

张景中 / 主编

走进教育数学

Go to Educational Mathematics

情真意切话数学

数学是人做出来的，
在冰冷的数学公式后面是火热的人文情感，
数学意境一旦和人文意境沟通，
就使人觉得数学不再是“天上掉下来的林妹妹”，
而是平易近人的智慧，
让我们一起情真意切地来欣赏数学。

张奠宙 丁传松 柴俊等 / 著



科学出版社

www.sciencep.com

“十一五”国家重点图书出版规划项目

01-42
Z099

走进教育数学
Go to Educational Mathematics

情真意切话数学

张奠宙 丁传松 柴俊等/著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以全新的人文角度,诠释一些重要的数学概念和数学定理.作者将古诗词的人文意境和数学的思想意境对接沟通,情真意切地欣赏数学,平添数学的文化氛围.书中对微积分思想体系做了详尽的人文分析,以局部与整体的对立统一为线索,解读了微积分这一人类文明的科学精髓.

本书可供中学和大学的数学专业师生、数学爱好者,以及数学教育研究者参考.对文科读者来说,这是学习数学常识、提升数学素质的一个基础读本.

图书在版编目(CIP)数据

情真意切话数学 / 张奠宙, 丁传松, 柴俊著. —北京: 科学出版社, 2011

(走进教育数学 / 张景中主编)

ISBN 978-7-03-029678-8

I. 情… II. ①张…②丁…③柴… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 237725 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 1 月第一次印刷 印张: 13 1/4 插页: 2

印数: 1—6 000 字数: 200 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

总序

看到本丛书，多数人会问这样的问题：

“什么是教育数学？”

“教育数学和数学教育有何不同？”

简单说，改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学为自己提出的任务。

把学数学比作吃核桃。核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。有些核桃，外壳与核仁紧密相依，成都人形象地叫它们“夹米子核桃”，如若砸不得法，砸开了还很难吃到。数学教育要研究的，就是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味，更营养，更容易砸开吃净。

“教育数学”的提法，最早出现在笔者1989年所写的《从数学教育到教育数学》中。其实，教育数学的活动早已有之，如欧几里得著《几何原本》、柯西写《分析教程》，

都是教育数学的经典之作。

数学教育有很多世界公认的难点，如初等数学里的几何和三角，高等数学里面的微积分，都比较难学。为了对付这些难点，很多数学老师、数学教育专家前赴后继，做了大量的研究，写了很多的著作，进行了广泛的教学实践。多年实践，几番改革，还是觉得太难，不得不“忍痛割爱”，少学或者不学。教育数学则从另一个角度看问题：这些难点的产生，是不是因为前人留下来的知识组织得不够好，不适于数学的教与学？能不能优化数学，改良数学，让数学知识变得更容易学习呢？

ii

知识的组织方式和学习的难易有密切的联系。英语中12个月的名字：January, February, ……。背单词要花点工夫吧！如果改良一下：一月就叫 Monthone，二月就叫 Monthtwo，等等，马上就能理解，就能记住，学起来就容易多了。生活的语言如此，科学的语言——数学——何尝不是这样呢？

很多人认为，现在小学、中学到大学里所学的数学，从算术、几何、代数、三角到微积分，都是几百年前甚至几千年前创造出来的。这些数学的最基本的部分，普遍认为是经过千锤百炼，相当成熟了。对于这样的数学内容，除了选择取舍，除了教学法的加工之外，还有优化改革的余地吗？

但事情还可以换个角度看。这些进入了课堂的数学，是在不同的年代，不同的地方，由不同的人，为不同的目的而创造出来的，而且其中很多不是为了教学的目的而创造出来的。难道它们会自然而然地配合默契，适宜于教学和学

习吗?

看来,这主要不是一个理论问题,而是一个实践问题.

走进教育数学,看看教育数学在做什么,有助于回答这类问题.

随便翻翻这几本书,就能了解教育数学领域里近20年来做了哪些工作.从已有的结果看到,教育数学有事可做,而且能做更多的事情.

比如微积分教学的改革,这是在世界范围内被广为关注的事.丛书中有两本专讲微积分,主要还不是讲教学方法,而是讲改革微积分本身.

由牛顿和莱布尼茨创建的微积分,是第一代的微积分.这是说不清楚的微积分.创建者说不清楚,使用微积分解决问题的数学家也说不清楚.原理虽然说不清楚,应用仍然在蓬勃发展.微积分在说不清楚的情形下发展了130多年.

柯西和魏尔斯特拉斯等,建立了严谨的极限理论,巩固了微积分的基础,形成了第二代的微积分.数学家把微积分说清楚了.但是由于概念和推理烦琐迂回,对于绝大多数学习高等数学的人来说,是听不明白的微积分.微积分在多数学习者听不明白的情形下,又发展了170多年,直到今天.

第三代的微积分,是正在创建发展的新一代的微积分.人们希望微积分不但严谨,而且直观易懂,简易明快.让学习者用较少的时间和精力就能够明白其原理,不但知其然而且知其所以然.不但数学家说得清楚,而且非数学专业的多数学子也能听得明白.

第一代微积分和第二代微积分,在具体计算方法上基

本相同；不同的是对原理的说明，前者说不清楚，后者说清楚了。

第三代微积分和前两代微积分，在具体计算方法上也没有不同；不同的仍是对原理的说明。

几十年来，国内外都有人从事第三代微积分的研究以至教学实践。这方面的努力，已经有了显著的成效。在我国，林群院士近10年来在此方向做了大量的工作。本丛书中的《微积分快餐》，就是他在此领域的代表作。

古今中外，通俗地介绍微积分的读物极多，但能够兼顾严谨与浅显直观的几乎没有。《微积分快餐》做到了。一张图，一个不等式，几行文字，浓缩了微积分的精华。作者将微积分讲得轻松活泼、简单明了，而且严谨自封，让读者在品尝快餐的过程中进入了高等数学的殿堂。

丛书中还有一本《直来直去的微积分》，是笔者学习微积分的心得。书中从“瞬时速度有时比平均速度大，有时比平均速度小”这个平凡的陈述出发，不用极限概念和实数理论，“微分不微，积分不积”，直截了当地建立了微积分基础理论。书中概念与《微积分快餐》中的逻辑等价而呈现形式不尽相同，殊途同归，显示出第三代微积分的丰富多彩。

回顾历史，牛顿和拉格朗日都曾撰写著作，致力于建立不用极限也不用无穷小的微积分，或证明微积分的方法，但没有成功。我国数学大师华罗庚所撰写的《高等数学引论》中，也曾刻意求新，不用中值定理或实数理论而寻求直接证明“导数正则函数增”这个具有广泛应用的微积分基本命题，可惜也没有达到目的。

前辈泰斗是我们的先驱. 教育数学的进展实现了先驱们简化微积分理论的愿望.

丛书中两本关于微积分的书, 都专注于基本思想和基本概念变革. 基本思想、基本概念, 以及在此基础上建立的基本定理和公式, 是这门数学的筋骨. 数学不能只有筋骨, 还要有血有肉. 中国高等教育学会教育数学专业委员会理事长、全国名师李尚志教授的最新力作《数学的神韵》, 是有血有肉、丰满生动的教育数学. 书中的大量精彩实例可能是你我熟悉的老故事, 而作者却能推陈出新, 用新的视角和方法处理老问题, 找出事物之间的联系, 发现不同中的相同, 揭示隐藏的规律. 幽默的场景, 诙谐的语言, 使人在轻松阅读中领略神韵, 识破玄机. 看看这些标题, “简单见神韵”、“无招胜有招”、“茅台换矿泉”、“凌波微步微积分”, 可见作者的功力非同一般! 特别值得一提的是, 书中对微积分的精辟见解, 如用代数观点演绎无穷小等, 适用于第一代、第二代和第三代微积分的教学与学习, 望读者留意体味.

v

练武功的上乘境界是“无招胜有招”, 但武功仍要从一招一式入门. 解数学题也是如此. 著名数学家和数学教育家项武义先生说, 教数学要教给学生“大巧”, 要教学生“运用之妙, 存乎一心”, 以不变应万变, 不讲或少讲只能对付一个或几个题目的“小巧”. 我想所谓“无招胜有招”的境界, 就是“大巧”吧! 但是, 小巧固不足取, 大巧也确实太难. 对于大多数学子, 还要重视有章可循的招式, 由小到大, 以小御大, 小题做大, 小中见大. 朱华伟教授和钱展望教授的《数学解题策略》, 踏踏实实地从一招、一式、一题、一

法着手，探秘发微，系统地阐述数学解题法门，是引领读者登堂入室之作。作者是数学奥林匹克领域的专家。数学奥林匹克讲究题目出新，不落老套。我看了这本书里的不少例题，看不出有哪些似曾相识，真不知道他是从哪里搜罗来的！

朱华伟教授还为本丛书写了一本《从数学竞赛到竞赛数学》。竞赛数学当然就是奥林匹克数学。华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，

大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

回到前面的话题。上面说到“大巧”和“小巧”，自然想到还有“中巧”。大巧法无定法，小巧一题一法。中巧呢，则希望用一个方法解出一类题目。也就是说，把数学问题分门别类，一类一类地寻求可以机械执行的方法，即算法。中国古代的《九章算术》，就贯穿了分类解题寻求算法的思想。中小学里学习四则算术、代数方程，大学里学习求导数，学的多是机械的算法。但是，自古以来几何命题的证明却千变万化，法无定法。为了找寻几何证题的一般规律，从欧几里得、笛卡儿到希尔伯特，前赴后继，孜孜以求。我国最高科技奖获得者、著名数学家吴文俊院士指出，希尔伯特是第一个发现了几何证明机械化算法的人。在《几何基础》这部名著中，希尔伯特对于只涉及关联性质的这类几何命题，给出了机械化的判定算法。由于受时代的局限性，希尔伯特这一学术成果并不为太多人所知。直到1977年，吴文俊先生提出了一个新的方法，可以机械地判定初等几何中等式型命题的真假。这一成果在国际上被称为“吴方法”，它在几何定理机器证明领域中掀起了一个高潮，使这个自动推理中最不成功的部分变成了最成功的部分。

吴方法和后来提出的多种几何定理机器证明的算法，都不能给出人们易于检验和理解的证明，即所谓可读证明。国

内外的专家一度认为，机器证明的本质在于“用量的复杂克服质的困难”，所以不可能机械地产生可读证明。

笔者基于1974年在新疆教初中时指导学生解决几何问题的心得，总结出用面积关系解题的规律。在这些规律的基础上，1992年提出消点算法，和周咸青、高小山两位教授合作，创建了可构造等式型几何定理可读证明自动生成的理论和方法，并在计算机上实现。最近在网上看到，面积消点法也多次在国外的不同的系统中实现了。本丛书中的《几何新方法和新体系》，包括了面积消点法的通俗阐述，以及笔者提出的一个有关面积方法的公理系统，由冷拓同志协助笔者整理而成。教育数学研究的副产品解决了机器证明领域中的难题，对笔者而言实属侥幸。

基于对数学教育的兴趣，笔者从1974年以来，在30多年间持续地探讨面积解题的规律，想把几何变容易一些。后来发现，国内外的中学数学教材里，已经把几何证明删得差不多了。于是“迷途知返”，把三角作为研究的重点。数学教材无论如何改革，三角总是删不掉的吧。本丛书中的《一线串通的初等数学》，讲的是如何在小学数学知识的基础上建立三角，从三角的发展引出代数工具并探索几何，把三者串在一起的思路。

在《一线串通的初等数学》中没有提到向量。其实，向量早已下放到中学，与传统的初等数学为伍了。在上海的数学教材里甚至在初中就开始讲向量。讲了向量，自然想试试用向量解决几何问题，看看向量解题有没有优越性。可惜在教材里和刊物上出现的许多向量例题中，方法略嫌烦琐，反而不如传统的几何方法简捷优美。如何用向量法解几何

题?能不能在大量的几何问题的解决过程中体现向量解题的优越性?这自然是教育数学应当关心的一个问题。为此,本丛书推出一本《绕来绕去的向量法》。书中用大量实例说明,如果掌握了向量解题的要领,在许多情形下,向量法比纯几何方法或者坐标法干得更漂亮。这要领,除了向量的基本性质,关键就是“回路法”。绕来绕去,就是回路之意。回路法是笔者的经验谈,没有考证前人是否已有过,更没有上升为算法。书稿主要由彭翥成同志执笔,绝大多数例子,也是他采集加工的。

谈起中国的数学科普,谈祥柏的名字几乎无人不知。老先生年近八旬,从事数学科普创作超过半个世纪,出书 50 多种,文章逾千篇。对于数学的执著和一生的爱,洋溢于他为本丛书所写的《数学不了情》的字里行间。哪怕仅仅信手翻上几页,哪怕是对数学知之不多的中小學生,也会被一个个精彩算例所显示的数学之美和数学之奇深深吸引。书中涉及的数学知识似乎不多不深,所蕴含的哲理却足以使读者掩卷遐想。例如,书中揭示出高等代数的对称、均衡与和谐,展现了古老学科的青春;书中提到海峡两岸的数学爱好者发现了千百年来从无数学者、名人的眼皮底下滑过去的“自然数高次方的不变特性”,这些生动活泼的素材,兼有冰冷的思考与火热的激情,无论读者偏文偏理,均会有所收益。

沈文选教授长期从事中学数学研究、初等数学研究、奥林匹克数学研究和教育数学的研究。他的《走进教育数学》和本丛书同名,是一本从学术理论角度探索教育数学的著作。在书中他试图诠释“教育数学”的概念,探究

“教育数学”的思想源头与内涵；提出“整合创新优化”、“返璞归真优化”等优化数学的方法和手段；并提供了丰富的案例。笔者原来杜撰出“教育数学”的概念，虽然有些实例，但却凌乱无序，不成系统。经过文选教授的旁征博引，诠释论证，居然有了粗具规模的体系框架，有点学科模样了。这确是意外的收获。

本丛书中的《情真意切话数学》，是张奠宙教授和丁传松、柴俊两位先生合作完成的一本别有风味的谈数学与数学教育的力作。作者跳出数学看数学，以全新的视角，阐述中学数学和微积分学中蕴涵的人文意境；将中国古诗词等文学艺术和数学思想加以连接，既有数学的科学内涵，又有丰富的人文素养，把数学与文艺沟通，帮助读者更好地理解 and 亲近数学。在这里，老子道德经中“道生一，一生二，二生三，三生万物”被看成自然数公理的本意；“前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独怆然而涕下”，解读为“四维时空”的遐想；“满园春色关不住，一枝红杏出墙来”用来描述无界数列的本性；而“孤帆远影碧空尽，惟见长江天际流”则成为极限过程的传神写照。书中把数学之美分为美观、美好、美妙和完美4个层次，观点新颖精辟，论述丝丝入扣。在课堂上讲数学如能够如此情深意切，何愁学生不爱数学？

浏览着这风格不同并且内容迥异的11本书，教育数学领域的现状历历在目。这是一个开放求新的园地，一个蓬勃发展的领域。在这里耕耘劳作的人们，想的是教育，做的是数学，为教育而研究数学，通过丰富发展数学而推进教育。在这里大家都做自己想做的事，提出新定义新概念，建立

新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味，凡此种种，无不是为教育而做数学。

为教育而做数学，做出了些结果，出了这套书，这仅仅是开始。真正重要的是进入教材，进入课堂，产生实效，让千千万万学子受益，进而推动社会发展，造福人类。这才是作者们和出版者的大期望。切望海内外同道者和不同道者指正批评，相与切磋，共求真知，为数学教育的进步贡献力量。



2009年7月

前言

xii

世上万物，以真、善、美为最高境界。数学自然也有自己的真、善、美。“教育形态的数学”与“学术形态的数学”之间的一个重大区别，就在于是否具有“数学欣赏”的内涵。但是，数学的真、善、美往往被淹没在形式演绎的海洋里，需要大力挖掘、用心体察才能发现、感受、体验和欣赏。

数学和语文，都是一种语言。汉语是将方块字按一定的字、词、句、篇构造出来的，借以表示思维活动和情意过程的语言系统。数学，则是将符号和图形，按照一定的逻辑程序、运算规则建构起来的，是用以表示客观世界的数量规律的一门科学的语言体系。因此，语文和数学之间没有不可逾越的鸿沟。

但是，语文教育和数学教育有一个明显的差别。语文教育重在欣赏，比如语文课教学生欣赏古文，欣赏唐诗，

却基本上不会作古诗、写古文，但是，从小学到大学，数学教育的重点是“做题目”，却几乎不谈“欣赏”二字。数学教育缺少了“欣赏”环节，使得许多人无法喜欢数学，以至厌恶数学，远离数学。

过去也有一些文献涉及数学和诗词的关系，有许多可供谈助的材料。例如：

一去二三里，烟村四五家；

楼台七八座，八九十支花。

把十个数字嵌进诗里，读来朗朗上口。郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，五片六片七八片；

千片万片无数片，飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系。

那么，怎样欣赏数学的真善美呢？大致有以下的途径：

- 对比分析，体察古今中外的数学理性精神；
- 提出问题，揭示冰冷形式后面的数学本质；
- 梳理思想，领略抽象数学模型的智慧结晶；
- 构作意境，沟通数学思考背后的人文情景。

数学是人做出来的，数学的思考过程必然打上人文的烙印。数学意境和人文意境之间，是彼此相通互相借鉴的。本书的目的，就是想另辟蹊径，情真意切地谈论数学的真、善、美。

关注数学欣赏，可溯源于徐利治先生对极限的描述。约在1995年间，我参加在无锡举行的“数学哲学和数学方法论”的学术会议，曾和徐先生有近距离的接触。那天徐先生演讲中说：“我每次讲极限，总要引用李白的诗：孤帆远影碧空尽，惟见长江天际流”。这是我第一次听到把数学

和文学意境联系起来，触动了我内心一直寻求着的“数学人文”的心弦。

十余年来，我一直在努力探究两者的关系。西北师范大学的丁传松教授和我都是1954~1956年间华东师范大学数学分析研究班的学生，师从程其襄教授。我们和微积分教学打了一辈子的交道，深感微积分不仅是打开自然奥秘的一把金钥匙，而且还是一副理性伴随着睿智的美丽图景。特别是，微积分的许多思想，和中国诗词的文学意境居然能够贯通，使我们觉得很兴奋。

此后的一年多时间，我全力投入。老友丁传松教授也对此感兴趣，而且彼此所见略同。于是电子邮件飞传，来回不下一百封。酝酿多年，最后由我执笔写成了初稿，这就是本书的微积分部分。我们设想，对于一些只要了解微积分大意，想领略微积分精神的文科学生来说（比如外语系、新闻系、历史系、社会学系等），读过本书大概也能够对微积分的大意有所了解，较之糊里糊涂地做几道练习题收获也许会多些。

时序进入2009年。我觉得数学欣赏不能仅仅停留在微积分上。中学数学的内容很多，我们也都可以欣赏一番。恰巧，华东师范大学教育系的江铭教授和霍益萍教授，受鄞州市和太仓市教育局的委托，举办两年制的一个高级研修班。其中数学老师有6位，偶伟国、张敏、龚辉、朱赛飞、王继光、任伟芳，指导教师张奠宙、汪祖亨，后来还有上海的张闽和章敏两位老师参加进来。这样正好把我的想法付诸实施。我先出了一批题目，铺设纲要，请大家写初稿，经过研究讨论，我帮助修改乃至定稿，最后完成了十来篇