

名校应试指导丛书

数



学

高考解题三十六计

潘慰高 鲁有专 曹炳南 编

南京大学出版社

名校应试指导丛书

数 学

高考解题三十六计

潘慰高 鲁有专 曹炳南 编著

南京大学出版社

1997·南京

名校应试指导丛书

数 学

高考解题三十六计

潘慰高 鲁有专 曹炳南 编著

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内 邮政编码: 210093)

江苏省新华书店发行 江苏锡沪印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 13.5 字数 302 千

1997 年 7 月第 2 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—10000

ISBN 7-305-01975-5/O·99

定价: 14.00 元

(南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

前 言

高考是选拔性考试，除了注重考查考生的基础知识、基本技能和基本方法外，更加重视能力的测试，突出对数学思想、数学素质和学习潜能的考察。因此，掌握一定的解答高考题的思想方法就显得十分必要。

本书向你介绍了解答高考数学题的三十六种思维方法、解题策略和数学思想，其中既有创造性的思维方法，亦有常见的基本思维模式。每一讲都是从方法要点、实例演练、例题讲解和习题精选等四个部分进行编写的，最后还给出了习题提示和答案。选用的例题几乎都是近几年全国高考题（包括上海卷和广东卷）。某些典型高考题虽在本书中出现多次，但出现在不同的章节，其思路和解法是不一样的。

怎样解答高考题，是每一位教师和广大考生都十分关心的热门话题。本书只是从方法论的角度探索解答高考题的一些思维方法，期望对参加高考的同学有所帮助。

参加本书编写工作的还有李顺成、汤晓美、庞荣华、翁德强、徐丽萍、张锋等老师。本书能够顺利完成，和王长禄、汤业柱等同志提供的方便是分不开的。在此对以上同志表示衷心感谢。

编 者

1997年2月

目 录

一、 执因素果.....	(1)
二、 逆推顺证	(12)
三、 模式识别	(24)
四、 特征分析	(35)
五、 比较判别	(48)
六、 善用性质	(59)
七、 活用公式	(73)
八、 归类求解	(86)
九、 变量代换.....	(100)
十、 数形结合.....	(110)
十一、 角度变换.....	(122)
十二、 虚实互化.....	(132)
十三、 分类讨论.....	(142)
十四、 分离参数.....	(152)
十五、 变更转化.....	(162)
十六、 归纳类比.....	(175)
十七、 整体处理.....	(186)
十八、 方程观点.....	(197)
十九、 函数方法.....	(209)
二十、 构造模型.....	(224)
二十一、 配对转化.....	(237)
二十二、 以退求进.....	(245)
二十三、 正难则反.....	(257)

二十四、命题探索.....	(266)
二十五、巧用定理.....	(279)
二十六、寻求规律.....	(290)
二十七、割补隔离.....	(302)
二十八、等积变形.....	(313)
二十九、对称变换.....	(323)
三十、回到定义.....	(333)
三十一、设而不求.....	(344)
三十二、韦达定理.....	(357)
三十三、引参搭桥.....	(373)
三十四、巧选定点.....	(386)
三十五、轨迹方法.....	(400)
三十六、轨迹范围.....	(411)

一、执因索果

方法要点

数学解题的最基本的思路,是由题设出发,顺着问题中提供的线索,寻求问题的结论.思路能否顺畅,关键要弄清题意,明确已知是什么,要求解决的问题是什么.解题能否成功,就是我们能否通过信息的感知、加工、转换,揭示出题目中的各种条件及其内在联系.当题目条件明朗化了,解题的思路也就有了.

实例演练

方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根恰好是一个直角三角形两锐角的正弦,求 p, q 应满足的条件.

思路 设两根为 $\sin\alpha, \sin\beta$, 则有 $\alpha + \beta = 90^\circ, 0 < \sin\alpha, \sin\beta < 1, \sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$. 然后再用韦达定理,将求 p, q 的取值范围转化为求 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 及 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ 的取值范围.

解 设 $\sin\alpha, \sin\beta$ 为方程两根,且 $\alpha + \beta = 90^\circ$, 则

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = -p, \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta = q. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = -p, \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha = q. \end{cases}$$

$$\therefore p^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2q.$$

$$\therefore 0 < \alpha < 90^\circ,$$

∴ 由 $-p = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$, 得 $1 < -p < \sqrt{2}$,

即 $-\sqrt{2} < p < -1$

由 $q = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, 得 $0 < q < \frac{1}{2}$.

故 p, q 满足的条件是: $p^2 = 1 + 2q$, 且 $0 < q < \frac{1}{2}$,
 $-\sqrt{2} < p < -1$.

例题讲解

★ 例 1 ('96 上海高考题) 如果 $\log_a 3 > \log_b 3 > 0$, 那么 a, b 间的关系是()

(A) $0 < a < b < 1$ (B) $1 < a < b$.

(C) $0 < b < a < 1$. (D) $1 < b < a$.

思路 先要化为同底(比如以 3 为底), 再利用对数函数的单调性进行比较.

解 ∵ $\log_a 3 > \log_b 3 > 0$,

$$\therefore \frac{1}{\log_3 a} > \frac{1}{\log_3 b} > 0, \therefore \log_3 b > \log_3 a > 0,$$

$$\therefore b > a > 1.$$

故应选(B).

例 2 ('90 上海高考题) 已知 $\log_5(x^2 + 2x - 2) = 0$,
 $2\log_5(r + 2) - \log_5 y + \frac{1}{2} = 0$, 求 y 的值.

思路 已知两个方程, 要求一个未知数, 一般用消元法. 此题较为特殊, 可先由第一个方程求出 x 值, 再代入第二个方程求 y 的值.

解 ∵ $\log_5(x^2 + 2x - 2) = 0$, ∴ $x^2 + 2x - 2 = 1$,

即 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 1$.

显然 $x = -3$ 不合题意,舍去.

当 $x = 1$ 时, $\log_5 y = \frac{1}{2} + 2\log_5 3 = \frac{1}{2} + \log_5 9 = \log_5 9\sqrt{5}$.

故 $y = 9\sqrt{5}$.

例3 ('91 全国高考题) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $b_n = (\frac{1}{2})^{a_n}$, 已知 $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{21}{8}$, $b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}$, 求等差数列的通项 a_n .

思路 由 $\{a_n\}$ 成等差数列, 得 $\{b_n\}$ 成等比数列, 且这时 $b_2^2 = b_1 b_3$.

解 设等差数列 $\{a_n\}$ 通项为 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 则

$$b_n = (\frac{1}{2})^{a_1 + (n-1)d}.$$

$$\therefore b_1 b_3 = (\frac{1}{2})^{a_1} \cdot (\frac{1}{2})^{a_1 + 2d} = (\frac{1}{2})^{2(a_1 + d)} = b_2^2.$$

由 $b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}$, 得 $b_2^3 = \frac{1}{8}$, 解得 $b_2 = \frac{1}{2}$. 代入已知条件,

$$\text{得} \begin{cases} b_1 b_3 = \frac{1}{4}, \\ b_1 + b_3 = \frac{17}{8}. \end{cases} \text{解这个方程组, 得 } b_1 = 2, b_3 = \frac{1}{8} \text{ 或 } b_1 = \frac{1}{8},$$

$$b_3 = 2. \therefore a_1 = -1, d = 2 \text{ 或 } a_1 = 3, d = -2.$$

故 $a_n = 2n - 3$ 或 $a_n = 5 - 2n$.

例4 ('85 全国高考题) 证明三角等式

$$2\sin^4 x + \frac{3}{4}\sin^2 2x + 5\cos^4 x - \cos 3x \cos x = 2(1 + \cos^2 x).$$

思路 因为右边仅含 $\cos^2 x$, 所以对左边的 $\sin^2 2x$, $\cos 3x$ 用二倍角公式和三倍角公式, 再因式分解即可.

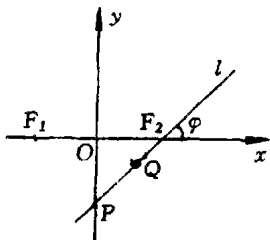
$$\begin{aligned} \text{证明 左边} &= 2\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x + 5\cos^4 x \\ &\quad - (4\cos^3 x - 3\cos x) \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x + 3\cos^2 x \\
 &= (2\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\cos^2 x \\
 &= 2\sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x \\
 &= 2(1 + \cos^2 x) = \text{右边}.
 \end{aligned}$$

∴原式成立.

例 5 ('91“三南”高考题)已知双曲线 C 的实半轴长与虚半轴长的乘积为 $\sqrt{3}$, C 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 过 F_2 , 且与 F_1F_2 的夹角为 φ , $\tan \varphi = \frac{\sqrt{21}}{2}$, l 与线段 F_1F_2 的垂直平分线的交点是 P , 线段 PF_2 与双曲线 C 的交点为 Q , 且 $|PQ| : |QF_2| = 2 : 1$, 求双曲线 C 的方程.

思路 先要建立坐标系, 再设出双曲线的标准方程, 然后列出方程求出 a, b 的值.



解 以 F_1, F_2 所在直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系如图.

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$). 焦点 $F_1,$

F_2 的坐标各为 $(-c, 0), (c, 0)$, 则 P 点坐标为 $(0, -\frac{\sqrt{21}}{2}c)$.

设 Q 点坐标为 (x_0, y_0) , 由 $\frac{PQ}{QF_2} = 2$, 得

$$\begin{cases} x_0 = \frac{0+2 \cdot c}{1+2} = \frac{2c}{3}, \\ y_0 = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{2}c + 2 \cdot 0}{1+2} = -\frac{\sqrt{21}}{6}c. \end{cases}$$

将点 Q 的坐标代入双曲线方程, 得 $\frac{4c^2}{9a^2} - \frac{21c^2}{36b^2} = 1$.

将 $c^2 = a^2 + b^2$ 代入, 整理, 得 $16(\frac{b}{a})^4 - 41(\frac{b}{a})^2 - 21 = 0$.

$$\because \frac{b}{a} > 0, \therefore (\frac{b}{a})^2 = 3, \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

$$\text{又已知 } ab = \sqrt{3}, \therefore a = 1, b = \sqrt{3}.$$

$$\text{故所求双曲线方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

例 6 ('93 全国高考题) 设复数 $z = \cos\theta + i \sin\theta (0 < \theta < \pi)$, $w = \frac{1 - (\bar{z})^4}{1 + z^4}$, 已知 $|w| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arg w < \frac{\pi}{2}$, 求 θ .

思路 先将 w 化为三角式, 再由 $|w| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 求出 θ 的值, 最后根据 $\arg w < \frac{\pi}{2}$ 对 θ 进行取舍.

$$\begin{aligned} \text{解 } w &= \frac{1 - [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]^4}{1 + (\cos\theta + i \sin\theta)^4} \\ &= \frac{1 - [\cos(-4\theta) + i \sin(-4\theta)]}{1 + (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)} \\ &= \frac{2\sin^2 2\theta + 2i \sin 2\theta \cos 2\theta}{2\cos^2 2\theta + 2i \sin 2\theta \cos 2\theta} \\ &= \operatorname{tg} 2\theta (\sin 4\theta + i \cos 4\theta). \end{aligned}$$

$$\therefore |w| = |\operatorname{tg} 2\theta| |\sin 4\theta + i \cos 4\theta| = |\operatorname{tg} 2\theta|,$$

$$\therefore |\operatorname{tg} 2\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \operatorname{tg} 2\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

若 $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则由 $0 < \theta < \pi$, 得

$\theta = \frac{\pi}{12}$ 或 $\theta = \frac{7\pi}{12}$, 这时

$w = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, $\arg w = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, 符合题意.

若 $\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则由 $0 < \theta < \pi$, 得

$\theta = \frac{5\pi}{12}$ 或 $\theta = \frac{11\pi}{12}$, 这时

$w = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$, $\arg w = \frac{11\pi}{6} > \frac{\pi}{2}$, 不符合题意, 舍去.

故 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 或 $\theta = \frac{7\pi}{12}$.

例 7 ('87 全国高考题) 设复数 z_1, z_2 满足 $z_1 \bar{z}_2 + \bar{A} z_1 + A \bar{z}_2 = 0$ ($A \in \mathbb{C}, A \neq 0$), 求证:

$$(I) |z_1 + A| |z_2 + A| = |A|^2;$$

$$(II) \frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \frac{|z_1 + A|}{|z_2 + A|}.$$

思路 由 $z_1 \bar{z}_2 + \bar{A} z_1 + A \bar{z}_2 = 0$, 得 $z_1(\bar{z}_2 + \bar{A}) + A(\bar{z}_2 + \bar{A}) = |A|^2$, 即 $(z_1 + A)(\bar{z}_2 + \bar{A}) = |A|^2$, 可得 (I)、(II).

证明 (I) $\because z_1 \bar{z}_2 + \bar{A} z_1 + A \bar{z}_2 + A \cdot \bar{A} = |A|^2$,

$$\therefore (z_1 + A)(\bar{z}_2 + \bar{A}) = |A|^2.$$

$$\therefore |z_1 + A| |z_2 + A| = |(z_1 + A)| |(\bar{z}_2 + \bar{A})| = |A|^2.$$

$$(II) \frac{z_1 + A}{z_2 + A} = \frac{(z_1 + A)(\bar{z}_2 + \bar{A})}{(z_2 + A)(\bar{z}_2 + \bar{A})} = \frac{|A|^2}{|z_2 + A|^2} \\ = \frac{|z_1 + A| |z_2 + A|}{|z_2 + A|^2} = \frac{|z_1 + A|}{|z_2 + A|}.$$

例 8 ('85 广东高考题) 设函数 $f(x) = \log_3(x^2 - 4mx + 4m^2 + m + \frac{1}{m-1})$, 其中 m 是实数, 又记 M 表示集合 $\{m |$

$m > 1$ 。

(I) 求证: 当 $m \in M$ 时, $f(x)$ 对所有实数 x 都有意义。
反之, 如果对所有实数 x 都有意义, 那么 $m \in M$;

(II) $m \in M$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(III) 求证: 对每一个 $m \in M$, $f(x)$ 的最小值都不小于 1。

思路 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 恒成立的条件是

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

可从图像观察或用配方法或从 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的最小值入手分析, 此题最好的方法是配方法。

解 (I) 当 $m \in M$ 时, $m > 1$, 从而对任意实数 x , 恒有

$$\begin{aligned} x^2 - 4mx + 4m^2 + m + \frac{1}{m-1} &= (x-2m)^2 + m + \frac{1}{m-1} \\ &\geq m + \frac{1}{m-1} > 0. \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $m \in M$ 时, $f(x)$ 对所有实数 x 都有意义。

反之, 如果所有实数 x 都有意义, 则

$$x^2 - 4mx + 4m^2 + m + \frac{1}{m} > 0,$$

$$\text{即 } (x-2m)^2 + m + \frac{1}{m-1} > 0$$

对一切实数 x 恒成立, 从而 $m + \frac{1}{m-1} > 0$, 即

$$\frac{m^2 - m + 1}{m-1} > 0.$$

$\therefore m^2 - m + 1 > 0$ 恒成立, $\therefore m > 1$, $\therefore m \in M$ 。

(II) 因 $\log_3 x$ 是增函数, 所以

$$f(x) = \log_3[(x-2m)^2 + m + \frac{1}{m-1}] \geq \log_3(m + \frac{1}{m-1}).$$

又 $x=2m$ 时取等号, $\therefore$ 当 $m \in M$ 时, $f(x)$ 的最小值是 $\log_3(m + \frac{1}{m-1})$.

(Ⅲ) 当 $m \in M$ 时, 有 $m > 1, m-1 > 0$,

$$\therefore m + \frac{1}{m-1} = (m-1) + (\frac{1}{m-1}) + 1 \geq 2 + 1 = 3.$$

$$\text{故 } \log_3(m + \frac{1}{m-1}) \geq \log_3 3 = 1.$$

习题精选

★ 1. 已知函数 $f(x) = \frac{x-2}{ax-1}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则实数 a 取值为()

(A) 1. (B) -1. (C) -2. (D) 2.

2. 如果 $\log_a \frac{3}{4} < 1$, 那么()

(A) $0 < a < \frac{3}{4}$. (B) $a > \frac{3}{4}$.

(C) $\frac{3}{4} < a < 1$ 或 $a > 1$. (D) $0 < a < \frac{3}{4}$ 或 $a > 1$.

3. 关于 x 的方程 $x^2 + (2 - ki)x + 1 + 2i = 0$ 至少有一个实数根, 那么实数 $k =$ _____.

4. 三个数 $\frac{1}{a}, 1, \frac{1}{c}$ 成等差数列, 三个数 $a^2, 1, c^2$ 成等比数列, 则 $\frac{a+c}{a^2+c^2} =$ _____.

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x(x+1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

6. 有三个实数 $m, a, b (a \neq b)$, 如果在 $a^2(m-b) + m^2b$ 中, 把 a 和 b 互换, 所得的代数式值比原式的值小, 那么关系式 $a < m < b$ 是否可能成立? 请说明你的理由.

7. 已知函数 $f(x) = \log_a(x+1)$ ($a > 0, a \neq 1$).

(I) 在区间 $(-1, 0]$ 上有 $f(x) \leq 0$, 判定 $f(x)$ 的单调性;

(II) 在 (I) 的条件下, 对任意 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 求证:

$$\frac{1}{2}[f(x_1-1) + f(x_2-1)] \leq f\left(\frac{x_1+x_2-2}{2}\right).$$

8. 已知 α, β 是方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = a$ 的两个相异的实数根, 且 $0 < \alpha, \beta < \pi$, 求 $\alpha + \beta$ 的值.

9. 设函数 $f(x) = \log_a(1-x), g(x) = \log_a(1+x)$ ($a > 0, a \neq 1$). 关于 x 的方程 $a^{g(-x^2+x+1)} = a^{f(m)} - x$ 有两个不相等实根, 试求实数 m 的取值范围.

10. 已知椭圆的一个顶点为 $A(0, -1)$, 焦点在 x 轴上, 且右焦点到直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 的距离为 3, 试问: 能否找到一条斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l , 使 l 与已知椭圆交于不同的两点 M 和 N , 且满足 $|AM| = |AN|$.

11. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 成等差数列, 公差为 θ , $\sin \alpha_1, \sin \alpha_2, \sin \alpha_3$ 成等比数列, 公比为 q , 设 $z = 2q[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]$, 求 $\omega = z + \frac{1}{z}$ 的轨迹方程.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项为

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \left(\cos \frac{n-1}{6}\pi + i \sin \frac{n-1}{6}\pi\right) (n \in \mathbb{N}).$$

(I) 求证: $\{a_n\}$ 成等比数列;

(II) 将 $\{a_n\}$ 的各项与平面上的点对应, 问从第几项开始, 以后所有各项对应的点都落在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ 的内部;

(III) 将数列 $\{a_n\}$ 中的实数项, 按原来顺序排成一个新数列 $b_1, b_2, \dots$, 求通项公式 b_n ;

(IV) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

答案·提示

1. D. $f^{-1}(x) = f(x)$.

2. D. 若 $0 < a < 1$, 则 $a < \frac{3}{4}$; 若 $a > 1$, 则 $a > \frac{3}{4}$.

3. -2. 令 $x = t$ 为其实根, 由复数相等的定义得 $t^2 + 2t + 1 = 0$ 且 $2 - kt = 0$.

4. 1 或 $-\frac{1}{3}$. 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 2, a^2 c^2 = 1$, 可得.

5. $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$. $x > 0$ 时, $-x < 0$,
 $-f(x) = f(-x) = -2x(-x+1)$, 且 $f(0) = 0$.

6. 不成立. 由 $a^2(m-b) + m^2b > b^2(m-a) + m^2a$,
得 $(a-b)m^2 + (b^2 - a^2)m + ab(a-b) < 0$. 若 $a < m < b$,
则 $b > a$, 不等式解为 $m < a$ 或 $m > b$, 与条件矛盾.

7. (I) $a > 1$, $f(x)$ 是增函数; (II) 由 $2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2$, 得
 $\log_a \sqrt{x_1 x_2} \leq \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$.

8. $\frac{\pi}{3}$. $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \beta = a, \sin \beta + \sqrt{3} \cos \beta = a$, 相减, 可得
 $2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2\sqrt{3} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$, 由 $\alpha \neq \beta$,
得 $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. $-2 < m < -1$. 将原方程转化为 $m = (x-1)^2 - 2$
($-1 < x < 2, m < 1$). 画图可得.

10. $-1 < k < 1$ 且 $k \neq 0$ 时, 直线存在; $k \leq -1$ 或 $k \geq 1$
时, 直线不存在. 将 $y = kx + b$ 代入椭圆方程 $x^2 + 3y^2 = 3$,
得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kbx + 3b^2 - 3 = 0$. 由 $|AM| = |AN|$, 得 PA

$\perp l$ (P 为 MN 的中点), 从而 $2b = 3k^2 + 1$. 又由 $\Delta > 0$, 得 $b^2 < 3k^2 + 1$.

11. $\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 1$. 由 $\sin^2 \alpha_2 = \sin(\alpha_2 - \theta)\sin(\alpha_2 + \theta) = \sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \theta$, 得 $\sin \theta = 0$, 从而 $q = \pm 1$.

12. (I) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} i$; (II) $n = 6$; (III) $b_n = (-\frac{1}{8})^{n-1}$; (IV) $\frac{8}{9}$.