



2012 年

考 研 数 学

最新精选600题(经济类)

主编 / 黄先开 曹显兵

✓ 权威名家精选配套习题 ✓ 复习全程使用

全书分三部分，精编精选典型习题，难度适中 数量适当
答案详细精准，循序渐进，



中国人民大学出版社

2012年 考研数学最新精选 600题(经济类)

主 编 黄先开 曹显兵
副主编 李晋明 刘喜波

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2012 年考研数学最新精选 600 题. 经济类/黄先开, 曹显兵主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2011. 4
ISBN 978-7-300-13589-2

I. ①2… II. ①黄… ②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 062081 号

2012 年考研数学最新精选 600 题 (经济类)

主 编 黄先开 曹显兵

2012 Nian Kaoyan Shuxue Zuixin Jingxuan 600 Ti (Jingjilei)

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规 格	210 mm×285 mm 16 开本	版 次	2011 年 4 月第 1 版
印 张	17.25	印 次	2011 年 4 月第 1 次印刷
字 数	507 000	定 价	32.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

要想学好数学，必须做一定数量的习题。做习题可以帮助考生正确地理解和牢固地掌握有关的概念、定理、公式与解题方法。只有通过做习题，才能发现自己的问题所在，才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与解题方法，才能把书本上的东西转化为自己头脑里的东西。因此，很多经过第一轮复习（主要指对教材的复习）和第二轮复习（主要指有针对性地用考研复习参考书的复习，如《考研数学高分复习全书》）的同学，都会问在哪儿可找到好的习题做进一步的练习？根据我们考研辅导的体会，在辅导班上也经常有一些很好的典型例题因时间关系而不能讲授，但这些题在复习中又是绝对应该掌握的。因此根据广大考生的现实需要，也是为了对我们课堂讲授做一个重要补充，作者在查阅大量相关辅导资料的基础上经过反复比较、筛选和重新编制，最后汇编成这本习题精选，相信能较好地满足广大考生第三轮复习的需要。

研究生入学考试是一种选拔性的水平考试，除了考查考生对数学的基本概念、基本理论和基本方法的掌握情况外，更注重考查考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。本书偏重于能力训练，特别适合于有一定基础的考生作为进一步提高之用。需要提醒考生注意的是，在考研数学复习的过程中，个别考生眼高手低，没养成良好的做题习惯，在没有经过深入思考的情况下就匆忙翻看解答，这样是很难取得理想成绩的。特别是本书精选习题涉及知识点多、题型新颖、难度较高、综合性强，往往需要灵活运用所学知识才能作答。因此希望考生在做题时，如果遇到困难，千万不要急于看解答，一定要多思考。要注意，这正是搞清概念、弄清原理、熟悉方法、培养思维能力的重要训练过程。只有这样才能真正全面系统地掌握所学知识，才能真正提高应试水平，才能真正取得好成绩。

值得提出的是，本书作者基础理论扎实，研究水平较高，具有丰富的考研辅导经验，所编选习题代表了考研数学未来命题的趋势，相信本书是一本具有重要参考价值的复习用书。由于成书比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请大家批评指正。

编者

2011年3月于北京

目 录

第一部分 微积分	1	第七章 多元函数积分学(二重积分)	88
第一章 函数、极限与连续	3	精选习题	88
精选习题	3	分析解答	90
分析解答	5	第八章 无穷级数	103
第二章 导数与微分	18	精选习题	103
精选习题	18	分析解答	105
分析解答	20	第九章 常微分方程	116
第三章 中值定理	33	精选习题	116
精选习题	33	分析解答	118
分析解答	35	第二部分 线性代数	131
第四章 一元函数积分学	46	精选习题	133
精选习题	46	分析解答	149
分析解答	48	第三部分 概率论与数理统计	209
第五章 一元函数微积分的应用	63	精选习题	211
精选习题	63	分析解答	223
分析解答	65		
第六章 多元函数微分学	77		
精选习题	77		
分析解答	79		

微

微积分



函数、极限与连续

精选习题

一 填空题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ 1, & 1 < |x| \leq 2, \end{cases}$ 且 $g(x) = f(x^2) + f(x-1)$, 则 $g(x)$ 的定义域为_____.
2. 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1+x^2, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x^3, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] =$ _____.
3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$ 的反函数是 $g(x)$, 则 $g(4) =$ _____.
4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+f(x)}{x^2} =$ _____.
5. 设 $f(x)$ 连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 + 1 - \cos t) f(t) dt$ 是与 x^3 等价的无穷小量, 则 $f(0) =$ _____.

二 选择题

1. 下列函数: ① $\frac{\sin x}{x^2}$; ② $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{1-x}}$; ③ $\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$. 在 $(0, 1)$ 内有界的有()个.
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x} = 6$, 则 $a =$ ().
(A) 1 (B) -2 (C) -1 (D) 2
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中阶数最高的是().
(A) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (B) $3x^3 - 4x^4 + 5x^5$
(C) $e^{x^2} - \cos x$ (D) $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$
4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有().
(A) $f(-x) > g(-x)$ (B) $f'(x) < g'(x)$
(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$
5. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 有().
(A) 两个第一类间断点 (B) 三个第一类间断点
(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点 (D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点

三 解答题

- 讨论函数 $f(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界性.
- 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 以 T 为周期, 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 求证:
 - $F(x) = kx + \varphi(x)$, 其中 k 为某常数, $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$.
- 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且满足 $f(x) = x + \int_0^x tf'(x-t) dt$. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$.
- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \arctan x}$.
- 已知曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \ln \cos x} \int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{x^2} - e^t) dt$.
- 设 $f(x) = nx(1-x)^n (n = 1, 2, \dots)$, M_n 是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.
- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \right]$.
- 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内可导, 且 $f(a) \neq 0, a \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} + \frac{1}{2x-a} \right]$.
- 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.
- 设 $1 \leq x < +\infty$ 时, $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$, 且 $f'(x)$ 连续, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 存在.
- 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0, g(x)$ 非负, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx$.
- 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $x \in (a, b)$, 证明: $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_a^x [f(t+s) - f(t)] dt = f(x) - f(a)$.
- 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2 + 1}$ (用定积分求极限).
- 设 $f(x)$ 是满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ 的连续函数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) dt$ 是与 x^n 同阶的无穷小量, 求正整数 n .

- 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$.
求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

- 如图 1-1-1, 对指数曲线 $y = e^{\frac{1}{2}x}$, 在原点 O 与点 $x (x > 0)$ 之间找一点 $\xi = \theta x (0 < \theta < 1)$, 使在这点左右两边有阴影部分的面积相等, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$.

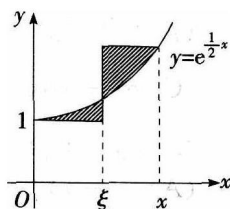


图 1-1-1

- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

- 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta (\beta \neq 0)$,

求 α, β (其中 $\beta \neq 0$).

20. 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(1) 求证: 对任给的 $0 < x < a$, 存在 $0 < \theta < 1$, 使 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$.

21. 设 $f(1) = 0, f'(1) = a$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})} - \sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln \cos x}$.

22. 设 $g(x)$ 是微分方程 $g'(x) + g(x) \sin x = \cos x$ 满足条件 $g(0) = 0$ 的解, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

23. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = a$, 已知

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 g(x^2 t) dt - 1}{x^2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a, b. \\ \frac{a+b \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

24. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+2) \arctan \frac{1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases}$, 讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 若有间断点, 指明其类型.

分析解答

一 填空题

1. 应填 $[-1, \sqrt{2}]$.

解 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1] \cup [-2, -1) \cup (1, 2]$, 即 $[-2, 2]$,

由 $f(x^2)$ 知 $0 \leq x^2 \leq 2$, 即 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$,

由 $f(x-1)$ 知 $-2 \leq x-1 \leq 2$, 即 $-1 \leq x \leq 3$,

求其交集, 得 $g(x)$ 的定义域为 $[-1, \sqrt{2}]$.

评注: 分段函数的定义域为各分段之并.

2. 应填 1.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} 1-g(x), & g(x) \leq 0 \\ 1+g^2(x), & g(x) > 0 \end{cases}$,

而 $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad g(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1+x^4, & x < 0 \\ 1+x^3, & x \geq 0 \end{cases}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x^4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^3) = 1.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = 1.$$

评注: 此题可不必求出 $f[g(x)]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x^4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^3) = 1.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = 1$.

3. 应填 -2.

解 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 故 $f(x) \geq 0$, 得 $x = -\sqrt{y}$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^3$, 故 $f(x) < 0$, 得 $x = -\sqrt[3]{y}$,

综上所述

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{x}, & x < 0, \end{cases}$$

故有

$$g(4) = -\sqrt{4} = -2.$$

评注:分段求出反函数,然后再综合起来.

4. 应填 $\frac{9}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-\sin 3x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

5. 应填 $\frac{6}{7}$.

解 由等价无穷小量的定义及洛必塔法则,可得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[x^2 \int_0^x f(t) dt + \int_0^x (1-\cos t) f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2} \left[2x \int_0^x f(t) dt + (x^2 + 1 - \cos x) f(x) \right] \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x^2} f(x) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot f(0) \\ &= \frac{7}{6} f(0). \end{aligned}$$

所以, $f(0) = \frac{6}{7}$.

评注:含参数的变限积分,不能直接求导,必须经变量替换将参变量提至积分号外再求导.

二 选择题

1. 应选(B).

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{\ln(1-x)} = -\frac{\pi}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{\ln(1-x)} = 0$.

所以,只有函数 $\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$ 在 $(0,1)$ 内有界. 故选(B).

评注:判断函数的有界性除了用定义及已知函数的有界性外,下列结论也是很有用的:设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

2. 应选(C).

解 由题设知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x} - 6 \right] = 0,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+1+11x^2+6x^3}{x} = 0,$$

因此 $a = -1$, 故选(C).

3. 应选(D).

解 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim x^2,$$

$$3x^3 - 4x^4 + 5x^5 = x^3(3 - 4x + 5x^2) \sim 3x^3,$$

$$e^{x^2} - \cos x = e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x \sim \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2,$$

$$\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt \text{ 由 } \int_0^u \frac{\sin t^2}{t} dt \text{ 与 } u = 1 - \cos x \text{ 复合而成, 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{\sin x^2}{x} \sim x, \int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt \text{ 与 } x^2 \text{ 同阶,}$$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$. 所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$ 是 x 的 $2 \times 2 = 4$ 阶无穷小. 故选(D).

4. 应选(C).

解 由 $f(x)$ 、 $g(x)$ 可导知, $f(x)$ 、 $g(x)$ 连续. 于是有: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

又 $f(x_0) < g(x_0)$, 所以有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. 故选(C).

评注: 本题也可用排除法. 取 $f(x) = x$, $g(x) = x+1$, 则 $f(x) < g(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 但(A), (B), (D) 不成立, 故选(C).

5. 应选(C).

解 注意到当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$; 当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, 易求得

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1, \\ \pm \frac{1}{2}\sin 1, & |x| = 1, \\ 2\sin \frac{1}{x}, & |x| > 1. \end{cases}$$

可见, $x = -1$ 和 $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点, 而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 故选(C).

评注: 函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 分为两类: $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点, 其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点. $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

三 解答题

1. 分析 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 要证 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 只要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

解 由 $f(-x) = (-x)e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt$ 及 $\int_0^{-x} e^{t^2} dt \xrightarrow{t=-u} -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt$ 可知: $f(-x) = f(x)$.

所以, $f(x)$ 是偶函数. 只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{1}{x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} - \frac{1}{x^2} e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

于是, 对于 $\epsilon = \frac{1}{2}$, 存在 $A > 0$, 当 $x > A$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

即当 $x > A$ 时, 有 $0 < f(x) < 1$.

因为 $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上连续, 因此, $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上有界, 注意到在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \geq 0$. 故 $\exists M_1 > 0$, 使得 $\forall x \in [0, A]$, 有 $0 \leq f(x) \leq M_1$. 取 $M = \max\{1, M_1\}$, 则对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 从而可知, 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$.

评注: (1) 要判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界性, 需考察 $f(x)$ 在间断点 x_0 及在无穷远点的极限. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有界, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有界. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

在闭区间上连续函数一定有界, 但在开区间上不连续的函数也可能有界. 例如:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 但 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有界.

(2) 在本题的证明中取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (或取其他一个确定的正数) 是非常必要的. 如果用 “ $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $x > A$ 时, 有 $|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ ” 来证明 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有界就是错误的, 因为此时的 “界” 不确定.

(3) 用变量替换可证明 $f(x)$ 与其原函数 $\int_0^x f(t)dt$ 的奇偶性有着密切的联系:

若 $f(x)$ 连续, 则

1) $\int_0^x f(t)dt$ 为奇(偶)函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶(奇)函数.

2) $\forall a \in \mathbf{R}, \int_a^x f(t)dt$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. 分析 只要确定常数 k , 使得 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 以 T 为周期.

解 (1) 由 $\varphi(x+T) = F(x+T) - k(x+T)$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x f(t)dt - kx + \int_x^{x+T} f(t)dt - kT \\ &= \varphi(x) + \int_0^T f(t)dt - kT \quad \left(\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \right) \end{aligned}$$

令 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$, 则 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 是以 T 为周期的周期函数. 从而有 $F(x) = kx + \varphi(x)$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x f(t)dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不一定存在, 所以不能用洛必塔法则求该极限.

但 $\int_0^x f(t)dt$ 可写成:

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{T} \int_0^T f(t)dt + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且以 T 为周期. 于是 $\varphi(x)$ 在 $[0, T]$ 上有界, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 所以,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt. \quad (\text{无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量}) \end{aligned}$$

评注:

(1) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则有如下结论:

1) $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(t)dt = 0$.

2) $\forall a \in \mathbf{R}, \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

3) $\int_0^{nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx$.

(2) 对“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限, 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量时, 可由洛必塔法则得知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大量时, 不能断定 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

3. 分析 $f(x)$ 的表达式中含有参变量的积分, 应经变量替换将参变量移至积分号外或积分限上再求极限.

$$\begin{aligned} \int_0^x t f'(x-t) dt &\stackrel{x-t=u}{=} \int_0^x (x-u) f'(u) du \\ &= x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du. \end{aligned}$$

将参变量 x 提到积分号外后, 已知条件可化为:

$$f(x) = x + x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

解 由已知条件 $f(x) = x + \int_0^x t f'(x-t) dt$ 可化为

$$f(x) = x + x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

两边对 x 求导得:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \int_0^x f'(u) du + x f'(x) - x f'(x) \\ &= 1 + f(x) - f(0) \\ &= 1 + f(x) \quad (f(0) = 0). \end{aligned}$$

得 $f(x) = e^x - 1$. 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$.

评注: (1) 本题的关键是求出 $f(x)$ 的表达式. 当已知条件是由积分方程给出时, 通过求导可得出 $f(x)$ 所满足的微分方程:

$$f'(x) - f(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

由通解公式可得通解为:

$$f(x) = e^{-\int (-1) dx} \left[\int 1 \cdot e^{\int (-1) dx} dx + c \right] = ce^x - 1.$$

由 $f(0) = 0$, 得 $f(x) = e^x - 1$.

一般地, 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c \right].$$

(2) 在计算含参变量的积分时, 应通过变量替换将参变量提至积分号外或积分限上, 再作计算.

4. 分析 是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 用洛必塔法则. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x^4} - 1 \sim \frac{1}{2}x^4$, $\ln(1+x) \sim x$, $\sin^2 x \sim x^2$.

解

$$\text{原式} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{x^4} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5. 分析 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $x^x = e^{x \ln x} \rightarrow 1$, $\arctan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1 \rightarrow 0$.

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \arctan x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^x - 1 \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{x^3} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[\left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) + 1 \right]}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

评注:洛必塔法则是求“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的重要工具,为了避免复杂的计算,减少错误,在使用该工具之前,应尽可能综合运用四则运算、连续性、恒等变形、等价无穷小替换和变量代换等方法进行简化.

在本题中我们分离出极限为 1 的因子 x^x ,使函数中“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式部分 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1}{x^3}$ 更为突出,并利用恒等变形简化了后面的计算. 否则,如果直接用洛必塔法则,就会很麻烦.

6. 分析 由已知, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, 有 $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u-1} = 1$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$.

令 $1 + e^{x^2} - e^t = u$, 则 $\int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{x^2} - e^t) dt = \int_1^{e^{x^2}} f(u) du$.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{x^2}} f(u) du}{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{x^2}} f(u) du}{x^4} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{4x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2})}{x^2} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = -f'(1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

评注:在求极限时要注意重要条件的应用. 例如:

(1) $f(x_0) = 0, f'(x_0) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A$ ($f(x)$ 在 x_0 连续).

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = x_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[g(x)] - f[h(x)]}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - h(x)}{x - x_0}.$$

7. 分析 先求 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值 M_n , 再求极限.

解 $f'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $n^2 x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^n$, 即 $nx = 1-x$. 得 $x = \frac{1}{n+1}$.

又 $f''\left(\frac{1}{n+1}\right) < 0$, 所以 $M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$ 为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的极大值.

比较 $f(0) = 0, f(1) = 0$ 和 M_n 可知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$.

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

评注: 本题的极限是“ 1^∞ ”型未定式, 其一般形式为 $\lim f(x)^{g(x)}$, 其中 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$. 为求极限, 也可先将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $e^{g(x) \ln f(x)}$, 利用等价无穷小量替换定理:

$$\ln f(x) = \ln[1 + (f(x) - 1)] \sim f(x) - 1,$$

可得:

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) [f(x) - 1]}.$$

于是, 将求幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 转化为求积函数的极限 $\lim g(x) [f(x) - 1]$.

8. 分析 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在, 求极限时要考虑单侧极限.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1. \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{e^{\frac{2}{x}}} + \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{\frac{1}{e^{\frac{2}{x}}} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \right] = 1.$$

评注: 若在求极限时, 涉及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 等时, 一定要考虑单侧极限.

9. 分析 “ $\infty - \infty$ ”型是分式, 一般先通分.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \text{原式} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt - (x-a)f(a)}{(x-a) \int_a^x f(t) dt} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x)} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}{\frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a} + f(x)} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \cdot \frac{f'(a)}{f(a) + f(a)} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{f'(a)}{2f^2(a)}. \end{aligned}$$

$$\text{评注: 极限 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x)} \quad (\text{用洛必塔法则}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{f(x) + f(x) + (x-a)f'(x)} = \frac{f'(a)}{2f(a)}.$$

这种解法是错误的. 因为这里利用了 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$. 而已知条件不能保证 $f'(x)$ 在点 a 连续.

关于“ $\infty - \infty$ ”型未定式的极限, 一般的处理方法为: 是分式先通分; 是根式先有理化; 是整式先提出无穷大

因子的最高次幂,分别将其化为“ $\frac{0}{0}$ ”型,或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,或“ $\infty \cdot 0$ ”型再计算.

10. 分析 该极限为“ 1^∞ ”型,转化为函数的极限,再用洛必塔法则等方法.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \tan \frac{1}{x} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln(x \tan \frac{1}{x})} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\tan \frac{1}{x} - 1}{\tan^2 \frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan \frac{1}{x} - 1}{-2 \tan^2 \frac{1}{x}}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{-2t^2}} = e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}.$$

评注:利用函数极限及洛必塔法则求数列极限的理论依据是:

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$.

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

11. 分析 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 存在,只要证 $f(n)$ 单调有界,即证 $f(x)$ 单调有界.由已知条件、定积分的性质和牛顿—莱布尼兹公式便可知 $f(x)$ 单调有界.

证 当 $1 \leq x < +\infty$ 时,由 $f'(x) > 0$ 知, $f(x)$ 单调增加,由题设和定积分的性质,可得:

$$0 < \int_1^x f'(t) dt < \int_1^x \frac{dt}{t^2}$$

由牛顿—莱布尼兹公式得:

$$0 < f(x) - f(1) < -\frac{1}{x} + 1$$

即 $f(1) < f(x) < f(1) + 1$. 所以,数列 $\{f(n)\}$ 单调有界.由单调有界定理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 存在.

评注:关于递推数列的极限,用先验证后求或先求后验证这些传统的方法无疑是正确的,但在单调性和有界性判断方面用传统的方法会遇到困难.此时,应尽可能转化为函数单调性和有界性的判断.这样就可综合运用函数的性质、重要公式和结论来解决极限问题.

12. 分析 应用函数 $f(x)$ 的性质,将 $\int_a^b g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx$ 进行放缩,然后再由夹逼定理可得要求的极限.

解 由 $f(x) > 0$ 在 $[a, b]$ 上连续,可知存在 m, M , 使得 $0 < m \leq f(x) \leq M$. 于是有

$$\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{M}.$$

又 $g(x)$ 非负,所以

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{m} g(x) &\leq g(x) \sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{M} g(x), \\ \sqrt[n]{m} \int_a^b g(x) dx &\leq \int_a^b g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx \leq \sqrt[n]{M} \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sqrt[n]{f(x)} dx = \int_a^b g(x) dx.$$

13. 分析 极限中含有含参变量的积分,应先经变量替换将参数提至积分号外再计算.

证 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,可知 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可导,且 $F'(x) = f(x)$.

$$\int_a^x f(t+s) dt \xrightarrow{t+s=u} \int_{a+s}^{x+s} f(u) du = \int_a^{x+s} f(u) du - \int_a^{a+s} f(u) du = F(x+s) - F(a+s).$$

所以