章 常微分方程与差分方程 .....	(340)
§ 1. 微分方程的基本概念 .....	(340)
§ 2. 可分离变量的微分方程 .....	(342)
§ 3. 一阶线性微分方程 .....	(349)
§ 4. 二阶常系数线性微分方程 .....	(356)
§ 5. 差分方程 .....	(368)
§ 6. 综合提高题型 .....	(370)



# 第一章 极限与连续

## § 1. 函 数

**1. 函数的概念** 设有两个变量  $x$  与  $y$ , 如果变量  $x$  在其变化范围  $D$  内任取一个确定的数值时, 变量  $y$  按照一定的规则  $f$  总有唯一确定的数值和它对应, 则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数, 记为  $y=f(x)$ .  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量,  $D$  称为函数的定义域,  $f$  表示由  $x$  确定  $y$  的对应规则.

### 2. 函数的主要性质

(1) 有界性 设函数  $f(x)$  在集合  $D$  上有定义, 如果存在一个正常数  $M$ , 使得对于  $x$  在  $D$  上的任意取值, 均有  $|f(x)| < M$ , 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上有界, 否则称  $f(x)$  在  $D$  上无界.

(2) 单调性 设函数  $f(x)$  在某区间  $D$  上有定义, 如果对于  $D$  上任意两点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 均有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上单调增加(或单调减少). 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性 设函数  $f(x)$  在关于原点对称的区间  $D$  上有定义, 如果对  $D$  上任意点  $x$ , 均有  $f(-x) = f(x)$  (或  $f(-x) = -f(x)$ ), 则称函数  $f(x)$  为偶函数(或奇函数).

(4) 周期性 设函数  $f(x)$  在集合  $D$  上有定义, 如果存在正常数  $T$ , 使得对于  $D$  上任意  $x$ , 均有  $f(x+T) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为周期函数, 使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

**3. 基本初等函数与初等函数** 常数函数  $y=c$  ( $c$  为常数), 幂函数  $y=x^\alpha$  ( $\alpha \in R$ ), 指数函数  $y=a^x$  ( $a \neq 1, a > 0$ ), 对数函数  $y=\log_a x$  ( $a \neq 1, a > 0$ ), 三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合, 并由一个式子表示的函数称为初等函数.

## 基本题型

### 求一元函数的定义域

**【1】** 函数  $y = \sqrt{1-2x} + \sqrt{e - e^{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

解 由已知条件知

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 \leq 1 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ -1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1 \end{cases}.$$

解得  $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ , 因此定义域为  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ .

故应填  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ .

**【2】** 函数  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

(A)  $x \in \mathbf{R}$ , 但  $x \neq 0$ (B)  $x \in \mathbf{R}$ , 但  $1 + \frac{1}{x} \neq 0$ (C)  $x \in \mathbf{R}$ , 但  $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$ (D)  $x \in \mathbf{R}$ , 但  $x \neq 0, -1$ 

解 由  $x \neq 0, 1 + \frac{1}{x} \neq 0, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0$ , 得  $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$ .

故应选(C).

【3】已知  $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$ , 则  $\varphi(x)$  的定义域为\_\_\_\_\_.解 由  $\sin \varphi(x) = 1 - x^2$ , 所以  $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$ 从而  $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$ , 所以  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ .故应填  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .【4】已知  $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$ , 且  $\varphi(x) \geq 0$ , 则  $\varphi(x) =$ \_\_\_\_\_, 定义域为\_\_\_\_\_.解 因为  $f(x) = e^{x^2}$ , 所以  $f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2}$ , 而  $f[\varphi(x)] = 1 - x$ , 因此  $e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x$ .对上式两端取对数, 得  $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ .由  $\ln(1-x) \geq 0$ , 有  $1-x \geq 1$ , 即  $x \leq 0$ .故应填  $\sqrt{\ln(1-x)}, (-\infty, 0]$ .【5】已知函数  $f(\log_a x) = \sqrt{x}$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_, 其定义域为\_\_\_\_\_, 其中  $a \neq 1$ , 且  $a > 0$ .解 令  $\log_a x = t$ , 则  $x = a^t$ . 函数  $f(\log_a x) = \sqrt{x}$  可化为  $f(t) = a^{\frac{t}{2}}$ , 从而  $f(x) = a^{\frac{x}{2}}$ .定义域为  $(-\infty, +\infty)$ .故应填  $a^{\frac{x}{2}}, (-\infty, +\infty)$ .【6】设  $f(x) = \tan x, f[g(x)] = x^2 - 2$ , 且  $|g(x)| \leq \frac{\pi}{4}$ , 则  $g(x)$  的定义域为\_\_\_\_\_.解  $f[g(x)] = \tan g(x) = x^2 - 2$ , 所以  $g(x) = \arctan(x^2 - 2)$ .因为  $|g(x)| \leq \frac{\pi}{4}$ , 所以  $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$ , 因此  $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$  或  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ .故应填  $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$ .

### 求初等函数的表达式

【7】已知  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ , 求  $f(x)$ .解 因为  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$ .所以  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, x \neq \pm\sqrt{2}$ .【8】设  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3f(x) - 2x$ , 求  $f(x)$ .



解 令  $\frac{x+1}{x-1}=t$ , 则  $x=\frac{t+1}{t-1}$ ,

于是  $f(t)=3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{2t+2}{t-1}=3[3f(t)-2t]-\frac{2t+2}{t-1}$ ,

整理得  $8f(t)=6t+2\frac{t+1}{t-1}$ ,

所以  $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}, x\neq 1$ .

【9】设  $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $f_1(x)=f[f(x)]$ ,  $f_2(x)=f[f_1(x)]$ ,  $\dots$ ,

$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)](n=1, 2, \dots)$ . 则  $f_n(x)=$ \_\_\_\_\_.

解  $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

故应填  $\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$ .

【10】设  $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_8x^8=(2x-1)^8$ , 求  $a_1+a_2+\dots+a_7$ .

解 设  $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_8x^8=(2x-1)^8$ , 则

$$f(0)=a_0=1, f(1)=a_0+a_1+\dots+a_8=1.$$

比较两边  $x^8$  的系数  $a_8=2^8$ .

故  $a_1+a_2+\dots+a_7=1-a_0-a_8=-256$ .

【11】设  $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}$ , 求  $f(x)$ .

解 由  $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}$  (\*)

以  $\frac{1}{x}$  代  $x$ , 可得  $2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\frac{2}{x}+3x$  (\*\*)

(\*)与(\*\*)联立, 解得  $f(x)=\frac{7}{3}x+\frac{8}{3x}$ .

### 求分段函数的表达式

【12】设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 对任意  $x$ , 恒有  $f(x+1)=2f(x)$ , 且当  $x\in[0, 1]$  时,  $f(x)=x(1-x^2)$ , 求  $f(x)$  在  $[-1, 0]$  与  $[1, 2]$  上的表达式

解 当  $-1\leq x\leq 0$  时,  $0\leq x+1\leq 1$ ,  $f(x+1)=(x+1)(1-(x+1)^2)=-x(x+1)(x^2+2x)$ .

于是, 当  $-1\leq x\leq 0$  时,  $f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=-\frac{1}{2}x(x+1)(x^2+2x)$ .



当  $1 \leq x \leq 2$  时,  $0 \leq x-1 \leq 1$ ,  $f(x-1) = (x-1)(1-(x-1)^2) = (x-1)(2x-x^2)$ .

于是, 当  $1 \leq x \leq 2$  时,  $f(x) = f[(x-1)+1] = 2f(x-1) = 2(x-1)(2x-x^2)$ .

【13】设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f\{f[f(x)]\}$  等于

- (A) 0    (B) 1    (C)  $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$     (D)  $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

解 由  $f[f(x)] = 1$  得  $f\{f[f(x)]\} = 1$ .

故应选(B).

【14】设  $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $g[f(x)] =$  \_\_\_\_\_

- (A)  $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$     (B)  $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x^2, & x \geq 0 \end{cases}$   
 (C)  $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$     (D)  $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

解  $g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0 \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0 \\ x^2+2, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$ .

故应选(D).

### 判断函数的奇偶性

【15】下列函数中非奇非偶的函数是\_\_\_\_\_.

- (A)  $f(x) = 3^x - 3^{-x}$     (B)  $f(x) = x(1-x)$   
 (C)  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     (D)  $f(x) = x^2 \cos x$

解 易验证(A)为奇函数,(B)为非奇非偶函数,(C)为奇函数,(D)为偶函数.

故应选(B).

【16】设  $f(x)$  为奇函数, 判断下列函数的奇偶性:

- (1)  $xf(x)$     (2)  $(x^2+1)f(x)$     (3)  $|f(x)|$   
 (4)  $-f(-x)$     (5)  $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}\right)$

解 (1) 设  $F(x) = xf(x)$ , 则  $F(-x) = (-x)f(-x) = xf(x) = F(x)$ ,

故  $xf(x)$  为偶函数.

同理可得:(2)  $(x^2+1)f(x)$  为奇函数;    (3)  $|f(x)|$  为偶函数;

(4)  $-f(-x)$  为奇函数;    (5)  $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}\right)$  为偶函数.

【17】已知函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 则  $f(x)$  是\_\_\_\_\_.

- (A) 奇函数    (B) 偶函数    (C) 非奇非偶函数    (D) 不能确定

解 因为  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 所以  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ , 从而  $f(0) = 0$ . 因为  $0 = f(0) = f(x-x) = f[x+(-x)] = f(x) + f(-x)$ , 所以  $f(-x) = -f(x)$ , 因此,  $f(x)$  是奇函数.



故应选(A).

【18】设  $f(x)$  为奇函数,  $g(x)$  为偶函数, 且它们可以构成复合函数

$$f[f(x)], g[f(x)], f[g(x)], g[g(x)],$$

则其中为奇函数的是\_\_\_\_\_.

- (A)  $f[f(x)]$     (B)  $g[f(x)]$     (C)  $f[g(x)]$     (D)  $g[g(x)]$

解 由已知条件知  $f(-x) = -f(x)$ ,  $g(-x) = g(x)$ . 设  $F(x) = f[f(x)]$ , 则

$$F(-x) = f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)].$$

所以  $f[f(x)]$  为奇函数.

故应选(A).

### 讨论函数的单调性

【19】设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 且对任意  $x, y \in (-\infty, +\infty)$  有  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , 证明  $F(x) = f(x) + x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加.

证 任意  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ ,  $x_2 > x_1$ ,

有  $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$ ,

而  $f(x_1) - f(x_2) \leq |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$ ,

因而  $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$ ,

所以  $F(x_1) < F(x_2)$ ,

即  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加.

【20】设  $f(x), g(x), h(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的单调增加函数, 且  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , 证明  $f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)]$ .

证 因为  $f(x), g(x), h(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单增, 所以对任意  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ ,  $x_2 > x_1$ , 有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ,  $g(x_1) \leq g(x_2)$ ,  $h(x_1) \leq h(x_2)$ .

又对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , 所以

$$f[f(x)] \leq f[g(x)] \leq g[g(x)],$$

$$g[g(x)] \leq g[h(x)] \leq h[h(x)],$$

即  $f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)]$ .

### 一元函数周期性的讨论

【21】设  $[x]$  是表示不超过  $x$  的最大整数, 则  $y = x - [x]$  是\_\_\_\_\_.

- (A) 无界函数    (B) 周期为 1 的周期函数    (C) 单调函数    (D) 偶函数

解  $y = x - [x]$  的图象如图 21 所示.

故应选(B).

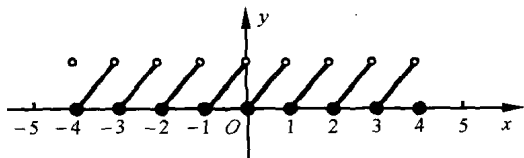


图 21



【22】设对任何  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 存在常数  $c \neq 0$ , 使  $f(x+c) = -f(x)$ . 证明  $f(x)$  是周期函数.

证 对任意  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $f(x+c) = -f(x)$ , 所以

$$f(x+2c) = f[(x+c)+c] = -f(x+c) = f(x),$$

故  $f(x)$  为周期函数.

### 求反函数

【23】函数  $y = \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt{1-x}}$  的反函数为\_\_\_\_\_.

解 令  $t = \sqrt{1-x}$ , 则  $y = \frac{1+t}{1-t}$ , 所以  $t = \frac{y-1}{y+1}$ , 即  $\sqrt{1-x} = \frac{y-1}{y+1}$ , 从而

$$x = 1 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 = \frac{4y}{(y+1)^2},$$

因此反函数为  $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$ .

故应填  $y = \frac{4x}{(x+1)^2}, x \neq -1$ .

### 讨论一元函数的值域

【24】函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$  的值域是\_\_\_\_\_.

(A)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$       (B)  $[0, 1]$       (C)  $[-1, 0]$       (D)  $[-1, 1]$

解 因为  $|f(x)| = \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{|x|}{1+x^2} < \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ , 所以  $-\frac{1}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$ .

故应选(A).

【25】函数  $y = \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)}$  的值域是\_\_\_\_\_.

(A)  $[-1, 1]$       (B)  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$       (C)  $[0, 1]$       (D)  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

解 因为  $1+x^2 \geq 2|x|$ , 所以  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ ,

因此  $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{2(1+x^2)} \leq \frac{\pi}{4}$ , 从而  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

故应选(B).

【26】求  $y = f(x) = \begin{cases} 3-x^3, & x < -2 \\ 5-x, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1-(x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$  的值域, 并求它的反函数.

解 当  $x < -2$  时,  $y = 3-x^3, x = \sqrt[3]{3-y}$ , 且  $y > 3+8=11$ ;

当  $-2 \leq x \leq 2$  时,  $y = 5-x, x = 5-y$ , 且  $3 \leq y \leq 7$ ;

当  $x > 2$  时,  $y = 1-(x-2)^2, x = 2 + \sqrt{1-y}$ , 且  $y < 1$ ;

所以  $y = f(x)$  的值域为  $(-\infty, 1) \cup [3, 7] \cup (11, +\infty)$ .



$$y=f(x) \text{ 的反函数为 } y = \begin{cases} 2 + \sqrt{1-x}, & x < 1 \\ 5-x, & 3 \leq x \leq 7 \\ \sqrt[3]{3-x}, & x > 11 \end{cases}$$

## § 2. 数列的极限

**1. 数列** 一个定义在正整数集合上的函数  $a_n = f(n)$  (称为整标函数), 当自变量  $n$  按正整数  $1, 2, 3, \dots$  依次增大的顺序取值时, 函数按相应的顺序排成一串数:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

称为一个无穷数列, 简称数列. 数列中的每一个数称为数列的项,  $f(n)$  称为数列的一般项或通项.

### 2. 数列极限的定义

(1) 设  $\{a_n\}$  是一数列, 如果存在常数  $a$ , 当  $n$  无限增大时,  $a_n$  无限接近(或趋近)于  $a$ , 则称数列  $\{a_n\}$  收敛,  $a$  称为数列  $\{a_n\}$  的极限, 或称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 或  $n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow a$ . 当  $n \rightarrow \infty$  时, 若不存在这样的常数  $a$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散或不收敛, 也可以说极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在.

(2) 设  $\{a_n\}$  为一个数列,  $a$  为一个常数. 若对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 都存在一个正整数  $N$ , 使得  $n > N$  的一切  $a_n$  都满足不等式  $|a_n - a| < \epsilon$ , 则称  $a$  为数列  $\{a_n\}$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

### 3. 数列极限的性质

唯一性: 收敛数列的极限是唯一的.

即若数列  $\{a_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , 则  $a = b$ .

有界性: 假设数列  $\{a_n\}$  收敛, 则数列  $\{a_n\}$  必有界, 即存在常数  $M > 0$ , 使得  $|a_n| < M$  (任意  $n \in \mathbb{N}$ ). 这个性质中的  $M$  显然不是唯一的, 重要的是它的存在性.

保号性: 假设数列  $\{a_n\}$  收敛, 其极限为  $a$ .

(1) 若有正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时  $a_n > 0$  (或  $< 0$ ), 则  $a \geq 0$  (或  $\leq 0$ ).

(2) 若  $a > 0$  (或  $< 0$ ), 则有正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n > 0$  (或  $< 0$ ).

## 基本题型

### 有关数列极限存在性的判定

**【27】** “对任意给定的  $\epsilon \in (0, 1)$ , 总存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时, 恒有  $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$  的\_\_\_\_\_.

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

解 本题应选(C).

**【28】** 设  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则必有\_\_\_\_\_.



- (A)  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立      (B)  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立  
 (C) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在      (D) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在

解 取  $a_n = \frac{2}{n}$ ,  $b_n = 1$ ,  $c_n = \frac{n}{2}$ , ( $n=1, 2, \dots$ ), 则选项(A)、(B)、(C)均可排除.

对于选项(D), 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$ .

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在.

故应选(D).

**点评** 为了正确而迅速的解答选择题, 首先要对题意和备选项进行整体的对比考查, 弄清题目的考察目标, 从题干和备选项中获得解决问题的充分信息, 其次选择适当的解题方法, 下面归纳几种解题方法, 供读者参考.

**直接法:** 直接从题目的已知条件出发, 经过严密的推导、合理的运算从而得出结果和判断的方法, 其选择过程是先计算, 然后将计算的结果与备选项对照, 找到正确选项, 当题目中给出已知条件, 备选答案列出所需求的结果时, 一般首先考虑直接法.

**验证法:** 把可供选择的各备选项带入题目中已知条件或将题干中的条件带入备选项进行验证, 从而得到正确选项的方法.

**图象法:** 通过画出直观的几何图形, 帮助分析, 便于作出正确选择的方法.

每种方法都不是孤立的, 有时同一试题可用多种方法求解, 有时需借用几种方法综合求解.

【29】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} =$

解 设  $a_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}$ , 则

$$a_{2n} = \frac{2n+1}{2n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1,$$

$$a_{2n+1} = \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right)^{-1} = \frac{2n+1}{2n+2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = 1$ .

### 证明数列没有极限

【30】 设  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{2}$ , 证明数列  $\{a_n\}$  没有极限.

**分析** 若数列  $\{a_n\}$  有极限, 则由极限性质知道极限应是唯一的, 要证明  $\{a_n\}$  没有极限, 只要找到两个子列分别收敛到不同的值即可.

**证** 设  $k$  为正整数, 若  $n=4k$ , 则

$$a_{4k} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right) \sin \frac{4k\pi}{2} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right) \sin 2k\pi = 0;$$

若  $n=4k+1$ , 则

$$a_{4k+1} = \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) \sin \left(\frac{4k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right) \sin \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{4k+1} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow +\infty).$$

因此  $\{a_n\}$  没有极限.





点评 在证明数列发散时,可采用下列两种方法:

- ①找两个极限不同的子数列. ②找一个发散的子数列.

### § 3. 函数的极限

**1. 函数极限的定义** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内(点  $x_0$  可除外)有定义,  $A$  为一个常数. 若对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 都存在一个正数  $\delta$ , 使得满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  的一切  $x$  所对应的  $f(x)$  都满足不等式  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

**2. 左极限和右极限的定义** 若对于满足  $0 < x_0 - x < \delta$  ( $0 < x - x_0 < \delta$ ) 的一切  $x$  所对应的  $f(x)$  都满足不等式  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x$  自  $x_0$  左(右)侧趋于  $x_0$  时的极限, 即左(右)极限, 分别记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A)$$

类似地, 可以给出当  $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x)$  的极限为  $A$  的定义.

#### 3. 极限的性质

(1) 唯一性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A$  必唯一.

(2) 有界性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  的某一邻域( $x_0$  除外)内是有界的.

(3) 保号性 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域( $x_0$  除外)内均有  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ), 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

**4. 充要条件**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ .

### 基本题型

#### 讨论函数极限的存在性

【31】设对任意的  $x$ , 总有  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零 (C) 一定不存在 (D) 不一定存在

解 若取  $\varphi(x) = x, f(x) = x + e^{-|x|}, g(x) = x + 2e^{-|x|}$ . 此时  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不存在;

若取  $\varphi(x) = 0, f(x) = e^{-|x|}, g(x) = 2e^{-|x|}$ , 此时  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  存在. 故应选(D).

【32】设  $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ x-2, & |x| > 1 \end{cases}$ . 试讨论  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

分析 本题中函数是分段表达的, 因此要讨论  $x \rightarrow 1$  时  $f(x)$  的极限值必须从左、右极限入手.