

© 程稼夫 编著



中学奥林匹克

竞赛物理讲座



中国科学技术大学出版社

☆ 奥林匹克竞赛实战丛书

中学奥林匹克竞赛物理讲座

程稼夫 编著



中国科学技术大学出版社

2009·合肥

内 容 简 介

本书是作者在长期进行奥林匹克中学物理竞赛指导和教学实践的基础上编写的,倾注了作者对奥林匹克物理竞赛事业所付出的心血和热情。本书紧紧围绕中学物理的各个方面以及中学物理竞赛内容,主要有:质点运动学、静力学、牛顿运动定律、动量与能量、万有引力、碰撞、振动和波动、理想气体状态方程、热力学第一定律、固体和液体、物态变化、静电场、稳恒电流、静磁场、电磁感应、交流电、电磁振荡和电磁波、原子与原子核共 17 讲,精辟生动地介绍了有关重点概念、定律和公式,同时,给出了丰富的习题,以生动的实例,进行问题的分析和综合,训练积极主动的解题思路,活跃思想,发展智能。在科学训练的基础上,促使中学生整体物理素质的提高。

本书可作为广大中学生物理综合学习和素质提高的有效的辅导书和工具书,是广大中学生参加各类中学物理竞赛、奥林匹克物理竞赛以及高考物理的复习迎考的必备书籍;同时,本书也为中学物理教师提供了一个物理教学探索研究的崭新思路,是广大中学物理教师不可多得的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

中学奥林匹克竞赛物理讲座/程稼夫编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2000. 11(2009. 2 重印)

(奥林匹克竞赛实战丛书)

ISBN 978-7-312-01236-5

I. 中… II. 程… III. 物理课—中学—教学参考资料 IV. G634. 73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 55004 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:787×1092/16 印张:27.875 字数:690 千

2000 年 11 月第 1 版 2009 年 2 月第 6 次印刷

印数:16 001—21 000 册

定价:39.00 元

前 言

由中国物理学会主办的全国中学生奥林匹克物理竞赛(CPhO)自1984年以来,每年举办一次,直至1999年已举办了十六届。国际物理奥林匹克竞赛(IPhO),直至1999年已举办了三十届。实践证明,物理竞赛有助于提高中学生学习物理的兴趣和学习积极性,有助于改进学习方法,增强学习能力,有助于推动校园多样化的物理课外活动,活跃学习气氛,有助于发现和培养具有突出才能的青少年学生。多年来,全国中学生物理竞赛受到广大中学师生的欢迎,并引起社会各界的广泛关注。

为了配合开展物理竞赛活动,在此编写了《中学奥林匹克竞赛物理讲座》一书,为广大物理爱好者提供一本课外读物。本书围绕中学物理,以及中学物理竞赛内容,给予全面展开,深刻剖析。本书着力于使学生奠定扎实的物理基础,抓住物理本质,通过具体内容,提供大量分析问题、处理问题的思路和方法,在得到科学训练的基础上,以期扩大视野,活跃思维,发展智能,推动整体物理素质的提高。无疑,物理素质的提高对科学素质乃至整体综合素质的提升具有无可争辩的重要地位。总之,笔者为激发广大青少年学生学习物理的情趣,全面提高广大青少年的物理素养,培养严谨的科学态度倾注了全部心血。与此同时,本书也为中学物理教师提供了一个探索研究的思路,以便在共同的教育事业中相互切磋,不断完善,不断前进。

本书是在中国科学技术大学原近代物理系主任、安徽省物理学会理事长阮图南教授的指导和鼓励下完成的;同时,笔者还得到了安徽省教育厅教学科学研究所何润伟主任、杨思锋老师、梅小景老师、安徽省物理学会副理事长赵宗彦教授、吴以勤教授、丁莉兰老师、合肥市中学物理教学研究会王继珩老师、王可兵老师的鼓励和支持,在此一并致以诚挚的谢意。

本书从执笔到完稿仅用4个月时间,时间短,任务重,缺点和错误定有发生,殷切希望各位读者不吝赐教。

程稼夫

2000年11月11日

于中国科学技术大学

重印说明

《中学奥林匹克竞赛物理讲座》自 2000 年面市以来,深受广大中学生、中学物理教师以及广大物理爱好者的欢迎,纷纷来信,赞扬此书实属难得的好书。借此修订重印之机,编者对广大读者的支持和厚爱表示衷心的感谢。

为了回报广大读者,为了更大地激发广大物理爱好者对物理知识的渴求,也为了进一步推动中学物理教育事业的发展,编者计划与全国中学生物理奥林匹克竞赛国家集训队总教练轩植华教授联手,编写“中学奥林匹克竞赛物理教程”之《力学篇》,《电磁学篇》,《热学、光学和近代物理篇》,《实验篇》;列入到《奥林匹克竞赛实战丛书》之中。

程稼夫

2002 年 4 月 28 日

于中国科学技术大学

目 次

前 言	(I)
重印说明	(II)
第一讲 质点运动学	(1)
第二讲 静力学	(32)
第三讲 牛顿运动定律	(64)
第四讲 动量与能量	(88)
第五讲 万有引力	(119)
第六讲 碰撞	(142)
第七讲 振动和波动	(161)
第八讲 理想气体状态方程	(191)
第九讲 热力学第一定律	(202)
第十讲 固体和液体	(231)
第十一讲 物态变化	(241)
第十二讲 静电场	(251)
第十三讲 稳恒电流	(293)
第十四讲 静磁场	(333)
第十五讲 电磁感应、交流电、电磁振荡和电磁波	(357)
第十六讲 光学	(385)
第十七讲 原子与原子核	(429)
主要参考文献	(439)

第一讲 质点运动学

一、参照系和坐标系

牛顿力学研究的是物体的机械运动,即物体的位置随时间的变化。机械运动是相对运动,即某物体相对于预先选定的物体的运动。该预先选定的物体及其延拓空间被称为参照系。

质点是没有大小的物体,它是被简化了的模型。只有当物体运动的尺度远大于物体本身的线度时,或者在不考虑物体的转动和内部运动时,才可以把此物体看成是一个只有质量而没有大小的几何点。此外,引入质点模型还为研究质量连续分布的物体的运动提供了一个处理方法。刚体、流体、弹性体等连续体的变化或运动的研究,可以分割成无限多个质点,再利用高等数学就可以进行讨论。

从质点开始研究物体的运动是方便的。在牛顿力学中,质点所在的空间,可以近似于欧几里德几何空间。在解析几何中,点的位置由其坐标值确定。所以在认定我们周围的空间是欧几里德空间的前提下,质点的位置就可以用这种坐标方法给定,为此首先应给出坐标系。应该强调指出,数学上坐标系的选取是完全任意的,而物理上坐标系不能脱离参照物。坐标系是为定量描述物体运动的需要而引入的,有时又称参照坐标系。

二、位矢和位移

质点相对参照系的位置可以在坐标系中定量描述。一个质点在坐标系中的位置可以用一个起于坐标原点 O ,终于质点所在位置 P 的位置矢量,简称位矢 OP 或 r 表示,如图 1.1。质点的运动表达为时间的函数式:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (1.1)$$

称为运动方程或运动解。因为知道了运动方程等于知道了此质点运动的一切情况。

在直角坐标下,可以把运动方程(1.1)写成三个分量方程:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1.2)$$

如果位矢的长度用 r 表示,位矢的方向用方向余弦 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 表示,直角坐标下的三个分量可以写为:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma \quad (1.3)$$

其中角度 α 、 β 、 γ 为位矢 r 与 X 、 Y 、 Z 轴的夹角,且满足:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (1.4)$$

约束方程(1.4)说明表示位矢方位的三个参量 α 、 β 、 γ 中只有两个是独立的。

在直角坐标系中,设 i 、 j 、 k 分别为沿 X 、 Y 、 Z 轴方向的单位矢量,则位矢可表示为:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.5)$$

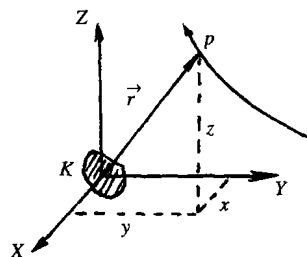


图 1.1

这里应该指出两点：

(1) 一个质点的位矢与坐标原点有关。不同的参照系或同一参照系中不同的坐标系描述同一个质点的位置往往有不同的位置矢量。因此，位矢是一个具有相对性的物理量。

(2) 对于运动方程中所含的时间，也有时间原点的选取问题。不同的时间原点选取，运动方程的形式将有所不同。有鉴于此，参照系的概念应作扩充：除了给定放置在某参照物体上的坐标系作为测量空间的标准之外，还应给定一个钟，作为测量时间的标准。

质点的运动需用质点位置的变化来描述。设质点在 t_1 时刻位置在 r_1 ，经时间 Δt ，即 t_2 时刻运动到 r_2 ，则位矢改变为 Δr

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \quad (1.6)$$

此式称为 t_1 到 t_2 时间内质点的位移，如图 1.2 所示。位移除了是一个矢量之外，还有以下性质：

(1) 位移不同于位矢。位移与坐标原点的选取无关。

(2) 位移不同于路程。 t_1 到 t_2 内质点所经历的路程是由 1 到 2 的曲线的实际长度，是一个标量。而位移是由始点 1 到终点 2 的有向线段，是一个矢量。而且位移的大小通常也不等于路程，当 $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ 时，两者大小相等。

(3) 位移不反映初位置到终位置中间的细节，也不反映初位置或终位置本身，仅反映两者相对位置的改变。

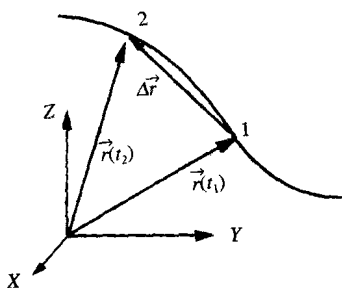


图 1.2

三、直线运动的速度和加速度

如果质点作直线运动，则我们可以取运动直线为坐标轴（有确定的原点和确定的正向，并有刻度），设正向为 x 方向，质点的位置为：

$$x = x(t)$$

质点的位移为：

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

质点的平均速度定义为：

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.7)$$

平均速度是反映质点运动快慢和方向的物理量，而且是较为粗略地反映 Δt 时间段内运动的平均快慢和方向。如果要精确地描述质点在各时刻运动的快慢和方向，需取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.8)$$

v 被称为质点在时刻 t 的瞬时速度，简称速度。

作直线运动的质点的位置随时间变化的关系，可以在 $x-t$ 坐标中用一条曲线（称位置图线）来表示，如图 1.3 所示。平均速度

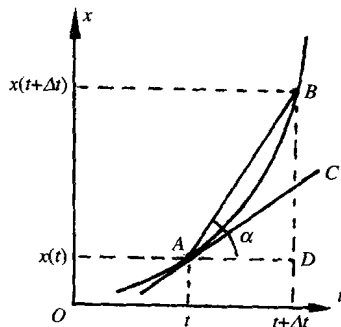


图 1.3

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \operatorname{tg}\alpha \quad (1.9)$$

即为割线 \overline{AB} 的斜率。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 点无限靠近 A 点, 割线变成了过 A 点的切线。因此, 速度等于过曲线上一点切线的斜率, 它是位置对时间的瞬时变化率。

同样, 可以定义平均加速度和瞬时加速度

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.10)$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.11)$$

\bar{a} 是反映质点运动速度在 Δt 时间内变化快慢和方向的物理量。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 成为能精确描述的瞬时加速度。

作直线运动的质点的速度随时间的变化关系, 可以在 $v-t$ 坐标中用一条曲线(称速度图线)来表示。同样, 平均加速度 \bar{a} 和加速度 a 分别是过曲线上两点割线的斜率和曲线上一点切线的斜率。

应用 $v-t$ 图线(即速度图线)可以求出质点在任意时间内的位移。如图 1.4, 要求得质点在时间 $t_1 \rightarrow t_2$ 的位移, 只需把阴影面积代数相加即可。具体做法可以用近似求解。令 $t_1 \rightarrow t_2$ 时间内分成 n 个相等的小段, 每段大小为 Δt , 只需 Δt 足够小, 就可以近似认为 Δt 内速度大小几乎不变, 然后写出总面积

$$S = \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t \quad (1.12)$$

其中 $v(t_i)$ 为第 i 条内的速度值。当 $\Delta t \rightarrow 0$, 即 $n \rightarrow \infty$ 时, 此值 S 即为位移的精确值。

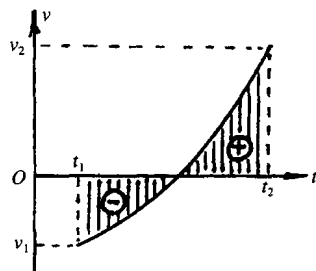


图 1.4

加速度 a 保持不变的直线运动称为匀变速直线运动。作匀变速直线运动的质点的运动学方程有:

$$v = v_0 + at \quad (1.13)$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1.14)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (1.15)$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad (1.16)$$

如果细加考虑, 上述方程包含五个参量: $v, v_0, t, a, x - x_0$ 。若把这五个参量认为是“独立参量”, 那么以上各方程“独立”的只有两个方程, 因此欲由上述方程求解未知参量, 必须先给出三个参量。例如, 一人持枪朝天竖直发射一颗子弹, 经 t 秒后, 子弹落回发射地, 求子弹的初速度。此题事实上告诉了三个已知量: 时间 t , 重力加速度 g 以及位移 $x - x_0 = 0$ (加速度或速度的正负由所取坐标向上或向下确定)。无疑, 一定能从运动学方程求得子弹的初速。

【练习 1】 一火箭从某个无大气层的行星的一个极地竖直向上发射。由火箭上传递过来的无线电信息知, 从火箭发射时的一段时间 τ 内, 火箭上所有物体对支持物的压力或对其悬挂装置的拉力是火箭发射前的 1.8 倍。在落回行星表面前的所有时间内, 火箭里的物体处于失重状态。试问, 从火箭发射到落回行星表面经过多少时间? 设行星引力大小随距行星高度的变化

可以忽略不计。

分析与解 由题中假设引力随高度变化可以忽略,因此可以近似认为行星表面附近自由落体加速度为恒量,以 g 表示。火箭在向上发射的一段时间 τ 内,加速度 a 为恒定

$$a = (1.8 - 1)g = 0.8g$$

在 τ 时间内火箭达到的高度

$$h = \frac{1}{2}a\tau^2$$

在 τ 时间末火箭达到的速度大小(方向向上):

$$v = a\tau$$

在落回行星表面前的其它时间内火箭中物体处于失重状态,表明发动机关闭后火箭的运动乃是从高度 h 处作初速为 v 的竖直上抛运动,直到落回行星表面。

设落回行星表面前的这段时间为 t ,则

$$-h = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

代入 h 、 v 、 a 的表达式,解得时间:

$$t = 2\tau$$

因此,从火箭发射到落回行星表面共经历了 3τ 时间。

【练习 2】 沿直线作匀加速运动的质点,从某时开始,在相继的 τ_1 秒、 τ_2 秒、 τ_3 秒内的平均速度分别为 v_1 、 v_2 、 v_3 。试证:

$$\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2 + \tau_3}$$

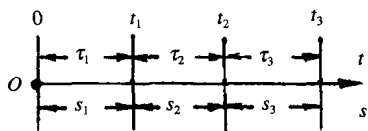


图 1.5

分析与解 把时间 τ_1 、 τ_2 、 τ_3 , 时刻 t_1 、 t_2 、 t_3 , 位移 s_1 、 s_2 、 s_3 示于图 1.5 中。有关系:

$$t_1 = \tau_1$$

$$t_2 = \tau_1 + \tau_2$$

$$t_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

设初速为 v_0 , 加速度为 a , 则

$$s_1 = v_0\tau_1 + \frac{1}{2}a\tau_1^2$$

$$v_1 = \frac{s_1}{\tau_1} = v_0 + \frac{1}{2}a\tau_1$$

$$s_2 = (s_1 + s_2) - s_1$$

$$= v_0(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2}a(\tau_1 + \tau_2)^2 - \left(v_0\tau_1 + \frac{1}{2}a\tau_1^2 \right)$$

$$= v_0\tau_2 + \frac{1}{2}a\tau_2^2 + a\tau_1\tau_2$$

$$v_2 = \frac{s_2}{\tau_2} = v_0 + \frac{1}{2}a\tau_2 + a\tau_1$$

同理求得

$$v_3 = v_0 + \frac{1}{2}a\tau_3 + a(\tau_1 + \tau_2)$$

最后得到

$$\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2 + \tau_3}$$

得证。

【练习 3】 两个相同的球 A 和 B , 质量均为 m , A 在 B 后的距离为 a 。如 A 受沿 AB 方向的冲量 I 的作用, 同时 B 受常力 F 的作用(方向沿 AB) 开始运动。试证明 A 不超越 B 的条件。

分析与解 球 A 受到冲量 I 的作用, 作速度为 v_A 的匀速运动, 且满足关系

$$I = mv_A$$

利用在同一直线上运动的运动方程

$$x_A = v_A t = \frac{I}{m} t, \quad x_B = a + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

如果 A 能够追上 B , 则有

$$x_B - x_A = a + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 - \frac{I}{m} t = 0$$

化简 t 的方程:

$$t^2 - \frac{2I}{F} t + \frac{2ma}{F} = 0$$

$$t = \frac{I}{F} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{F}\right)^2 - \frac{2ma}{F}}$$

如果 A 追不上 B , 那么 t 应该无解, 无解条件为

$$\left(\frac{I}{F}\right)^2 < \frac{2ma}{F}$$

得到结论:

$$I^2 < 2maF$$

这就是 A 不超越 B 的条件。

四、抛体运动

抛体运动是一个曲线运动, 而且在运动中加速度始终为方向竖直向下的重力加速度 g 。因此, 抛体运动是一个匀变速曲线运动。而且因为抛射体始终运动在初速度与重力加速度所决定的平面内, 所以抛体运动是一个平面运动。运动方程很容易由方程(1.13)、(1.14)类似给出

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t \quad (1.17)$$

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2} \boldsymbol{g}t^2 \quad (1.18)$$

其中 \boldsymbol{r}_0 、 \boldsymbol{v}_0 分别为质点在刚抛出($t=0$)时的位矢和速度。若把抛出点作为坐标原点, 则 $\boldsymbol{r}_0=0$ 。

根据运动叠加原理, 可以把抛体运动看作由两个直线运动叠加而成, 即把一个曲线运动分解成两个直线运动的叠加来讨论。有两种分解方法:

(1) 速度为 \boldsymbol{v}_0 的匀速直线运动和沿竖直方向的自由落体运动。这可以由方程(1.17)、(1.18)右式两项直接看出。

(2) 以抛射点为坐标原点, 在抛射平面(竖直平面)内建立直角坐标系, 再把方程(1.17)、(1.18)中各矢量沿 x 、 y 方向分解。如果在抛射平面内分别取水平方向和竖直向上方向为 x 、 y

轴方向,那么抛体运动方程的分量形式为

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt \quad (1.19)$$

$$x = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.20)$$

这表示,抛体运动可以看成:沿 x 方向的速度为 $v_0 \cos \theta$ 的匀速直线运动和沿 y 方向的初速为 $v_0 \sin \theta$ 、加速度为 $-g$ 的匀变速直线运动。

事实上,在讨论沿斜面向上(或向下)抛掷物体的抛体运动时,通常令直角坐标的 x 、 y 轴分别指向沿斜面向上(或向下)和垂直于斜面向上的方向更为方便。此时, x 、 y 方向的运动均为匀变速直线运动,它们在 x 、 y 方向的分运动方程分别为

$$v_x = v_0 \cos \theta \pm (g \sin \varphi)t \quad (1.21)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - (g \cos \varphi)t \quad (1.22)$$

$$x = (v_0 \cos \theta)t \pm \frac{1}{2}(g \sin \varphi)t^2 \quad (1.23)$$

$$y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}(g \cos \varphi)t^2 \quad (1.24)$$

方程(1.21)和(1.23)中,正号为斜面向下,负号为斜面向上。以上三种情况,示于图 1.6(a)、(b)、(c)。

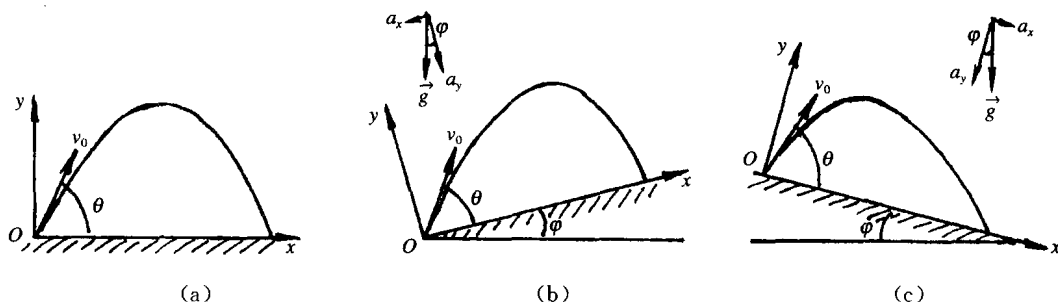


图 1.6

上述给出的是抛体运动的运动方程,这些方程包含了抛体运动的全部信息。一切待求的物理量,均可从这些方程得到。

[例 1] 在图 1.6(a)情况,欲求抛射体射程 L ,可以从方程(1.20)中 $y=0$ 时的 x 值得到

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (1.25)$$

[例 2] 同样,在图 1.6(a)情况,欲求抛射体所达最大高度,可以从方程(1.19)、(1.20)中 $v_y=0$ 时的 y 值得到

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (1.26)$$

[例 3] 在图 1.6(b)情况,若抛射体与斜面经无能量耗损的完全弹性碰撞后从原路返回抛射点。欲确定图中 θ 与斜面倾角 φ 应满足的关系,可以根据抛射物抵达斜面上落地点处的运动特点: $v_x=0, y=0$,利用方程(1.21)、(1.24)中相应的两个方程,消去时间 t ,得到

$$\operatorname{ctg} \theta \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 2 \quad (1.27)$$

很有趣,这个结论与初速度大小无关。

[例 4] 在图 1.6(b)情况,欲求沿斜坡方向的射程 S ,可以从方程(1.24)中 $y=0$ 时的 x 值得到

$$S = \frac{2v_0^2 \cos(\theta + \varphi) \sin \theta}{g \cos^2 \varphi} \quad (1.28)$$

有时,我们关心的是轨道方程,尽管轨道方程所包含的信息没有运动方程所含信息多。在讨论轨道方程时,通常取图 1.6(a)的情况。

我们先写出轨道方程。利用方程(1.20),消去 t 得到

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \quad (1.29)$$

这是一个轨道方程。但是,从更广泛的意义上来看,这是一个含有 4 个参量(x, y, v_0 和 θ)的方程。为了进一步理解这个方程,我们作一些将来与解题关系较为密切的讨论:

(1) 显而易见,在 v_0 和 θ 确定的情况下,方程(1.29)是抛射体运动的轨道方程。

(2) 设抛射点为坐标原点,抛射初速度大小 v_0 为已知值,而 (x, y) 为竖直抛射面内的一确定点,[这里 $x > 0$, 而 y 既可以大于 0,也可以小于 0,还可以等于 0(属于图 1.6(a)的情况)]假定这一点能被击中,我们来看看,此时抛射角为何值? 为此,把方程(1.29)改写为

$$\operatorname{tg}^2 \theta - \frac{2v_0^2}{gx} \operatorname{tg} \theta + \left(\frac{2v_0^2}{gx^2} y + 1 \right) = 0 \quad (1.30)$$

解出 $\operatorname{tg} \theta$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx} \right)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{gx^2} y + 1 \right)} \quad (1.31)$$

通常, $\operatorname{tg} \theta$ 有两个解,这说明在我们的情况下,同一个抛射体可以用两个不同的抛射角 θ_1, θ_2 , 均能击中 (x, y) 点。我们把此结论示于图 1.7(b), 而图 1.7(a) 作为 $y=0$ 时的对照。

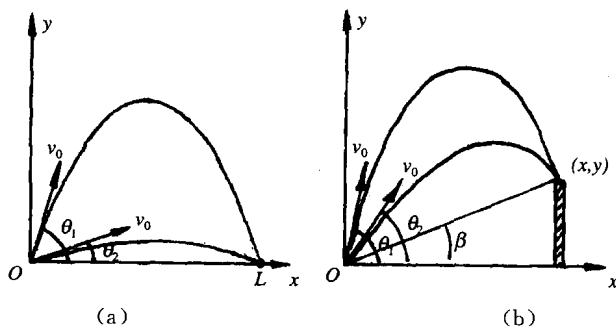


图 1.7

图 1.7(a)中射程 L 由表达式(1.25)给出。设 θ_1, θ_2 为同一射程的两个抛射角,显然有关系

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (1.32)$$

那么在图 1.7(b)中, θ_1, θ_2 应满足什么关系呢?

我们利用方程(1.30)。在现在的情况下, v_0 已知,由方程(1.31)得到两个抛射角 θ_1, θ_2 , 对应于图 1.7(b)中两条抛物线,而点 (x, y) 是这两条抛物线共同经过的一个点。在这个意义下,方程(1.30)的两个解 $\operatorname{tg} \theta_1, \operatorname{tg} \theta_2$ 均满足方程(1.30),因此有

$$\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2v_0^2}{gx} \quad (1.33)$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{2v_0^2}{gx^2}y + 1 \quad (1.34)$$

解得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1 - \operatorname{tg}\theta_1 \cdot \operatorname{tg}\theta_2} \\ &= \frac{\frac{2v_0^2}{gx}}{-\frac{2v_0^2}{gx^2}y} = -\frac{x}{y} \\ &= -\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

其中 β 为在抛射点所看到的点 (x, y) 的视角, 在此 $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ 。如果 y 为负, 则 β 值也为负。最后得到

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \beta \quad (1.36)$$

这个关系式在解题中很有用。

(3) 我们再来看图 1.7(a), 由方程(1.25), 在 v_0 一定的条件下易得最大射程

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

此时, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{4}$ 。一般情况下, 射程 L 对应于两个互不相等的抛射角 θ_1, θ_2 。如果射程 L 不变, 能击中 L 处的最小 v_0 值应为多大? 显然

$$(v_0)_{\min} = \sqrt{gL} \quad (1.37)$$

而且此时的抛射角必为 $\frac{\pi}{4}$ 。

与此类似, 我们看图 1.7(b)。如果 v_0 一定, 击中 (x, y) 点一般有两个抛射角, 那么击中 (x, y) 点的最小 v_0 值就是在 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ 时对应的 v_0 值, 可以由方程(1.33)或(1.34)得到

$$v_0 = \sqrt{gx \operatorname{tg}\theta_0} \quad (1.38)$$

或

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}(\operatorname{tg}^2\theta_0 - 1)} \quad (1.39)$$

其中

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$$

由于此时方程(1.29)或(1.30)的 $\operatorname{tg}\theta$ 解为重根, 方程(1.31)中根号内的表达式为零, 所以 v_0 的表达式(1.38)和(1.39)是相同的。

(4) 我们对方程(1.29)重新整理, 改写为

$$\begin{aligned} y &= -\frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\theta + x\operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} \\ &= -\frac{gx^2}{2v_0^2}\left[\operatorname{tg}^2\theta - \frac{2v_0^2}{gx}\operatorname{tg}\theta + \left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2\right] + \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \frac{gx^2}{2v_0^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\operatorname{tg}\theta - \frac{v_0^2}{gx} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (1.40)$$

此式表示,当抛射体初速 v_0 和 x 坐标一定时,在抛射角满足

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{v_0^2}{gx} \quad (1.41)$$

时, y 得到极大值:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (1.42)$$

这个结论具有实际意义。如图 1.8,一人距墙为 x 处以初速 v_0 抛射一物,可以由此确定击中墙上的最高高度 y_{\max} 。

这个结论,我们还可以从方程(1.30)的解(1.31)得到。重新写下(1.31)表达式:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{gx^2}y + 1\right)}$$

当 $\operatorname{tg}\theta$ 有重根时,得到

$$\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{gx^2}y + 1\right) = 0 \quad (1.43)$$

在 x 确定条件下,(1.43)解出与(1.42)相同的结果。

(5) 从轨道方程(1.29)

$$y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2\theta)$$

解出 $\operatorname{tg}\theta$ 的解的表达式(1.31)。在 $\operatorname{tg}\theta$ 有重根的情况下,根号内的表达式等于零,即(1.43)。这个表达式已经被用来确定在 x 一定的条件下, y 的最大值,即方程(1.42)。同时,这个表达式也可被用来确定在 y 一定的条件下 x 的最大值。由表达式(1.43)直接解出

$$x_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad (1.44)$$

例如:在图 1.9 所示的情况,若抛射物的初速 v_0 已知,图中 $y = -h$,那么抛射体所能达到的最大水平射程为

$$L_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

对应的抛射角由方程(1.36)得到

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\theta = \frac{\pi}{2} + \beta$$

其中 $\beta = -\operatorname{arctg} \frac{h}{L_{\max}}$, 解得

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{h}{L_{\max}}$$

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{h}{L_{\max}} \right) = \frac{h}{L_{\max}} = \frac{gh}{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

再代入

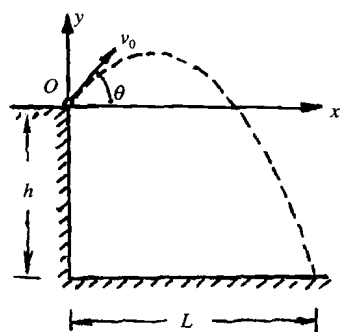


图 1.9

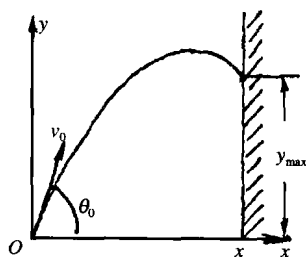


图 1.8

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \operatorname{tg} \theta},$$

解得 $\operatorname{tg} \theta$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

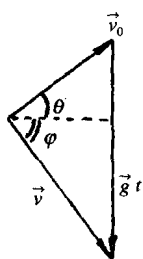
求解中利用了 $\operatorname{tg} \theta > 0$ 。

此例还可以用下面方法求解。

根据运动方程

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t$$

如图 1.10 所示。以高为 h 、初速为 v_0 抛出的物体不论抛射角 θ 多大，落地时的速率相同。由能



量关系式

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

写出图 1.10 中抛射体落地时三矢量构成三角形的面积 S

$$S = \frac{1}{2}gt \cdot v_0 \cos \theta$$

图 1.10

而物体水平射程 L 为

$$L = (v_0 \cos \theta)t$$

联立得

$$S = \frac{1}{2}gL$$

由此可以断言，只有水平射程取最大时， S 才能取最大。因图 1.10 中 v_0 和 v 均为确定值，为了 S 最大， v_0 与 v 必须垂直，即

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

由图得关系

$$v_0 \cos \theta = v \cos \varphi = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \cdot \sin \theta, \text{ 得到 } \operatorname{tg} \theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

对应的最大水平射程为

$$L_{\max} = \frac{2S_{\max}}{g} = \frac{2}{g} \cdot \frac{1}{2}v_0 v = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

五、圆周运动

圆周运动是最简单的曲线运动，它是研究其它曲线运动的基础。

对于一般曲线运动的平均速度、瞬时速度以及平均加速度、瞬时加速度可以与直线运动类似给出定义

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

在图 1.11 中用 A, B 两点割线方向和 A 点的切线方向分别表示平均速度和瞬时速度 ($\Delta t \rightarrow 0$ 时) 的方向。由此可知, 质点作曲线运动时的速度方向一定沿着质点所到之处曲线的切线方向。无疑这个结论对圆周运动也适用。

我们首先讨论质点的圆周运动如何按轨道的切向和垂直于切向的法向分解。由于速度方向始终指向轨道切向, 不用分解, 所以要做的就是把加速度按切向和法向分解。

如果质点作匀速圆周运动, 运动中速率始终相等。如图 1.12 (a) 所示, 设 t 时刻质点运动到 A 点, $t + \Delta t$ 时刻质点达 B 点, 速度分别为 $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ 。由于速度始终沿切向, 所以两速度分别与 OA, OB 垂直。在 Δt 时间内速度增量为 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ 。依加速度定义得

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A}{\Delta t}$$

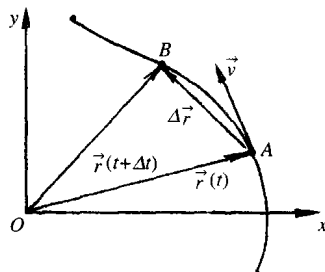


图 1.11

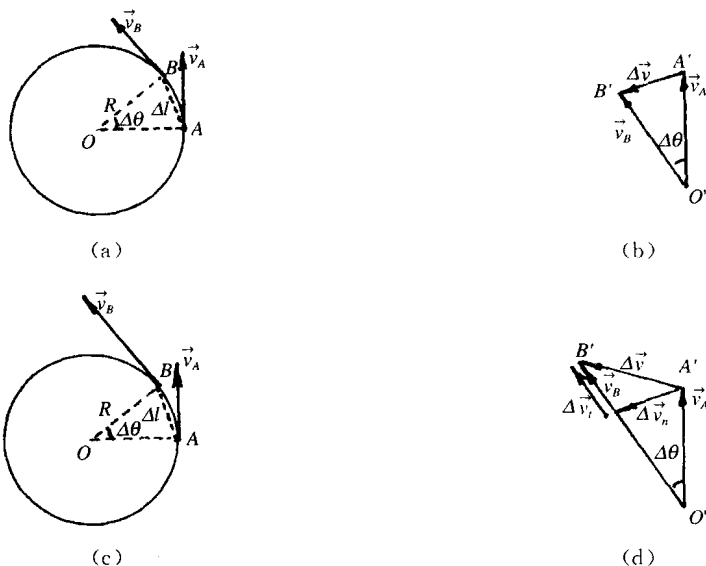


图 1.12

按图 1.12(a), (b) 中几何关系得

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{\Delta l}{R}$$

式中 Δl 是 AB 弦的长度, $v = |\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B|$ 。上式改写为

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

两边取极限, 并注意到 Δl 和 Δs (A, B 间弦长) 在极限条件下相等, 得加速度大小

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad (1.45)$$

加速度 \mathbf{a} 的方向, 可由 $\Delta \mathbf{v}$ 的极限方向确定。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \theta \rightarrow 0$, $\Delta \mathbf{v}$ 垂直于 \mathbf{v}_A , 即垂直于切向并指向圆心 O 。这个加速度称为向心加速度, 或法向加速度。