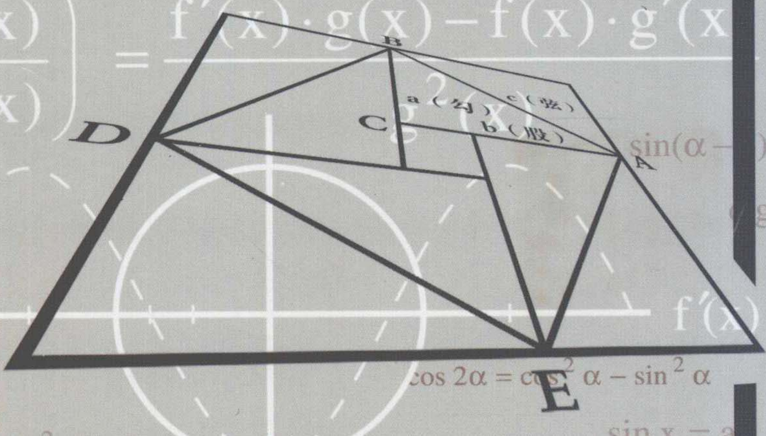
数学史选讲

Shuxueshi



江西科技师范学院教材出版基金资助

数学史选讲

Shuxueshi Xuanjiang

王亚辉 编

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书包括绪论、数与形的概念的发展、中国古代数学的辉煌成就、数学思想方法的几次重大转折、数学悖论与数学危机、近代数学史上的几个重大事件、20 世纪数学发展概观和数学与社会等内容。书中还融入了数学文化的教育。

本书可作为数学与应用数学专业(师范类)相应课程教材,也可作为普通高等院校素质教育选修课教材及在职教师继续教育相应课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学史选讲/王亚辉编. —合肥:中国科学技术大学出版社,2011.1
ISBN 978-7-312-02756-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学史—世界—师范大学—教材　Ⅳ.O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 221681 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　11.25
字数　220 千
版次　2011 年 1 月第 1 版
印次　2011 年 1 月第 1 次印刷
定价　22.00 元

前　言

“数学史”课程是根据专业培养目标为数学与应用数学专业(师范类)四年制本科生开设的,属于数学教育专业的专业课程。

“数学史”课程向学生提供理解数学学科自身发展及其文化价值的主要素材。“数学史”课程对培养数学专业(师范类)学生是非常重要的,也是专业素质培养的重要方面。作者认为教材内容应结合有关数学史料和数学发展史上的一些重大问题的解决,向学生介绍数学概念、数学方法和数学思想的起源与发展,及其与社会政治、经济和文化的联系。

通过多年的教学实践以及学生对课程的反馈意见,作者认为“数学史”课程对学生理解数学在人类文明发展中的作用,逐步形成正确的数学观和数学价值观;对学生深刻理解数学文化的实质,并在一定程度上了解数学家对数学发展所付出的艰辛劳动,体会数学的活力;对培养学生对数学的兴趣及研究能力,提高学生的数学素质,均有着重要意义。

本书是“数学史”课程的教材,是作者根据在长期教学和科研实践中积累的对数学史、数学文化研究的经验和体会,在作者授课讲义的基础上编写的。在编写的过程中,作者力求教材符合培养目标,使教材突出师范性的特点,反映国内外在数学史研究上的最新成果,体现数学史研究与数学文化、数学哲学研究互相结合的重要特点。

在编写本书的过程中,参阅并引用了许多文献资料,在此对本书参阅及引用的有关文献资料的作者表示崇高的敬意。本书的出版获得江西科技师范学院教材出版基金资助,并得到了学校、学院领导及同行的大力支持,在此向他们表示衷心感谢。

在编写本书的过程中,虽力求完善,但鉴于作者的水平和能力,教材中难免会有缺点和错误,恳请同行和读者批评赐教。

王亚辉

2010 年 8 月

目　　录

第1章　绪　　论

数学史是研究数学学科发生、发展及其规律的科学，简单地说就是研究数学的历史的科学。它不仅探索数学内容、思想和方法的演变、发展过程，而且还探索影响这种过程的各种因素，以及历史上数学学科的发展对人类文明所带来的影响。

从远古屈指计数到现代高速电子计算机的发明，从量地测天到抽象严密的公理化体系，在五千余年的数学历史长河中，重大数学思想的诞生与发展，确实构成了科学史上最富有理性魅力的题材之一。

当然，仅仅具有魅力并不能成为开设一门课程的充分理由。数学史无论对于深刻认识作为科学的数学本身，还是全面了解整个人类文明的发展都具有重要意义。

1.1　数学史的意义

1.1.1　数学史的科学意义

每一门科学都有其发展的历史，作为历史上的科学，既有其历史性又有其现实性。其现实性首先表现在科学概念与方法的延续性方面，今日的科学研究在某种程度上是对历史上科学传统的深化与发展，或者是对历史上科学难题的解决，因此我们无法割裂科学现实与科学史之间的联系。

数学科学具有悠久的历史，与自然科学相比，数学是一门历史性或者积累性很强的科学。重大的数学理论总是在继承和发展原有的理论的基础上建立起来的，它们不仅不会推翻原有的理论，而且总是包容原先的理论。例如，古代文明中形成的十进位值制记数法和四则运算法则，我们今天仍在使用；哥德巴赫猜想等历史上的难题，长期以来一直是现代数论领域中的研究热点。数学传统与数学史材料可以在现实的数学研究中获得发展。国内外许多著名的数学大师都具有深厚的数学

史修养或者兼及数学史研究，并善于从历史素材中汲取养分，做到古为今用，推陈出新。我国著名数学家吴文俊先生早年在拓扑学研究领域取得杰出成就，20 世纪 70 年代开始研究中国数学史，在中国数学史研究的理论和方法方面开创了新的局面，特别是在中国传统数学机械化思想的启发下，建立了被誉为“吴方法”的关于几何定理机器证明的数学机械化方法，他的工作不愧为古为今用，振兴民族文化的典范。

科学史的现实性还表现在为我们今日的科学研究提供经验教训和历史借鉴，使我们明确科学研究的方向，少走弯路，为当今科技发展决策的制定提供依据。多了解一些数学史知识，也不会出现诸如解决三等分角作图的荒唐事，避免我们在这样的问题上白费时间和精力。同时，总结数学发展史上的经验教训，对当今数学发展不无益处。

因此，可以说不了解数学史就不可能全面了解数学科学。在这方面，凡是有真知灼见的数学家都有切身体会。例如莱布尼兹指出：“知道重大发明，特别是那些绝非偶然的、经过深思熟虑而得到的重大发明的真正起源是很有益的。这不仅在于历史可以给每一个发明者以应有的评价，从而鼓舞其他人去争取同样的荣誉，而且还在于通过一些光辉的范例可以促进发现的艺术，揭示发现的方法。”庞加莱认为：“如果我们希望预知数学的将来，适当的途径是研究这门学科的历史和现状。”威尔也说过：“除了天文学以外，数学是所有学科中最古老的一门科学，如果不去追溯古希腊以来各个时代所发现与发展起来的概念、方法和结果，我们就不能理解前 50 年数学的目标，也不能理解它的成就。”

1.1.2 数学史的文化意义

美国数学史学家 M·克莱因曾经说过：“一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。这种关系在我们这个时代尤为明显。”“数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说。”

数学已经广泛地影响着人类的生活和思想，是形成现代文化的主要力量。因而数学史是从一个侧面反映的人类文化史，又是人类文明史的重要组成部分。许多历史学家通过数学这面镜子，了解古代其他主要文化的特征与价值取向。著名数学家和哲学家怀特黑德在批评以往的思想史学家们忽视数学的地位时，曾打了一个比喻来说明数学是人类思想史的要素之一。他说：“假如有人说：编著一部思想史而不深入研究每一个时代的数学概念，就等于在《哈姆雷特》这一剧本中去掉

了哈姆雷特这一角色。这种说法也许太过分了，我不愿意说得这样过火。但这样做却肯定地等于是把奥菲莉这一角色去掉了。奥菲莉对整个剧情来说，是非常重要的。”

数学史在整个人类文明史上的这种特殊地位，是由数学作为一种文化的特点决定的。

首先，数学以抽象的形式，追求高度精确、可靠的知识。

抽象并非数学独有的特性，但数学的抽象却是最为典型的。数学的抽象在数与形等原始概念的形成中已经体现出来，并且经过一系列阶段而达到了远远超过其他知识领域的程度。数学的抽象舍弃了事物的其他一切方面而仅保留某种关系或结构；同时，不仅数学的概念是抽象的，而且数学的方法也是抽象的。从古希腊时代起，数学就使用一种特有的逻辑推理规则，来得出确定无疑的结论。这种推理方法具有这样的严密性，对于每个懂得它的人来说都是无可争辩的。这种推理模式赋予数学其他科学不能比拟的精确性，成为人类思维的一种典范，并日益渗透到其他知识领域，这是数学影响人类文化的突出方面之一。

与抽象性相联系的数学的另一个特点是在对宇宙世界和人类社会的探索中追求最大限度的一般性模式，特别是一般性算法的倾向。这种倾向在数学的早期发展中已表现出来。正是这种追求一般性模式的倾向，使数学具有了广泛的适用性。同一组偏微分方程，在流体力学中用来描写流体动态；在弹性力学中用来描写振动过程；在声学中用来描写声音传播……还没有哪一门科学在广泛应用上能与数学相比。数学越来越成为一种普遍的科学语言与工具，在推动其他科学和整个文化的进步方面起着不可替代的巨大作用。

最后，数学作为一种创造性活动，还具有艺术的特征，这就是对美的追求。英国数学家和哲学家罗素说过：“数学不仅拥有真理，而且拥有至高无上的美——一种冷峻严肃的美，就像一尊雕塑。……这种美没有绘画或音乐那样华丽的装饰，它可以纯洁到崇高的程度，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的完美境界。”罗素说到的是一种形式高度抽象的美，即逻辑形式与结构的完美。此外数学创造过程中想像与直觉的运用也提供了数学美的源泉。这种以简洁与形式完美为目标的追求，是数学影响人类文化的又一个重要因素。古代希腊形式完美的演绎数学与这个时代的理性化的哲学与理想化的雕刻交相辉映，这并不是偶然的。

因此，我们可以说：不了解数学史，就不可能全面了解整个人类文明史。

1.1.3 数学史的教育意义

数学作为一种文化，是教育的重要内容。从某种意义上说，数学教育就是数学

文化教育。数学文化教育应是一种重视数学教育中的数学文化教育功能的教育。所谓文化教育功能，是指不仅具有使学生形成和发展数学品质的数学素质功能，而且具有使学生提高社会文化素养和科学素养的文化素质功能。形成和发展数学品质是指：掌握基本数学知识和运用这些知识的技能、技巧，培养数学三大能力——运算能力、逻辑思维能力和空间想像能力，培养数学发现能力。提高社会文化素养是指：提高辩证逻辑和论证能力，熟悉中外数学史，提高数学审美能力。具备一般科学素养是指：具备数学常识、合情推理的能力以及运用数学知识解决实际问题的能力。

在现代社会中，数学教育的目的应包括：作为其他学科学习的工具、基础；用数学解决实际问题；发展人的智慧。这些包括运算能力和空间想像能力的培养，逻辑思维的训练，创造性思维的训练，非智力因素的发展和科学文化素养的培养等。

当我们学习过数学史后，自然会有这样的感觉：数学的发展并不合逻辑，或者说，数学发展的实际情况与我们所学的数学教科书很不一致。当今作为学校教育课程的数学内容基本上属于 17 世纪微积分学以前的初等数学知识及 17、18 世纪所形成的高等数学。这些数学教材业已经过千锤百炼，是在科学性与教育要求相结合的原则下编写的，是将历史上的数学材料按照一定的逻辑结构和学习要求加以取舍编纂的知识体系，这样就必然舍弃了许多数学概念和方法形成的实际背景、知识背景、演化历程以及导致其演化的各种因素。因此仅凭数学教材学习，难以获得数学的原貌和全景，同时忽视了那些被历史淘汰掉的但对现实科学或许有用的数学材料与方法，而弥补这方面不足的最好途径就是数学史的学习。

通过数学史的学习，能使学生体会到数学的价值，认识数学的本质。早在 1876 年丹麦著名数学家和数学史家 H. G. Zeuthen 就强调："通过数学史的学习，学生不仅获得了一种历史感，而且，通过从新的角度看数学学科，他们将对数学产生更敏锐的理解力和鉴赏力。"介绍必要的数学史知识可以使学生在平时的学习中对所学问题的背景产生更加深入的理解，认识到数学是人类在特定历史时期所创造的，而不是历来就有的、永恒不变的；数学与其他学科、数学与社会有着广泛联系，甚至是很多学科的基础和生长点，对人类文明的发展起着巨大的作用。这样能拓展学生对数学本质的认识，从而形成正确的数学观念，学会数学地认识世界。

通过数学史的学习，有利于培养学生正确的数学思维方式。在数学的教学与学习的过程中存在着这样一个矛盾：一方面，教育者为了让学生更快更好地掌握数学知识，将知识系统化；另一方面，系统化的知识无法让学生了解到知识大都是经

过问题、猜想、论证、检验、完善，一步一步成熟起来的，影响了学生正确数学思维方式的形成。而数学史的学习有利于缓解这个矛盾。通过有关的数学历史，可让学生在学习系统的数学知识的同时，对数学知识的产生过程，有一个比较清晰的认识，从而培养学生正确的数学思维方式。例如，通过一些数学概念的发展史，可以使学生了解数学概念是怎样发展的，有助于学生对数学概念、方法和原理的理解与认识的深化。

通过数学史的学习，有利于培养学生对数学的兴趣，激发学习数学的动机；有利于培养学生坚强的意志品质和实事求是的态度以及创新精神。例如，历史上的数学名题，往往有生动的文化背景，容易引起学生的兴趣；一些中外著名数学家的生平、轶事以及他们探索研究问题的艰辛历程，有利于培养学生的良好的意志品质、实事求是的科学态度以及创新精神；我国古今数学的显著成就，也是激发爱国之心和报国之志的很好素材。

1.2 什么是数学——对数学本质的认识

作为一个现代人，不知道“数学”的人恐怕不多，但能将数学是什么解释得很清楚的人恐怕也不是很多。其实，即使作为专业的数学工作者，由于各自的认识与经历不同，对数学是什么的回答也会有相当大的差异。

数学本身是一个历史的概念，实际上，人们对数学本质特征的认识是随数学的发展而不断变化和深化的。我们应当以历史的眼光来分析，从数学的来源、存在方式、抽象水平及数学研究的结果等方面来看数学的本质特征。

公元前6世纪前，数学是关于“数”的研究。这一时期在古代埃及、古代巴比伦、古代印度与古代中国等地区发展起来的数学，主要是计数、初等算术与算法，几何学则可以看作是应用算术。

从公元前6世纪开始，希腊数学的兴起，突出了对“形”的研究，数学成为关于数与形的研究。从那时起直到17世纪，数学的对象没有本质的变化。

公元前4世纪的希腊哲学家亚里士多德将数学定义为“数学是量的科学”。其中“量”的涵义是模糊的，显然不能单纯地理解为“数量”。

在这一历史时期，由于数学源于分配物品、计算时间、丈量土地和测量容积等实践，因而数学对象与客观实在是非常接近的，人们能够很容易地找到数学概念的现实原型，这样，人们自然地认为数学是一种经验科学。

在17世纪，像笛卡儿这样的数学家与哲学家对数学的看法有微妙的变化，笛

卡儿认为:“凡是以研究顺序和度量为目的的科学都与数学有关。”

在笛卡儿的时代,数学发生了重大的转折。在17、18世纪,数学家关注的焦点是运动与变化。牛顿与莱布尼兹创立的微积分本质上是运动与变化的科学,它使科学家们能够从数学上研究行星运动、机械运动、流体运动、动植物生长等。因此,在牛顿与莱布尼兹以后,数学成为研究数、形以及运动与变化的学问。

当然,运动与变化的数学描述仍然离不开数与形。因此在19世纪恩格斯还是这样来论述数学的本质:“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系。”根据恩格斯的论述,数学可以定义为:数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学。

然而就在恩格斯的时代,数学又开始发生本质的变化。19世纪的数学家对数学本身的兴趣空前地增长。也就是说,除了现实世界的材料,他们更多地关注数学内部的需要。像抽象代数、非欧几何以及严格化的分析都是这类内部需要的产物。因此,从19世纪特别是后期开始,数学成为研究数与形、运动与变化以及数学自身的学问。

这种以数学自身为研究目的的倾向,也就是现代意义下纯数学的倾向,促使人们对数学的本质进行新的思考。在19世纪晚期,集合论的创始人康托尔曾经提出:“数学是绝对自由发展的学科,它只服从明显的思维。就是说它的概念必须摆脱自相矛盾,并且必须通过定义而确定地、有次序地与先前已经建立和存在的概念相联系。”

罗素也在20世纪初对数学下了这样一个定义:“纯粹数学完全由这样一类论断组成,假定某个命题对某些事物成立,则可推出另外某个命题对同样这些事物也成立。这里既不管第一个命题是否确实成立,也不管使命题成立的那些事物究竟是什么……只要我们的假定是关于一般的事物的,而不是某些特殊的事物的,那么我们的推理就构成数学。这样,数学就可以定义为这样一门学科,我们永远不知道其中所说的是什么,也不知道所说的内容是否正确。”

罗素的说法从极端的角度强调了数学的自身需要与逻辑方面,它尽管很有名,但却很难被接受为数学的客观定义。

随着数学研究的深入,非欧几何、抽象代数和集合论等的产生,特别是现代数学向抽象、多元、高维发展,人们的注意力集中在这些抽象对象上,数学与现实之间的距离越来越远,而且数学证明在数学研究中占据了重要地位,因此,出现了认为数学是人类思维的自由创造物,是研究量的关系的科学,是研究抽象结构的理论,是关于模式的学问等观点。这些认识,既反映了人们对数学理解的深化,也是人们从不同侧面对数学进行认识的结果。

在20世纪50年代,前苏联一批有影响的数学家试图修正前面提到的恩格斯

的定义来概括现代数学发展的特征:“现代数学就是各种量之间的可能的,一般说是变化着的量的关系和相互联系的数学。”这一定义不再区分“数”与“形”,可以说又回到了亚里士多德对数学的最早定义中所使用过的“量”,但这个量,却被赋予了丰富的现代涵义:它不仅包括现代世界的各种空间形式与数量关系,而且包括了一切可能的空间形式与数量关系(如几何学中的高维空间、无穷维空间,代数中的群、域,分析中的泛函、算子等)。

从20世纪80年代开始,又出现了对数学的定义作符合时代的修正的新尝试。主要是一批美国学者,将数学定义为关于“模式”的科学:“这个领域已被称作模式的科学,其目的是揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性。”

这一定义实际上是用“模式”代替了“量”,而所谓的“模式”有着极广泛的内涵,包括了数的模式,形的模式,运动与变化的模式,推理与通信的模式,行为的模式……这些模式可以是现实的,也可以是想像的;可以是定量的,也可以是定性的。数学的这一新定义,以其高度的概括性,日益引起关注并获得大多数数学家的认同与接受。

综上所述,对数学本质特征的认识是发展的、变化的。用历史的、发展的观点来看待数学的本质特征,恩格斯的“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”的论断并不过时,对初等数学来说更是如此,当然,对“空间形式和数量关系”的内涵,我们应当作适当地拓展和深化。

数学发展的源泉或数学发展的动力是什么?这一问题也能使我们清楚地认识数学本质特征。综上所述,数学既可以来自现实世界的直接抽象,也可以来自人类思维的能动创造。著名数学家冯·诺伊曼就认为,数学兼有经验科学和演绎科学两种特性。

数学的经验性是从应用的角度来看待数学的。把数学理论作为一种解决实践中提出的数学问题的工具,工具在实践中可以不断改进,甚至发明新的工具。数学家们在解决数学问题时,遵循“现实(生产、生活和社会中的)问题→建立数学模型→求解模型→验证模型的解”这样的思路进行。当社会还不发达,这样的现实问题还不多时,解决问题的工具也就不需要太多,因而,数学在其早期发展是非常慢的。这在古代中国的数学发展中表现得尤其充分,一部《九章算术》可以管一千多年。随着社会的进步、科学技术的发展,现实的问题越来越多、越来越复杂,对解决这些问题的工具的要求也越来越高,出现了大量新的数学概念、规则和理论问题,从而产生了许多新的数学分支和数学理论。

新的数学概念和规则之间的联系和区别是什么?要解决这类问题,就必须对数学内部的关系进行研究。从而使数学研究的主要对象从现实问题悄悄转向了数

学内部，它们不再依赖于具体的现实，而是从理论上进行抽象地演绎推导。数学主要研究对象和方法的转变，促进了数学的发展，产生出新的数学概念和数学理论。这些数学理论有些可以很快用于解决实际问题，有的则未必。但这并不能否认它作为数学的存在。数学主要研究对象的变化，导致数学源泉的变化，从现实问题转向了数学内部。这一转变可看成是数学的主要源泉或动力由外部的现实问题转向了数学内部的矛盾运动。

第 2 章　数与形的概念的发展

数与形是数学中两个最基本的概念。这两个概念是从现实世界的有关量的关系中直接或间接地逐步抽象出来的，而现实世界又充满着矛盾，因此，它们也必然充满着矛盾，具有深刻的辩证法。

2.1　数的概念的发展

2.1.1　自然数的产生

恩格斯指出："数学是以人的需要产生的。"数是原始人类根据生活的直接需要，在长期的实践中逐步形成的。在采集、狩猎等生产活动中首先注意到一只羊与许多羊、一头狼与整群狼的比较，就逐渐看到一只羊、一头狼、一条鱼、一棵树之间存在着某种共通的东西，即它们的单位性。同样，人们会注意到其他特定的物群，例如成双的事物，相互间也可以构成一一对应。一定物群所共有的抽象性质，就是数。数的概念的形成可能与火的使用一样古老，大约是在 30 万年以前，它对于人类文明的意义也绝不亚于火的使用。

当对数的认识变得越来越明确时，人们感到有必要以某种方式来表达事物的这一属性，于是导致了记数，而记数是伴随着计数的发展而发展的。最早可能是手指计数，一只手上的五个指头可以被现成地用来表示五个以内事物的集合。两只手上的指头合在一起，不超过 10 个元素的集合就有办法表示。正如亚里士多德早就指出的那样，今天十进制的广泛采用，只不过是我们绝大多数人生来具有 10 个手指这样一个解剖学事实的结果。因此，虽然在历史上手指计数即用 5 或 10 的计数实践比二或三的计数出现要晚，但五进制和十进制却几乎一律地取代了二进制、三进制等。当指头不敷运用时，就出现了石子记数等，以便表示同更多的集合元素的对应。但记数的石子堆很难长久保存信息，于是又有结绳记数和刻痕记数。中国古代文献《周易・系辞下》有"上古结绳而治，后世圣人，易之以书契"之说。"结

绳而治"即结绳记事或结绳记数，"书契"就是刻痕符号。

由于人类记数的需要，自然数的概念也就产生了。

2.1.2 有理数的建立

人们有了自然数的概念之后，可以解决生产和生活中的一些问题。随着人类实践的发展，认识的深化，就感到只有自然数是不够的。例如，人们在建筑房屋，制造工具和丈量土地等实践中遇到大量的测量问题。而在测量中又往往出现事先规定的单位长度不能正好量完的情况。此时，只有自然数概念就显得不够用了，便产生了分数的概念。

石器时代的人还用不到分数，但随着更先进的青铜文化的崛起，分数概念与分数记号应运而生。埃及象形文字用一种特殊记号来表示单位分数即分子为 1 的分数：在整数上方简单地画一个椭圆，就表示该整数的倒数。

单位分数的广泛使用成为埃及数学一个重要而有趣的特色。埃及人将所有的真分数都表示为一些单位分数的和。为了使这种分解过程做起来更为容易，莱茵德纸草书在阿姆士的前言之后给出了一张形如$\frac{2}{k}$(k 为从 5 到 101 的奇数)的分数分解为单位分数之和的表。其中$\frac{2}{5}$等价于$\frac{1}{3}$加$\frac{1}{15}$，$\frac{2}{11}$被写成$\frac{1}{6}$加$\frac{1}{66}$，…，最后一项是将$\frac{2}{101}$分解为$\frac{1}{101}$，$\frac{1}{202}$，$\frac{1}{303}$和$\frac{1}{606}$之和。利用这张表，可以把例如$\frac{7}{29}$这样一个分数表示成单位分数之和：

$$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$$

埃及人为什么对单位分数情有独钟，原因尚不清楚。但无论如何，利用单位分数，分数的四则运算就可以进行，尽管做起来十分麻烦。

我国古代数学名著《九章算术》中，不仅记载了分数概念，而且还系统地叙述了分数的算法，在世界数学历史上占有极其重要的地位。

"零"概念的产生，与采用十进位制记数法有着密切的关系。在使用记数法，当某一位上一个单位也没有时，由于不能用 1,2,3,…,9 等数字符号来表示，因而出现了"空位"，为表示这样的"空位"，古代人想了许多办法。印度人大约在 6 世纪时，曾用"·"表示"空位"，到了 9 世纪又将"·"改为"0"。我国在北宋之后，在用算筹计数时，就用"□"来表示"空位"，以后又改用零。这样，零的概念便形成了。

自然数、分数和零统称为算术数。人们用它可以解决一些简单的实际问题，但是随着人们认识的发展，又发现有些实际问题仅用算术数是解决不了的。比如一

些相反的量，盈利与亏损，增加与减少，前进与后退等，只有算术数是无法解决的。因此人们又引入了负数的概念。

我国大约在西汉时期就用赤筹表示正、用黑筹表示负。刘徽（约公元 225～295）在《九章算术注》中明确指出："今两算得失相反，要令正负以名之。"而古希腊数学家丢番图（Diophantus，约公元 246～330）就曾把方程的负数解说成是"荒唐的东西"而加以舍弃。12 世纪，印度数学家巴斯卡拉在解方程时求负根。但以"不合宜"为由不予承认。法国数学家韦达（F. Viete，1540～1603）也不取负根。而在实践的推动下，负数作为正数的补充，解方程时出现负根的情况，逐渐得到人们的公认。

正整数、负整数、正分数、负分数和零，统称为有理数。

2.1.3 实数的形成

在实际度量中，人们原来认为，只要单位取得充分小，总可以把两个量同时量尽。或令一个量为单位，则另一个量总可表示成两个正整数 m 与 n 之比（即某个有理量）。在几何上相当于说：对于任何两条线段，总能找到某第三线段，以它为单位线段能将给定的两线段划分为整数段，希腊人称这样两条给定线段为"可公度量"。然而毕达哥拉斯学派后来却发现：并不是任意两条线段都是可公度的，即存在着不可公度的线段，例如正方形的对角线和其一边就构成不可公度线段。这一事实的证明，最早出现在亚里士多德的著作中：根据勾股定理，若正方形对角线与其一边之比为 $\alpha:\beta$（α,β 互素），则有 $\alpha^2=2\beta^2$。这里 α^2 为偶数，则 α 也必为偶数，设 $\alpha=2\rho$，于是 $\alpha^2=4\rho^2=2\beta^2$，即 $\beta^2=2\rho^2$，β^2 为偶数，则 β 也必为偶数，这与 α,β 互素的假设相矛盾，因此正方形对角线与其一边不可公度。这一证明与我们今天证明 $\sqrt{2}$ 为无理数的方法相同，亚里士多德声明这来源于毕达哥拉斯学派。不过由于毕达哥拉斯学派有严密的教规，将一切发现归功于学派的领袖，并禁止公开学派的秘密，因此我们对毕达哥拉斯学派的介绍，很难将毕达哥拉斯本人的工作与其他成员的贡献区分开来。有关不可公度量的发现，情形也是如此。一个传说是学派成员希帕索斯（Hippasus，公元前 470 年左右）首先发现了不可公度性，当时毕氏学派正在海上泛舟集会，希帕索斯说出他的发现后，惊恐不已的其他成员将他抛进了大海（另一说希帕苏斯因泄露了不可公度量的秘密而遭厄运）。

由上面的讨论可知，某量与另一被取做单位的量之比，如果用数来表示，其结果则会出现两种情况，第一，当它们是可公度时，其结果是整数或分数，而此时分数可表示为有限小数或无限循环小数；第二，当它们是不可公度时，其结果是无限不循环小数。人们把整数，有限小数和无限循环小数称为"有理数"，而把无限不循环