新世纪高校统计学专业系列教材

概率论与数理统计

（第三版）

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI (DI SAN BAN)

苏均和　主编

上海财经大学出版社

新世纪高校统计学专业系列教材

概率论与数理统计

（第三版）

苏均和　主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/苏均和主编．—3版．—上海：上海财经大学出版社，2009.1
（新世纪高校统计学专业系列教材）
ISBN 978-7-81049-244-7/F·194

Ⅰ.概…　Ⅱ.苏…　Ⅲ.概率论 高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第017000号

□ 责任编辑　徐　超
□ 封面设计　优典工作室

GAILULUN YU SHULI TONGJI
概率论与数理统计
（第三版）

苏均和　主编

上海财经大学出版社出版发行
（上海市武东路321号乙　邮编200434）
网　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
江苏省句容市排印厂印刷装订
2009年1月第3版　2009年1月第1次印刷

890mm×1240mm　1/32　13.375印张　385千字
印数15 001—19 000　定价：26.00元

第三版前言

本教材自1994年以财政部部属院校统编教材出版以来，已经度过了近十五个年头。承蒙读者厚爱，经过六次修改重印，仍供不应求。它至今还受读者欢迎，一方面是由于教材适应了形势发展的需要，另一方面也满足了财经院校发展的要求。

然而教材在各院校使用和读者在学习过程中发现存在一些不足。针对这种情况，我们组织了有关人员（由本科、研究生和相关教师组成）对教材作了较大幅度的修改和调整，主要做了以下几项工作：

一、收集各方读者的来信，由此提出修改大纲和增删计划。

二、组织有关人员逐字逐句通读教材，通过对书中习题逐一练习并对书后习题答案的准确性作出检验，修改和增加有关习题，使教材更趋完善。

三、对书中有关内容和编排作出适当调整，有利于教师在教学和读者在学习中更为顺畅。

“概率论和数理统计”课程是财经院校极为重要的基础课程，因此我们以极其认真的态度出版本教材的第三版，希望进一步得到读者的认可和喜爱。尽管如此，书中还可能有缺点和不足，敬请批评指正。

最后要感谢为此书第三版问世做了许多工作的严志景、罗依丝和范鹏宇同学。

编　者

2008年11月10日

第一版前言

随着我国改革开放形势的不断发展，教育体制以及课程改革也正面临着新的问题。为了使“概率论与数理统计”这门课程适应这种改革形势的需要，我们在1994年12月由中国财政经济出版社出版的《概率论与数理统计》(苏均和主编，财政部统编教材)基础上，从内容体系、案例编排上都做了较大幅度的改变，使这本教材更完善、更成熟。

“概率论与数理统计”是研究随机现象并找出其统计规律的一门学科，是广泛应用于社会、经济、科学等各个领域的定量和定性分析的科学体系。我们要求，通过学习该课程使读者掌握概率、统计的基本概念，熟悉数据处理、数据分析、数据推断的各种基本方法，并能用所掌握的方法具体解决社会经济所遇到的各种问题。

本书共分九章。第一部分(第一至第四章)概率论，主要讲述概率基础，包括：随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理等内容。第二部分(第五至第九章)数理统计，阐述数理统计基础、参数估计、假设检验、非参数方法和回归分析等内容。

这本教材有以下特点：①具有财经特色，所选的案例尽可能与社会经济相结合；②考虑计算机对统计的重要作用，我们在有些统计方法介绍后附有计算机程序；③适用面广，这本教材既可作为统计专业本科的教材，又可作为各类读者的统计入门教材；④理论和方法相结合，这本教材既注重基础理论阐述而且更重视各类方法的具体使用。

本书由苏均和主编，王学民、朱鸣雄、黄国群参加了编写。徐国祥

教授对这本教材的编写、出版，自始至终给予了热情关心和帮助，在此表示感谢。

我们力求使这本教材完善和成熟，但限于编者的水平，难免会有错误，敬请读者斧正。

编 者

1998 年 5 月 12 日

目　录

第一章　随机事件和概率

第一节　随机事件及其运算

一、必然现象和随机现象

在自然界、生产实践、科学试验和日常生活中，人们观察到的现象大体可以归结为两种类型。一类是在一定条件下必然出现（或者不出现）某种结果的现象，这类现象的一个共同特点就是可以事前预言，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是可以肯定的，或是根据它过去的状态，在相同的条件下完全可以预言将来的发展，我们把这类现象称之为确定性现象或者必然现象。例如，向上抛掷的重物必然自由下落；直角三角形的三边必然满足勾股定理；在一批合格的产品中任意取一件，必定不是废品；等等。几何、微积分、线性代数都是研究确定性现象的数学工具。另一类现象是在相同的条件下可能得到多种不同的结果，出现具体哪一种结果是不可预测的，即在相同的条件下，未来的发展事前不能肯定。例如，将一枚硬币抛向空中，无论如何控制硬币的抛掷条件，我们在每次抛掷前总是无法肯定硬币自由下落后，我们可以看见硬币的哪一面；又如某射手向同一目标多次射击，各次弹着点不尽相同，并且无论事前怎样控制射击条件，在一次射击之前无法肯定弹着点的确切位置。这类现象的共同特点就是：可以在相同条件下重复进行试验或者观察，而每次试验或者观察的可能结果不止一个，且事前不能预知确切结果，即试验结果呈现出不确定性。人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象虽然在个别试验或观察中，其结果呈现出不确定性，但是在大量观察或多次重复试验后，其结果往往呈现出某种客

观规律，并且这种客观规律性是可以认识的。例如，多次重复抛掷同一枚均匀硬币，正面朝上的次数大致占抛掷总次数的一半；某射手向同一目标射击的弹着点按照一定的规律分布；等等。这种在大量重复试验或者观察中所呈现出事物的固有规律称为"统计规律性"。我们把在个别试验或者观察中呈现的不确定性，在大量重复试验或者观察中又具有统计规律的现象称为随机现象（或者偶然现象）。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，但是各有侧重。概率论侧重于理论上的研究，介绍随机现象反映的基本概念，建立相应的定理和公式，找出计算统计规律的方法；而数理统计是以概率论为理论依据，研究如何设计试验并对试验结果进行整理和统计分析。

概率论的研究开始于意大利文艺复兴时期，源于赌博。数理统计学是伴随着概率论而发展的，最早见于国家的人口统计中。当今，概率论和数理统计的理论和方法几乎遍及所有的科学技术领域以及工农业生产和国民经济各个部门之中。在经济科学中，它是经济管理、质量控制、保险理论、系统论、经济预测和决策、计量经济学等的理论基础，是各类经济、管理专门人才不可缺少的数学工具。

二、随机试验与随机事件、样本空间

为了叙述方便，我们把对某种自然现象作一次观察或者进行一次科学试验，统称为一个试验。如果这个试验具有下列特性：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行。

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能在试验之前明确知道所有可能的结果。

(3)每次试验之前不能肯定这次试验会出现哪一个结果，但是可以肯定每次试验总会出现并且仅出现这些可能结果中的一个。

那么，我们将具有上述三个特性的这种试验称为随机试验，简称为试验。在随机试验中，我们所关心的是某种结果是否出现，把试验的每一个可能结果称之为随机事件，简称事件。

通过试验观察随机现象时，假定试验 E 中一切可能的结果是已经知道的，并且每次试验都必定是其中一个结果出现，我们把这些结果组成的集合称为样本空间或者基本事件空间，记做 Ω。Ω 的元素(即试验中的一个可能结果)称为样本点或基本事件，记做 ω。

在研究随机现象时，不仅考虑基本事件(即不可能再分的事件)，而且还要考虑一些由基本事件组成的复合事件。一般把事件定义为样本空间 Ω 的子集，用大写字母 A、B 等来表示。在试验中，当且仅当事件 A 中所包含的某一样本点出现时，称事件 A 发生。

下面举一些样本空间和事件的例子。

例 1　做掷一枚均匀硬币的试验 E，用"正"表示"出现正面"，用"反"表示"出现反面"，试验的可能结果只有两个：$w_1=$"正"，$w_2=$"反"，试验 E 的样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2\}$由两个基本事件组成。

例 2　设试验 E 为同时掷两枚可以区别的硬币，试验的可能结果共有四个：$w_1=\{正,正\}$，$w_2=\{正,反\}$，$w_3=\{反,正\}$，$w_4=\{反,反\}$，试验 E 的样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$。

在这个试验中，还可以考虑它的某些复合事件，例如，

A："两个硬币出现同一面"的事件，则事件 A 由 ω_1,ω_4 组成。即 $A=\{\omega_1,\omega_4\}$。这时，当且仅当 ω_1 或者 ω_4 之一出现时，事件 A 就发生了。

B："恰有一个硬币出现正面"的事件，则事件 $B=\{\omega_2,\omega_3\}$。

C："至少有一个硬币出现正面"的事件，则事件 $C=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，这时，当且仅当 ω_1,ω_2 或者 ω_3 之一出现时，事件 C 就发生了。

例 3　某电话交换台，在单位时间内接到呼唤的次数是 0,1,2,…，用 ω_i 表示接到 i 次呼唤的事件，并简记 ω_i 为 i，则样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。

在这一试验中，可以考虑 $A=\{i\mid i>200, i\ 为正整数\}$，$B=\{i\mid i>500, i\ 为正整数\}$等等这样一些复合事件。

例 4　在一批灯泡中，任意取一只测试其寿命 t(h)，则样本空间为 $\Omega=\{t\mid t>0\}$。

在这一试验中，可以考虑 $A=\{t\mid t>500\}$，$B=\{t\mid t<2\ 000\}$等等这样一些复合事件。

由上面例子可知，对于一个具体的试验来说，样本空间是根据试验的具体内容来决定的。样本空间可以相当简单，也可以相当复杂。但是在概率论的研究讨论中，一般认为样本空间是给定的(或者是事前已经明确了试验的所有可能的结果)。这种必要的抽象，其目的是为了更好地把握随机现象的本质，而使所得的理论性的结论得到更加广泛的应用。当然，对一个实际问题来讲，样本空间如何描述，应进行具体的分析和研究。此外，一个抽象的样本空间经常可以被赋予各种不同的解释(即可以概括各种内容不同的问题)。例如，仅仅包含两个样本点的样本空间，它既可以作为掷硬币出现“正面”或者出现“反面”的模型，也能用于检验产品的“合格”或者“不合格”；用于公用事业中排队现象的“有人排队”或“无人排队”；以及出生婴儿性别的“男”或“女”；等等。这说明尽管问题的实际内容不同，但是有时候却能够归结为相同的概率模型。因此，我们常常以抛掷硬币、摸球等这样的一些既典型又形象且易于理解的例子来阐明一些问题，以便使问题阐述得更加明确，使问题的本质更为突出。

为了研究的方便，把样本空间 Ω 也作为一个事件。因为在每次试验时，必然出现 Ω 中的某个样本点，即 Ω 必然发生，所以也称 Ω 为必然事件，类似地空集 Φ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，故称为不可能事件。

三、事件的关系与运算

1. 事件的包含与相等

如果任一属于 A 的样本点一定属于 B，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$，或者 $A\subset B$。显然，$B\supset A$ 的含义是，事件 A 发生，必然导致事件 B 发生。

例如，以 A 表示“灯泡使用寿命大于 500 小时”，以 B 表示“灯泡使用寿命大于 200 小时”，则 $B\supset A$。

如果 $B\supset A$ 与 $A\supset B$ 同时成立，则 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

2. 事件的并

由属于 A 或者属于 B 的所有样本点组成的集合，称为 A 与 B 的

并(或者和),记为$A\cup B$或者$A+B$。显然,事件$A\cup B$表示事件A与事件B至少有一个发生。

3. 事件的交

由属于A同时又属于B的所有样本点组成的集合,称为A与B的交(或者积),记为$A\cap B$或者AB。显然,事件$A\cap B$表示事件A与事件B同时发生。

4. 事件的差

由属于A但是不属于B的所有样本点组成的集合,称为A与B的差,记为$A-B$。事件$A-B$表示事件A发生而事件B不发生。显然,$B-A$表示事件B发生而事件A不发生。

5. 对立事件

样本空间Ω与A的差$\Omega-A$称为事件A的对立事件(或者逆事件),记为$\overline{A}$,事件$\overline{A}$表示事件A不发生。

例如,"灯泡使用寿命大于500小时"的事件是"灯泡使用寿命不大于500小时(小于等于500小时)"事件的对立事件。

显然,A与$\overline{A}$互为对立事件,即有$\overline{\overline{A}}=A$。

对立事件A和$\overline{A}$间的关系可以表示为:$A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\cap\overline{A}=\Phi$。

6. 互不相容事件

如果$A\cap B=\Phi$,则称事件A,B互不相容。

基本事件是互不相容的。

事件的并与事件的交的概念可以推广到有限多个事件或者可列多个事件的场合。

注　$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$表示$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$表示$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,下同。

称$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并,通常表述为"$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少有一个发生"。

称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的并,通常表述为"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$至少有一个发生"。

称$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交，通常表述为“$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生”。

称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$的交，通常表述为“$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$同时发生”。

由上面的定义可以看出事件的关系和运算与集合的相应关系和运算一致，因此也常常用图形来直观地表示，见图1—1。

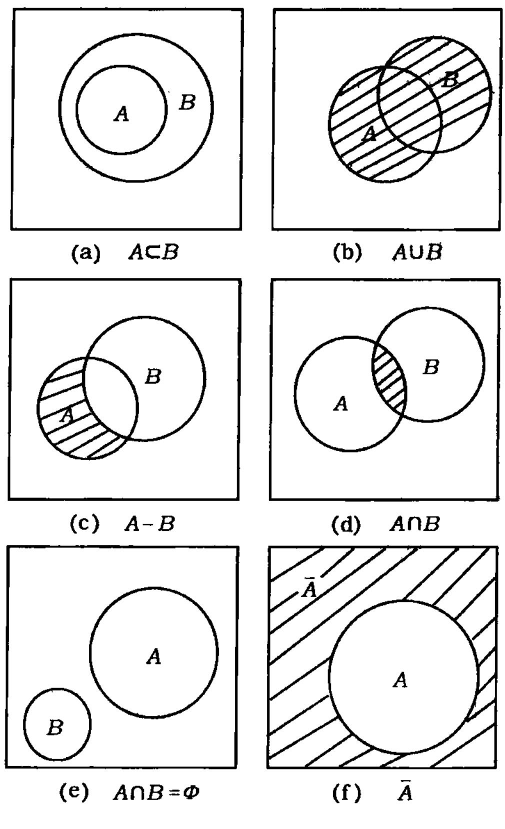

图1—1　事件的关系与运算

可以验证事件的运算满足下列关系式：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3)分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4)德莫根(Demorgan)公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

分配律和德莫根公式可以推广到有限个或者可列多个事件的情形，即有：

$$A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i)$$

$$A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i)$$

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}, \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

例 5 一个货箱中装有 12 只同类型的产品，其中 3 只是一等品，9 只是二等品，从中随机地抽取两次，每次任取 1 只，$A_i(i=1,2)$表示第 i 次抽取的是一等品，试用字母及事件间的关系表示下列事件：

(1)两只都是一等品；

(2)两只都是二等品；

(3)一只是一等品，另一只是二等品；

(4)第二次抽取的是一等品。

解 由题意，用$\overline{A_i}$表示第 i 次抽取的是二等品$(i=1,2)$，则

(1)两只都是一等品：$A_1\cap A_2$；

(2)两只都是二等品：$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$；

(3)一只是一等品，另一只是二等品：$\overline{A_1}A_2+A_1\overline{A_2}$；

(4)第二次抽取的是一等品：$\overline{A_1}A_2+A_1A_2$。

例 6 在一批产品中有若干正品与次品，设事件 A_i 表示第 i 次取到次品$(i=1,2,3)$，试用文字叙述下列事件：

A_1+A_2， $A_1+A_2+A_3$， $A_1A_2A_3$， $\overline{A_2}$， A_3-A_2， $\overline{A_1+A_2}$，