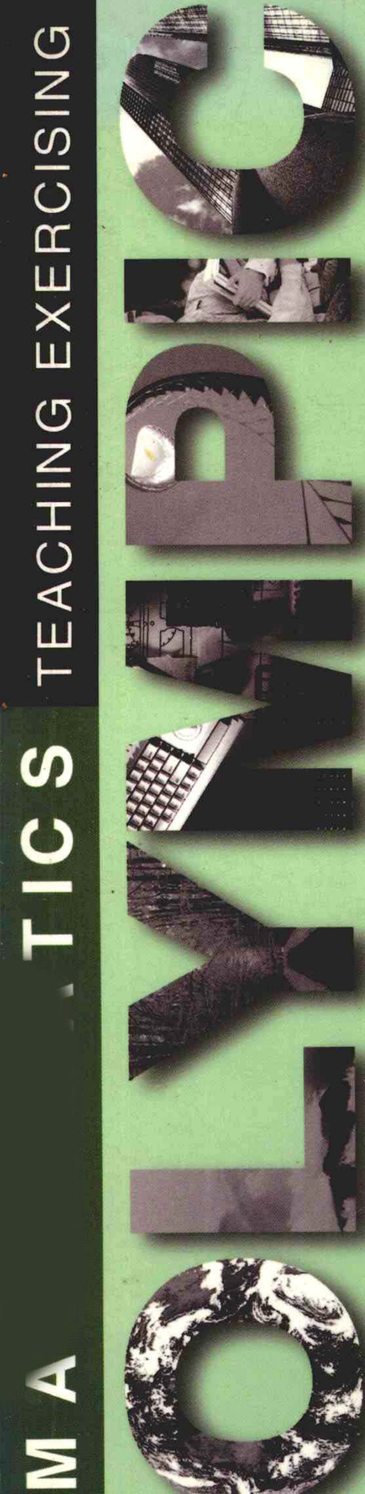

裘宗沪／主编

奥林匹克数学教程练习册

中国数学会普及工作委员会 编

高中基础册

开明出版社

奥林匹克数学教程练习册

（高中基础册）

主编　裘宗沪
编者　张燕勤
　　　尹克新
　　　李桂华

开 明 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学教程：高中基础册/裘宗沪主编：中国数学会普及工作委员会编.-北京：开明出版社，1998.7
ISBN 7-80077-752-9

Ⅰ.奥… Ⅱ.①裘… ②中… Ⅲ.数学课-高中-教材
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第20747号

奥林匹克数学教程练习册
（高中基础册）
裘宗沪　主编
*
开明出版社出版发行
（北京海淀区西三环北路19号）
廊坊人民印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
开本850×1168　1/32　印张5.5　字数137千字
2000年1月北京第1版　2000年1月北京第1次印刷
印数：印数:00,001—5,000
ISBN 7-80077-752-9/G·522　定价:6.80元

内容提要

《奥林匹克数学教程》是中国数学会普及工作委员会根据其制定的“初高中数学竞赛大纲”组织一批中国数学奥林匹克高级教练员编写的。为了在教程学习的基础上有更多的练习机会，按照教程的章节顺序编写了这套《奥林匹克数学教程练习册》。

本书与《奥林匹克数学教程》高中基础册配套。

前　言

早在五十年代，以华罗庚教授为代表的我国老一辈著名数学家就十分重视培养青少年优秀数学人才，倡导并组织了多次数学竞赛活动，吸引了大批数学爱好者，对我国数学人才的成长和数学研究的开展作出了卓越的贡献。

由于种种客观因素，我国数学竞赛活动几经波折，到 1978 年才又重新开展起来。现在数学竞赛活动已经发展成为规模最大、影响最广的全国中小学生学科竞赛。

近几年来，由于中国国家队在国际数学奥林匹克中取得了举世瞩目的成就，我国国内的数学竞赛热也跟着升温了。然而，我们应该清醒地看到，数学竞赛活动的最终目的绝不仅仅是夺几块金牌，拿几项冠军。

中国数学会普及工作委员会在多次重要会议上都强调指出，数学竞赛活动的目的有三个。一是提高学生学习数学的兴趣，二是促进中小学数学教学改革，三是及早地发现和培养人才。同时，也多次强调，数学竞赛活动必须坚持普及与提高相结合的方针，坚持在普及的基础上提高的原则。为此，中国数学会普及工作委员会根据当前中学数学教学的实际情况，及时制订了初中和高中数学竞赛大纲，有效地遏制了数学竞赛命题中知识范围不适当膨胀的趋势，引导学生重视课堂学习，以课堂学习为主，以课外活动为辅，引导学生在学有余力的情况下对课堂学过的内容适当地加深和补充，并特别注意学会对知识的灵活动用，培养自己的数学

思维能力，养成勤思考肯钻研的良好学风，为把自己锻炼成一个具有开拓探究精神的创造者打下坚实的基础。

《奥林匹克数学教程》是中国数学会普及工作委员会为小学、初中、高中的数学课外活动编写的一套教材。这套教材的高中部分分为高中基础册与高中提高册两本。这两本教材是根据“高中数学竞赛大纲”编写的，把培养学生学习数学的兴趣放在首要地位，重视课内课外的配合，注意思路方法与技巧的分析，坚持少而精，重在开拓探究性能力的培养。

《奥林匹克数学教程》高中部分，比课内使用的数学教材在深度和广度上都有所提高，其中高中基础册更注重教材的深度，目的是使学生能够更好地理解课内讲授的数学概念，掌握并灵活运用数学方法，打下坚实的数学基础。而提高册比较注重广度，目的是使学生能够适当地扩大知识面，开扩眼界，了解并掌握一些有用的数学思想和研究问题的方法，为进一步学习作好准备。两本书各有侧重，相辅相成。使用者可以根据自己的情况，选择阅读。

这套教程还有待充实完善。在试用一段时间后将进行修订，恳请各地富有教学经验的老师不吝赐教。

裘宗沪

1994年5月2日

目　录

一　集合、子集与映射

一、选择题

1. 设$M=\{(x, y): |xy|=1, x>0\}$，

$N=\{(x, y): \mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}y=\pi\}$，那么(　　).

(A) $M\cup N=\{(x, y): |xy|=1\}$；

(B) $M\cup N=M$；

(C) $M\cup N=N$；

(D) $M\cup N=\{(x, y): |xy|=1$，且 x，y 不同时为负数$\}$.

2. 若$M=\{(x, y) \mid |\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，

$$N=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 2\},$$

则 $M\cap N$ 的元素个数是(　　).

(A) 4；　　(B) 5；　　(C) 8；　　(D) 9.

3. 点集$\left\{(x, y) \mid \mathrm{tg}\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y\right\}$中元素的个数为(　　).

(A) 0；　　(B) 1；　　(C) 2；　　(D) 多于 2.

4. 集合$M=\{u \mid u=12m+8n+4l$，其中 m，n，$l\in Z\}$，

$N=\{u \mid u=20p+16q+12r$，其中 p，q，$r\in Z\}$的关系为(　　).

(A) $M=N$；　　(B) $M\not\subseteq N$，$N\not\subseteq M$；

(C) $M\subset N$；　　(D) $M\supset N$.

二、填空题

1. 已知集合$M=\{x, xy, \mathrm{tg}(xy)\}$

及　　$N=\{0, |x|, y\}$，

并且 $M=N$，那么

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$$

的值等于________.

2. 集合$\{x\mid -1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},\ x\in N\}$的真子集的个数是________.

3. 对有限集合 A，存在函数 $f:N\to A$ 具有下述性质：若$|i-j|$是素数，则 $f(i)\neq f(j)$，$N=\{1,2,\cdots\}$. 那么，有限集合 A 的元素个数最少为________.

4. 集合$\{1,2,3,\cdots,100\}$的某些子集，满足条件:没有一个数是另一个数的 2 倍. 这样的子集中所含元素的个数最多是________.

三、解答题

1. 设 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in R)$，且

$$A=\{x\mid x=f(x),\ x\in R\},$$
$$B=\{x\mid x=f[f(x)],\ x\in R\},$$

如果 A 为只含一个元素的集合，则 $A=B$.

2. 集合 A 与 B 分别由适合如下条件的所有五位数构成:对于集合 A 中的每一个数，其各位数字之和或者加 1 或者减 1 之后是 5 的倍数，对于集合 B 中的每一个数，其各位数字之和或者是 5 的倍数，或者减 2 之后是 5 的倍数. 证明:集合 A 与 B 所含的元素个数相等.

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，

$$f_k=|\{a_i\mid a_i<a_k,\ i>k\}|,$$
$$g_k=|\{a_i\mid a_i>a_k,\ i<k\}|,$$

其中　$k=1,2,\cdots,n$. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n}g_k=\sum_{k=1}^{n}f_k.$$

二　函数图像及其变换

一、选择题

1. 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f^{-1}(-x)$ 的图像的位置关系是(　　).

(A) 关于直线 $y=x$ 对称；

(B) 关于直线 $x+y=0$ 对称；

(C) 关于原点对称；

(D) 重合.

2. 函数 $y=f(x)$ 的图像为 c，c 关于直线 $x=1$ 对称的图形为 c_1，将 c_1 向左平移一个单位后得到的形为 c_2，则 c_2 所对应的函数是(　　).

(A) $y=f(-x)$；　　(B) $y=f(1-x)$；

(C) $y=f(2-x)$；　　(D) $y=(3-x)$.

3. 对任意的函数 $y=f(x)$，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x-1)$ 与函数 $y=f(-x+1)$ 的图像恒有(　　).

(A) 关于 x 轴对称；

(B) 关于直线 $x=1$ 对称；

(C) 关于直线 $x=-1$ 对称；

(D) 关于 y 轴对称.

4. 已知如图 1 的曲线是以原点为圆心，1 为半径的圆的一部分，则这一曲线的方程是(　　).

(A) $(x+\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$；

(B) $(x-\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$；

(C) $(x+\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$;

(D) $(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$.

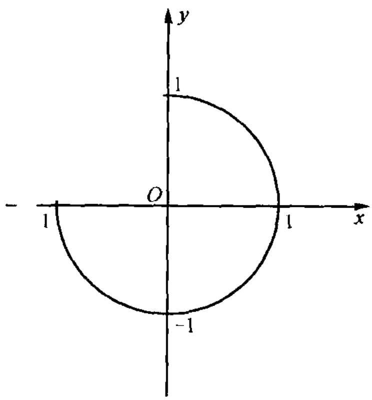

图 1

二、填空题

1. 设 P 是幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1,\ x>0)$图像上一点，过 P 点的图像的切线交 x 轴于 M，交 y 轴于 N，那么$\frac{|PN|}{|PM|}=$________.

2. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1)$，并且当点$(x,\ y)$在 $f(x)$的图像上运动时，点$\left(\frac{x}{3},\ \frac{y}{2}\right)$在 $y=g(x)$的图像上运动，则函数 $h(x)=g(x)-f(x)$的最大值是________.

3. 函数 $y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1}$的最小值是________.

4. 设函数 $f_0(x)=|x|$，$f_1(x)=|f_0(x)-1|$，$f_2(x)=|f_1(x)-2|$，则函数 $y=f_2(x)$的图像与 x 轴所围成图形中的封闭部分的面积是________.

三、解答题

1. 已知 $f(x)=x^2-6x+5$，问满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点 (x, y)，在平面上的什么范围？并作图.

2. 设在抛物线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴所围部分内从原点 O 开始作一系列内接正三角形 A_1，A_2，A_3，…(如图 2). L_n 是 A_n 的一边长，证明：$L_n=\dfrac{2n}{3}$.

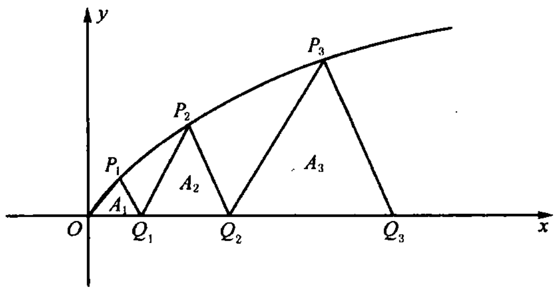

图 2

3. 由图 3 可见，方程 $\log_5(1+\sqrt{x})=\log_{16}x$ 有且仅有一个解. 请证明这个结论.

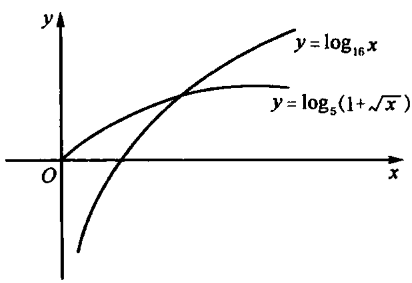

图 3

三　代数方程

1. 已知 x_1 和 x_2 是方程 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ 的根.

证明：x_1^3 和 x_2^3 是方程 $y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$ 的根.

2. 已知 p 和 q 是两个奇数.

证明：方程 $x^2+2px+2q=0$ 不可能有有理根.

3. 证明：$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$. 这里的两个三次根式都取实数.

4. 若 a 和 b 是方程 $x^4+x^3=1$ 的根，且 $a\neq b$. 求证：ab 是方程 $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$ 的根.

5. 证明：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

6. p，q 为怎样的值时，方程 $x^2+px+q=0$ 的两根恰为 p 和 q？

7. 设方程 $x^2-px+q=0$ 的两根为 r 和 s，且它们都不等于零，求以 $r^2+\frac{1}{s^2}$ 和 $s^2+\frac{1}{r^2}$ 为根的方程(不必解出原方程).

8. 证明：不论 n 是什么整数，方程

$$x^2-16nx+7^s=0$$

没有整数解，方程中的 s 是任意正整数.

9. 二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$，证明：如果方程 $f(x)=x$ 无实根，则方程 $f(f(x))=x$ 亦无实根.

10. 设 a 和 b 为实数，且使方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

至少有一个实根，对所有这种数对(a, b)，求出a^2+b^2的最小可能值.

11. 求证：不论α取何值，只要实系数方程$x^4-2x^2+\alpha x+\beta=0$有四个实根，则必有$|\beta|\leqslant 1$.

四 充分必要条件

1. 设方程 $x^3+px+q=0$ 有三个根，证明:此方程有重根的充分必要条件是 $4p^3+27q^2=0$.

2. 已知$A=\{(x, y)|f(x, y)=0\}$,

$$B=\{(x, y)|g(x, y)=0\},$$

$$C=\left\{(x, y)\left|\begin{cases}f(x, y)=0\\g(x, y)=0\end{cases}\right.\right\},$$

$$D=\{(x, y)|f(x, y)g(x, y)=0\}.$$

说明 A,C,D 之间是什么关系(用充要条件回答).

3. 证明:关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的二根，成为一直角三角形锐角正弦的充要条件是　$p^2-2q=1$，$p<0$ 及 $0<q\leqslant\frac{1}{2}$.

4. 证明:设 $f(t)$是 t 的函数，对任意实数 t，直线 l:$f(t)\cdot x+y+t=0$ 过定点的充要条件是 $f(t)$为一次函数.

5. 设 a 为正数，而

$$A=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant 1\},$$

$$B=\{(x, y)||x|+2|y|\leqslant a\}$$

是 xOy 平面内的点集，则 $A\subseteq B$ 的充分条件是 $a\geqslant\sqrt{5}$.

6. 已知直线 $y=kx+b(b\neq 0)$与二次曲线

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

相交于 M、N 两点，试求直线 OM、ON 垂直的充要条件.

7. 设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$是某三角形的三个顶点，$P_0(x_0, y_0)$是一定点，$x\cos\omega+y\sin\omega-P=0$ 是通过 P_0 的任意直线. 证明:P_0 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心的充分必要条件为 $\delta_1+\delta_2$

$+\delta_3=0$.

其中 $\delta_i=x_i\cos\omega+y_i\sin\omega-P \quad (i=1, 2, 3)$.

8. 求二次方程

$$(1-\mathrm{i})x^2+(\lambda+\mathrm{i})x+(1+\lambda\mathrm{i})=0 \qquad (\lambda\in R)$$

有两个虚根的充要条件.

9. 求二次方程

$$\begin{cases} y^2+p_1x+q_1=0 \\ y^2+p_2x+q_2=0 \end{cases} \qquad ①$$

有公共根的充要条件.

10. 设 a 是给定的正整数，A 和 B 是两个实数，试确定方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(13a)^2, \\ x^2(Ax^2+By^2)+y^2(Ay^2+Bz^2)+z^2(Az^2+Bx^2) \\ =\dfrac{1}{4}(2A+B)(13a)^4 \end{cases}$$

有正整数解的充分必要条件.（用 A、B 的关系式表示，并予以证明）

11. 求最大的实数 λ，使得当实系数多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的所有根都是非负实数时，只要 $x\geqslant0$，就有

$$f(x)\geqslant\lambda(x-a)^3,$$

并问上式中等号何时成立?

五　周期函数与周期

1. 若函数 $f(x)$ 的图像既关于直线 $x=a$ 对称，又关于直线 $x=b$ 对称 $(a\neq b)$.

求证：$f(x)$ 是周期函数.

2. 已知 m 为非零常数，设 $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$.

求证：$f(x)$ 是周期函数.

3. 证明：设 $f(m)$ 是定义在 Z 上的函数，且对任意的 m，$n\in Z$，有 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)f(n)$ 与 $f(1)=0$，则 $f(m)$ 是周期函数，且 4 是一个周期.

4. 证明：若 $f(x)$ 定义在 R 上，且对任意的 $x\in R$，有 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，则 $f(x)$ 是周期函数.

5. 实数 $a>0$，$f(x)$ 是定义在 R 上的函数，并且对任意一个 x，$f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$.

求证：$f(x)$ 是周期函数.

6. 试证：$\sin(x^2)$ 不是周期函数.

7. 数列 a_1，a_2，…由下列规则给出：当 $n\geqslant 1$ 时，$a_{2n}=a_n$，当 $n\geqslant 0$ 时，$a_{4n+1}=0$，$a_{4n+3}=0$. 证明：该数列不是周期数列.

8. 已知 $V_0=0$，$V_1=1$，$V_{n+1}=8V_n-V_{n-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$. 试问：在数列 $\{V_n\}$ 中是否有能被 15 整除的项？这样的项有多少？证明你的结论.

9. 选取一列整数 a_1，a_2，…，使得对每个 $n\geqslant 3$，都有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$. 若该数列前 1492 项之和等于 1985，前 1985 项之和等于 1492，那么前 2001 项之和是多少？