理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数学习指导与典型题详解

余长安 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

LGB 理工类本科生

Mathematics

21世纪高等学校数学系列教材

线性代数学习指导与典型题详解

■ 余长安 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与典型题详解/余长安编著.—武汉:武汉大学出版社,2010.11

21世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-07988-5

Ⅰ.线…　Ⅱ.余…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第135380号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:26.25　字数:524千字　插页:1

版次:2010年11月第1版　　2010年11月第1次印刷

ISBN 978-7-307-07988-5/O·428　　定价:35.00元

21世纪高等学校数学系列教材

编 委 会

内容简介

本书系作者为理工类(非数学专业)本科生撰写的一部关于线性代数课程的辅助教材。内容涉及行列式,矩阵,线性方程组,向量空间,矩阵的特征值与特征向量以及二次型等。本书高度浓缩,精练了线性代数的基本知识点,系统地介绍了各种解题技巧,为理工类本科生备考硕士研究生提供了有益的指导。

本书可以作为理工类(非数学专业)各专业本科生的辅助教材,也可以供数学教师,各类工程技术人员,有志备考硕士研究生的年轻学者以及数学爱好者参考。

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。长期以来，人们在认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具，在人类文明的进步和发展中，甚至在文化的层面上，一直发挥着重要的作用。作为各门科学的重要基础，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起到关键性、甚至决定性的作用。数学在当代科技、文化、社会、经济和国防等诸多领域中的特殊地位是不可忽视的。发展数学科学，是推进我国科学研究和技术发展，保障我国在各个重要领域中可持续发展的战略需要。高等学校作为人才培养的摇篮和基地，对大学生的数学教育，是所有的专业教育和文化教育中非常基础、非常重要的一个方面，而教材建设是课程建设的重要内容，是教学思想与教学内容的重要载体，因此显得尤为重要。

为了提高高等学校数学课程教材建设水平，由武汉大学数学与统计学院与武汉大学出版社联合倡议，策划，组建21世纪高等学校数学课程系列教材编委会，在一定范围内，联合多所高校合作编写数学课程系列教材，为高等学校从事数学教学和科研的教师，特别是长期从事教学且具有丰富教学经验的广大教师搭建一个交流和编写数学教材的平台。通过该平台，联合编写教材，交流教学经验，确保教材的编写质量，同时提高教材的编写与出版速度，有利于教材的不断更新，极力打造精品教材。

本着上述指导思想，我们组织编撰出版了这套21世纪高等学校数学课程系列教材，旨在提高高等学校数学课程的教育质量和教材建设水平。

参加21世纪高等学校数学课程系列教材编委会的高校有：武汉大学、华中科技大学、云南大学、云南民族大学、云南师范大学、昆明理工大学、武汉理工大学、湖南师范大学、重庆三峡学院、襄樊学院、华中农业大学、福州大学、长江大学、咸宁学院、中国地质大学、孝感学院、湖北第二师范学院、武汉工业学院、武汉科技学院、武汉科技大学、仰恩大学(福建泉州)、华中师范大学、湖北工业大学等20余所院校。

高等学校数学课程系列教材涵盖面很广，为了便于区分，我们约定在封首上以汉语拼音首写字母缩写注明教材类别，如：数学类本科生教材，注明：SB；理工类本科生教材，注明：LGB；文科与经济类教材，注明：WJ；理工类硕士生教材，注明：LGS，如此等等，以便于读者区分。

武汉大学出版社是中共中央宣传部与国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。在国内有较高的知名度和社会影响力、武汉大学出版社愿尽其所能为国内高校的教学与科研服务。我们愿与各位朋友真诚合作，力争使该系列教材打造成为国内同类教材中的精品教材，为高等教育的发展贡献力量！

21 世纪高等学校数学系列教材编委会

2007 年 7 月

前　言

为了适应21世纪科学技术的快速发展，我国各类高等学校普遍开设了线性代数课程。该科目不仅是一门重要的数学基础课，亦为相关专业大学生报考研究生的必考课程。由于非数学专业开设线性代数课程的学时一般不多(36～54学时)，加之线性代数内容比较抽象，推演又易出错，因而学生学习时普遍感到困惑难懂，一知半解，特别是做练习题有时感到无从下手。为了帮助大学生及时释惑解疑，较易学好线性代数，尤其是让备考研究生的本科生系统复习线性代数内容，悉心组编了这本线性代数辅助教材。

本书是根据国家教育部关于高等学校“线性代数”课程的基本要求和“全国硕士研究生入学统一考试大纲”的要点，并结合作者本人的多年教学实践经验编写而成的。

该书在编撰过程中，始终注重保持数学学科自身的科学性与系统性，紧密结合有关线性代数教材的内容实际，着力突出该科目内在的结构性与逻辑性。特别注意遵循由例证到理据，由具体到抽象，由特殊到一般的写作原则，力求做到：内容概要，方法集粹；解惑精辟，释疑独到；选题考究，运自便捷；例证适度，推演严谨；立足基础，循序渐进；深入浅出，层次分明；利于思辨，便于理解。

全书共分6章：行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型。内容涵盖线性代数科目的基本部分。为了系统起见，依相关教材(余长安编著的《线性代数》，武汉大学出版社，2010年第一版第一次印刷)的相应顺序，按章编写，每章由四部分组成：一、内容提要；二、方法归类；三、疑难解答；四、习题详解。书中还有百余道客观题(包括填空题与选择题)的具体解析。

纵观全书具有以下明显特点：所述线性代数有关概念、理论与方法具有系统性与必要性；所论例题(疑难问题)具有典型性与代表性；所选习题具有广泛性与适中性(其中许多题目选自历年考研数学试题)，梳理致密，恰如其分。

本书作为武汉大学出版社审批入选的高等学校数学系列教材之一，受到了相关部门和领导的热情鼓励与关照，同时得到了相关专家和同事的宝贵指导与帮助。尤其是在该书编审过程中，得到了武汉大学出版社李汉保编辑的大力支持。

在此，作者一并表示衷心的感谢！

该书作为与武汉大学“十一五”规划教材配套的学习指导书，适合于理（非数学专业）、工、农、医，尤其是经、管、法、文等各专业在读本科生和有志备考硕士研究生的年轻学者的需要。

限于作者对该科目的认识水平，加之时间仓促，书中欠妥与漏误在所难免，恳请广大读者批评指正。

作　者

2010 年 6 月 8 日

目　　录

第 1 章　行列式 …… 1
一、内容提要 …… 1
二、方法归类 …… 3
三、疑难解答 …… 4
四、习题详解 …… 5
习题 1.1 …… 5
习题 1.2 …… 7
习题 1.3 …… 8
习题 1.4 …… 11
习题 1.5 …… 18
习题 1.6 …… 27
习题 1.7 …… 39
习题 1.8 …… 41
第 1 章复习题 …… 44

第 2 章　矩阵 …… 58
一、内容提要 …… 58
二、方法归类 …… 64
三、疑难解答 …… 66
四、习题详解 …… 69
习题 2.1 …… 69
习题 2.2 …… 71
习题 2.3 …… 77
习题 2.4 …… 82
习题 2.5 …… 90
习题 2.6 …… 97
习题 2.7 …… 114
习题 2.8 …… 121

第 2 章复习题…… 124

第 3 章 线性方程组…… 135
一、内容提要…… 135
二、方法归类…… 138
三、疑难解答…… 142
四、习题详解…… 148
习题 3.1 …… 148
习题 3.2 …… 152
习题 3.3 …… 154
习题 3.4 …… 163
习题 3.5 …… 169
习题 3.6 …… 179
习题 3.7 …… 188
第 3 章复习题…… 189

第 4 章 线性空间…… 202
一、内容提要…… 202
二、方法归类…… 204
三、疑难解答…… 205
四、习题详解…… 209
习题 4.1 …… 209
习题 4.2 …… 210
习题 4.3 …… 215
习题 4.4 …… 220
习题 4.5 …… 224
习题 4.6 …… 226
习题 4.7 …… 231
习题 4.8 …… 235
第 4 章复习题…… 236

第 5 章 矩阵的特征值与特征向量…… 251
一、内容提要…… 251
二、方法归类…… 252
三、疑难解答…… 255
四、习题详解…… 258

习题 5.1 …… 258
习题 5.2 …… 267
习题 5.3 …… 275
习题 5.4 …… 286
习题 5.5 …… 289
习题 5.6 …… 292
第 5 章复习题 …… 298

第 6 章　二次型 …… 310
一、内容提要 …… 310
二、方法归类 …… 313
三、疑难解答 …… 316
四、习题详解 …… 319
习题 6.1 …… 319
习题 6.2 …… 322
习题 6.3 …… 326
习题 6.4 …… 336
习题 6.5 …… 337
习题 6.6 …… 344
第 6 章复习题 …… 347

客观题解析 …… 360

第 1 章 行 列 式

一、内容提要

行列式是一个重要的数学工具，在线性代数中有较多的应用，也是常规考试的考点. 要求学生能正确理解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质，准确、熟练地运用行列式的性质及展开，计算 3 阶、4 阶行列式，能计算简单的 n 阶行列式.

1. 行列式的定义

行列式的定义有许多，其中较为直接的（构造性的）定义是

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni}$$

这里 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是数字 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为排列 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 的逆序数.

矩阵（方阵）$\boldsymbol{A}$ 的行列式常记为 $\det\boldsymbol{A}$ 或简记成 $|\boldsymbol{A}|$（或 $|a_{ij}|$）.

2. 行列式的性质

(1) 行列式中行、列互换（行变列、列变行），其值不变，即 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，这里 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置；

(2) 交换行列式中两行（或两列）的位置，行列式的值变号；

(3) 某数乘以行列式中一行（或列）的诸元素等于该数乘以行列式的值；

(4) 将某行（或列）的倍数加到另外一行（或列），行列式的值不变；

(5) 行列式中若两行（或列）的对应元素成比例，则行列式的值为零.

3. 拉普拉斯展开

行列式可以按某一行（或列）展开，且

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \boldsymbol{A}_{jk} = \delta_{ij} |\boldsymbol{A}|, \text{其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (1 \leqslant i,j \leqslant n).$$

这里 δ_{ij} 称为 Kronecker 符号. 特别地 $|\boldsymbol{A}|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

4. 几个特殊的行列式

(1)Vandermonde 行列式.

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

(2)Gram 行列式.

设 $\boldsymbol{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\in\mathbf{R}^n$,又 $a_{ij}=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)$ 或 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j$ 是 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j$ 的内积,即

$$\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)&\cdots&(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_n)\\(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)&\cdots&(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_1)&(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_1)&\cdots&(\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

(3) 循环行列式.

$$\begin{vmatrix}x_0&x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}\\x_{n-1}&x_0&x_1&\cdots&x_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_0\end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1}(x_0+x_1\zeta^i+x_2\zeta^{2i}+\cdots+x_{n-1}\zeta^{(n-1)i})$$

这里 ζ 是 1 的次原根 $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}\right.$ 又可以记为 $\left.\exp\left\{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}\right\}\right)$.

(4) 交错行列式

$$\begin{vmatrix}0&x_{12}&x_{13}&\cdots&x_{1n}\\-x_{12}&0&x_{23}&\cdots&x_{2n}\\-x_{13}&-x_{12}&0&\cdots&x_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-x_{1n}&-x_{2n}&-x_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{cases}0, & n\text{ 是奇数}\\P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)^2, & n\text{ 是偶数}\end{cases}$$

这里 $P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ 是变量 x_{ij} 的多项式,称为 Pfaff 多项式.

5. 上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

6. 次三角行列式的值等于次对角线元素的乘积添加符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

二、方法归类

本章的重点是行列式的计算，现将其计算方法归类如下：

1. 用行列式的定义计算行列式

一般适用于零元素较多时的行列式计算.

2. 用行列式的性质计算行列式

一般是将行列式化为三角形行列式的形式.

3. 用行列式的性质及展开定理(降阶法)计算行列式

一般是将行列式的某一行(列)化为零元素较多，再将其展开达到降阶的目的.

4. 用递推法计算行列式

适用于按某一行或某一列展开之后，得到与原行列式模式相同(但阶数低一阶)的行列式.

5. 数学归纳法

适用同递推法，但要合理使用第一归纳法与第二归纳法.

6. 用范德蒙行列式计算

7. 加边法(升阶法)

8. 分析线性因子法

9. 利用奇数阶反对称行列式的性质

一般来说，行列式的计算方法较灵活，解题时，应根据行列式的结构特点和元素的规律性，采取合适的方法. 如图 1-1 所示.

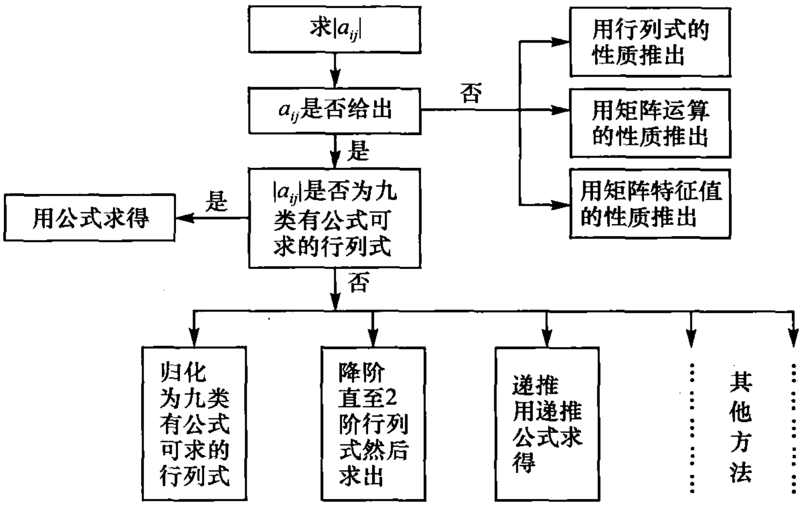

图 1-1　计算行列式参考图

三、疑难解答

例 1　$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项的条件是什么?若 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项，它前面所带的符号如何确定?

解　因为 n 阶行列式展开式中的每一项都是行列式中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积，所以当且仅当 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列时，$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的一项.

确定行列式 $|a_{ij}|_n$ 展开式中的项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面所带符号的方法有三种:

(1) 将给定项中的 n 个元素按行足标的自然顺序排列好后，计算出此时 n 个元素的列足标所组成的排列的逆序数 s，则该项所带符号为 $(-1)^s$.

(2) 将给定项中的 n 个元素按列足标的自然顺序排列好后，计算出此时 n 个元素的行足标所组成的排列的逆序数 t，则该项所带符号为 $(-1)^t$.

(3) 计算 $r=\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，则该项所带符号为 $(-1)^r$.

例 2　为什么当 $n\geqslant 4$ 时，n 阶行列式没有"对角线展开法则"?

解　首先根据行列式的定义，n 阶行列式的展开式是 $n!$ 项的代数和，而按照 2 阶、3 阶行列式展开的对角线法则那样展开 n 阶行列式只得到 $2n$ 项的代数和. 当