

国家教育部  
规划教材

中等师范学校数学教科书(试用本)

# 几何

第一册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

The background features a large, stylized graphic. On the right side, a yellow pencil with a grey eraser and a pink eraser is positioned vertically. To its left, a large, semi-circular shape is composed of several overlapping layers in shades of blue, purple, and orange. Below the pencil, there are several overlapping circles and arcs in various colors, including blue, purple, and yellow. At the bottom, there are two rows of white dots, each row containing ten dots, arranged in a grid-like pattern. The overall design is modern and geometric, reflecting the subject of the book.

中等师范学校数学教科书

(试 用 本)

# 几 何

第 一 册

人民教育出版社于子致子室 编著

人民教育出版社

中等师范学校数学教科书

(试 用 本)

几 何

第 一 册

人民教育出版社中学数学室 编著

\*

人民教育出版社出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编: 100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

大厂益利印刷厂印装 全国新华书店经销

\*

开本: 787 毫米×1 092 毫米 1/16 印张: 10.5 字数: 120 000

1998 年 12 月第 1 版 2002 年 3 月第 4 次印刷

印数: 389 001~474 000

ISBN 7-107-12724-1 定价: 9.00 元  
G · 5834

著作权所有·请勿擅自用本书制作各类出版物·违者必究

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版社联系调换。

(联系地址: 北京市东城区东直门内大街 16 号楼 邮编: 100078)

主 编 方明一  
编 写 者 黄卓廷 高存明 孙 圻  
责任编辑 高存明 李海东

# 说 明

中等师范学校数学教科书(试用本)是受国家教委委托,根据国家教育委员会 1992 年制定的《三年制中等师范学校数学教学大纲(试行)》编写的必修教材。

这套数学教科书共分六册,包括《代数与初等函数》第一、二册,《几何》第一、二册,《小学数学教材教法》第一、二册。

各地在使用这套教科书时,可以根据具体情况,参照下表开设数学科目和安排时间:

学 年	周课时数	科 目
一年级	3	代数与初等函数第一册
	2	几何第一册
二年级	3	代数与初等函数第二册
	2	几何第二册
三年级	3	小学数学教材教法第一、二册

本书是中等师范学校数学教科书(试用本)《几何》第一册,内容包括数学中的逻辑初步知识、直线和平面、多面体和旋转体。供三年制中等师范学校数学课一年级全学年使用。

本书由我室组织编写。初稿完成后,曾在安徽省芜湖师范学校开会对书稿进行了审查。由于时间仓促,书中难免有错误和疏漏,欢迎广大教师和其他读者批评指正。

人民教育出版社中学数学室

1993 年 12 月

## 第二版说明

本版是在1993年12月第一版的基础上修订而成的。修订主要包括两个方面：

1. 按照国家技术监督局颁发的《量和单位》国家标准 GB3100~3102—93, 规范使用了有关的单位和符号；

2. 为了与九年义务教育全日制初级中学《数学教学大纲(试用)》(1995年6月第2版)的内容相衔接, 对部分章节做了补充和调整, 并根据教师使用中的意见, 对个别地方的不足进行了修订。

参加此次修订的有田载今、高存明、李海东, 责任编辑是高存明、李海东。

人民教育出版社中学数学室

1998年12月

## 前 言

几何学是一门源远流长的数学学科,远在古代人们通过观察、实验就得到许多图形的性质.例如,我国在商朝就发现了勾股定理和一些简易测量知识.当人们整理已有的几何知识时发现,一些图形的性质可以从另一些图形的基本性质推导出来.于是,人们经过一段时间的努力把几何知识整理成一个逻辑推理体系,并使用逻辑推理的方法研究几何学,使几何学的研究取得更加丰硕的成果.在初中,我们就是通过逻辑推理的方法学习几何学的,在中师,我们要把研究的范围从平面扩展到空间,继续使用逻辑推理的方法学习立体几何学,把在平面几何中学到的平行、夹角、垂直、相似、对称等概念推广到空间,学习各种立体图形的性质以及面积和体积的度量.

由于逻辑推理是学习立体几何和其他数学课程的主要方法,所以同学们在初中学习数学的基础上,需要进一步了解逻辑推理的基本规则.为此,本书首先学习逻辑知识初步,为学好立体几何打下基础.

# 目 录

前 言	
第一章 数学中的逻辑初步知识 .....	(1)
一 概念 .....	(1)
二 命题 .....	(11)
三 推理和证明 .....	(18)
※四 逻辑思维的基本规律 .....	(30)
第二章 直线和平面 .....	(38)
一 平面的基本性质 .....	(38)
二 空间的两条直线 .....	(43)
三 空间的直线和平面 .....	(51)
四 空间的两个平面 .....	(70)
第三章 多面体和旋转体 .....	(89)
一 多面体及其表面积 .....	(89)
二 旋转体及其表面积 .....	(116)
三 多面体和旋转体的体积 .....	(135)



# 第一章 数学中的逻辑初步知识

本章所讲的数学中的逻辑<sup>①</sup>知识,是普通逻辑的初步知识.普通逻辑是研究思维形式及其规律的科学.掌握一定的逻辑知识,不仅是学习数学和各门学科所必须的,而且对于我们正确认识世界,表达思想和从事工作,都是不可少的.

在这一章里,我们主要结合初中以及小学的数学知识讲述普通逻辑的三种思维形式:概念、判断、推理,并对逻辑思维的基本规律——同一律、矛盾律、排中律作初步的介绍.通过这一章的学习,能加深我们对已经学过的数学概念、定义、命题、推理、证明等的理解,帮助我们更好地学习和掌握新的数学知识,发展逻辑思维能力.

## 一 概 念

### 1.1 属性与概念

在客观世界中,有许许多多的事物,每个事物都有各种各样的性质,并且与其他事物有一定的关系,我们把事物的性质以及它与其他事物的关系,叫做这个事物的属性.例如,角有许多属性:由有公共端点的两条射线组成,有各种不同的位置,可以比较大小等.事物由于属性的相同或相异形成了不同的类,具有相同属性的事物组成一类.在一类事物的属性中,有些

<sup>①</sup> 逻辑一词的希腊文原意是“思想”、“语词”、“理性”、“规律”等,英语译为“Logic”.清末严复将其汉译为“逻辑”.当前,逻辑学主要有普通逻辑、数理逻辑和辩证逻辑等分支学科.

是本质属性. 本质属性, 就是该类事物都具有而别的事物都不具有的属性. 如“由有公共端点的两条射线组成”是角的本质属性, 根据这个属性可以把角同其他图形区别开来. 又如, 能被 2 整除的整数, 是“偶数”的本质属性.

概念是人们对事物的感性认识的基础上, 经过分析、比较、综合、抽象和概括等一系列思维活动, 将本质属性集中起来而形成的. 例如, 人们对圆的认识, 从对太阳、满月等物体的感觉、知觉形成了圆的观念(表象), 又在制作圆形工具或器皿等活动中, 逐步认识圆的本质属性, 知道“圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合”, 这才形成了圆的概念. 这种理性的认识, 是人们进行思维活动的一种表现形态. 所以说, 概念是反映客观事物本质属性的思维形式.

数学概念是客观世界的数量关系和空间形式在人们头脑中的反映, 是数学学科中构成判断、推理等思维形式的要素. 从这个意义上说, 明确数学概念是科学地掌握数学知识的前提.

## 1.2

### 概念的内涵与外延

**概念的内涵**, 就是概念所反映的事物的本质属性的总和. 例如, 平行四边形的本质属性有: 是四边形, 对边平行且相等, 对角相等, 对角线互相平分等等. 所有这些本质属性的总和, 就是平行四边形这个概念的内涵. 又如, 质数的内涵是: 大于 1 的自然数, 只有 1 和它本身这两个约数.

概念既然是反映事物的本质属性的思维形式, 因此任何一个概念在反映事物的本质属性的同时, 也反映了具有这些本质属性的事物, 这就是概念的外延.

**概念的外延**, 就是具有概念所反映的本质属性的事物的集合. 例如, 平行四边形的外延是一切两组对

边分别平行的四边形,包括正方形、菱形、矩形以及其他各种两组对边分别平行的四边形.又如,质数的外延是 $2, 3, 5, 7, \dots$ 等自然数.

概念的内涵与外延是互相制约的.概念的内涵确定了,概念的外延也将跟着确定;反之,概念的外延确定了,概念的内涵也将跟着确定.

以三角形和等腰三角形来比较,从内涵上看,等腰三角形除具有三角形的本质属性外,还具有两边相等,两底角相等以及其他的本质属性;从外延上看,三角形的外延除了包含等腰三角形的外延,还包含不等边三角形的外延.

一般地,如果概念 $A$ 的内涵比概念 $B$ 的内涵多,那么 $A$ 的外延就比 $B$ 的外延小;反之,如果 $A$ 的内涵比 $B$ 的内涵少,那么 $A$ 的外延就比 $B$ 的外延大.这个关系叫做概念的内涵与外延之间的反变关系.

根据概念的内涵与外延之间的反变关系,我们可以用逐渐扩大概念的内涵的方法,逐渐缩小概念的外延,这种方法叫做**概念的限制**.我们也可以用逐渐缩小概念的内涵的方法,逐渐扩大概念的外延,这种方法叫做**概念的概括**.例如,如果在菱形这个概念的内涵里增加“有一个角是直角”这个属性,那么菱形的外延就缩小为正方形的外延,这就是概念的限制;如果在菱形的内涵里减少“一组邻边相等”这个属性,那么菱形的外延就扩大为平行四边形的外延,这就是概念的概括.概念的限制或概括,可以加深我们对概念以及概念之间的关系的认识,这对于我们准确地运用概念是很有帮助的.

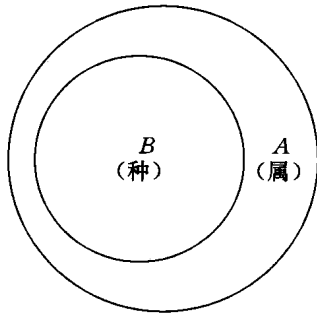
### 1.3

#### 属概念与种概念

我们知道,三角形与等腰三角形这两个概念的外延是不同的,三角形的外延包含了等腰三角形的外

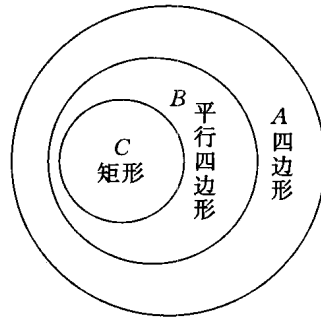
延,这时我们把三角形叫做等腰三角形的属概念,把等腰三角形叫做三角形的种概念.

一般地,如果概念  $A$  的外延包含了概念  $B$  的外延并且比它大,我们就把  $A$  叫做  $B$  的属概念(简称属),并且把  $B$  叫做  $A$  的种概念(简称种).图 1-1 表示了属概念  $A$  与种概念  $B$  的外延之间的关系.



$A \supset B$

图 1-1



$A \supset B \supset C$

图 1-2

假如我们把三角形这个概念的外延分成两部分:等腰三角形与不等边三角形,那么这两个概念都是三角形的种概念.其中“等腰三角形”不同于不等边三角形的属性是:有两条边相等.这是等腰三角形这个概念有别于其他三角形的属性.我们把它叫做种差.

属概念与种概念是相对的.一个概念是属概念还是种概念,要看这个概念是对于哪个概念来说的.例如,平行四边形,对于四边形来说,它是种概念;对于矩形来说,它又是属概念(图 1-2).又如,自然数对于质数来说,是属概念;自然数对于整数来说,又是种概念.可见,单独一个概念不存在属与种的问题.另外,属与种只存在于外延具有包含关系的两个概念之间.例如,直角三角形与等腰三角形,奇数与质数的外延之间都不是包含关系,这些概念之间的关系就不是属种关系.

属概念的外延包含它的种概念的外延,从概念的

内涵与外延的反变关系可以知道,种概念的内涵包含它的属概念的内涵.也就是说,种概念必然具有它的属概念的一切本质属性,而且还具有它自己所特有的本质属性.

## 1.4 概念的定义

在人们头脑中形成的概念,是用名词或术语表示出来的.例如,“直角”、“相似”就是表示概念的词语.为了保证大家对表示概念的词语有正确的理解,就必须明确规定这些词语的意义.因为概念是针对一定事物的,所以用确切的语言或符号,通过揭示事物本质属性或指明对象范围的方法,把概念所对应的事物表达出来,就是概念的定义.这就是说,定义是揭示概念内涵或外延的逻辑方法.

给概念下定义,通常用以下几种方式.

### 1. 属加种差的定义

根据概念的属与种之间的关系,我们在给概念下定义时,先要指出与被定义概念邻近的属概念(即被定义概念的属概念中外延最小的),再确定在这个属里它足以区别于其他种概念的本质属性(即种差).这种定义方式可用公式表示为:

被定义概念 = 邻近的属概念 + 种差.

例如,矩形的定义:

有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

在这里,“矩形”是被定义概念,“平行四边形”是与矩形邻近的属(多边形、四边形也是矩形的属,但以平行四边形的外延为最小),“有一个角是直角”是种差.这个种差,就是在平行四边形这个属里,矩形区别于其他种概念的本质属性.

下面两个定义也是这种方式的.

各边相等、各角也相等(种差)的多边形(属)叫做

正多边形(被定义概念)。

能被2整除(种差)的正整数(属)叫做正偶数(被定义概念)。

有的概念,可以有不同的定义,这是由于所选择的属概念或种差的不同而产生的。例如正方形的定义:

一组邻边相等的矩形叫做正方形;

一个角是直角的菱形叫做正方形。

在这两个定义中,前者以矩形为属概念来定义正方形,后者以菱形为属概念来定义正方形。两者从不同角度揭示了正方形的本质属性,因而都是可以的。

用属加种差方式下定义时,要注意所用属概念一般应是与被定义的概念最邻近的。例如,“有一个角是直角,并且对边分别平行的四边形是矩形”就不能作为矩形的定义。因为矩形的邻近属概念是平行四边形,而不是四边形。

## 2. 发生式定义

这是一种用描述概念的发生过程给概念下定义的方式。

例如,在平面内,一条射线由原来的位置 $OA$ ,绕着它的端点 $O$ 旋转至位置 $OB$ ,当 $OB$ 和 $OA$ 组成一条直线时,所成的角叫做平角。这个定义就是发生式定义。

用这种方式下定义,比较直观、形象,所以中小学数学教材中许多定义都采用了这种定义方式。在后面将要学习的立体几何和解析几何中,我们将会遇到许多这样定义的概念。

## 3. 外延式定义

这是一种明确指出概念外延的定义方式。

例如,整数和分数统称有理数。这个有理数的定义是通过指出有理数的外延包括整数和分数两个部分而给出的。

在中小学数学教材中,对于某些直接描述其内涵有一定难度的概念,常采用外延式定义.例如,在中学直接讲实数的内涵学生理解起来有困难(涉及到更深的知识),教材中采用了“有理数和无理数统称实数”这种外延式定义,让学生对实数所涉及的对象的范围有明确的认识.

给新概念下定义时,总是要用到已知的概念.这样追溯上去,必有一些初始概念,这些概念不能用本学科中的其他的概念来定义.例如,直角用角来定义,角用射线来定义,射线用直线来定义,而直线是什么呢?这就无法借助于另一个已知概念来定义了.因此,任何一门科学都必须选择一些不定义的概念,如自然数、点、直线、平面等等,作为对其他概念下定义的起点.这样的概念叫做**原始概念**,或称**基本概念**.基本概念的属性,在数学理论上用抽象化、公理化的方式来约定.在中小学数学中介绍这些概念,有时采用描述、解释或举例的方法.如自然数,在算术理论中有抽象化的规定(如皮亚诺公理),而在小学教材则用描述的方法.

给概念下定义,必须遵守以下几条规则:

(1) 定义应当是相称的.也就是说,定义中的文字所表达的对象的外延与被定义概念的外延必须相同.

例如,“分子比分母大的分数叫做假分数”这个定义把假分数的外延缩小了;“有公共顶点的两个角叫做对顶角”这个定义把对顶角的外延扩大了.这两个定义都是不相称的,分别犯了“定义过窄”、“定义过宽”的错误.

(2) 定义不能是循环的.也就是说,在同一科学体系中,两个概念不能互相定义.

例如,如果先把直角定义为“互相垂直的两条直线所成的角叫做直角”,然后又把互相垂直定义为“两条直线相交成直角,叫做这两条直线互相垂直”,这就

犯了循环定义的错误. 因为用互相垂直来定义直角, 同时又用直角来定义互相垂直, 这样一来, 直角与互相垂直这两个概念到底是什么, 都没有说清楚. 请同学们研究初中数学教材, 看看这两个概念各是怎样定义的.

(3) 定义一般不用否定形式. 这里指的是, 下定义一般是要说明被定义概念是什么, 而不应说它不是什么.

例如, “不是锐角三角形和钝角三角形的三角形叫做直角三角形”, “不是偶数的整数叫做奇数”, 这样的定义是不合适的. 但是在某些情况下, 事物的本质属性正是借助于否定的形式来揭示的. 如“在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线”、“不能被 2 整除的整数叫做奇数”等定义都是正确的. 这些定义实质上都是属加种差定义.

(4) 定义应当简单明确, 不能含混不清, 也不能用比喻.

定义应当在正确的基础上力求简明. 例如, 把平行四边形定义为“两组对边分别平行且相等的四边形”, 其中的对边相等这个本质属性可以从两组对边平行推出, 这样定义就不简单. 又如, 把三角形定义为“多边形中最简单的图形”, 这是含混不清的, 这样定义不明确. 采用比喻的方法, 把球定义为“像皮球那样的几何体”, 只是列举了球的表象, 没有揭示出它的本质属性, 作为定义这也是不允许的.

在这里我们要指出, 在小学数学教材中, 对一些概念没有给出明确的定义, 而是用形象描述或举例说明的方法. 这是考虑到在小学阶段学生的知识水平和接受能力所采取的处理方法. 作为教师, 应该清楚地知道这样的描述或说明并不是这些概念的确切定义.



明确一个概念,不但要明确它的内涵,同时必须明确它的外延.概念的分类就是明确概念的外延的逻辑方法.

按照某个标准,把一个概念的外延分为不同的几类,叫做概念的分类.

例如,我们可以把三角形按照最大内角的属性,分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形三类;把整数按照能否被2整除分为偶数和奇数两类.经过这样的分类,我们对三角形、整数这两个概念就可进行更细致的研究.

对同一个概念选择不同的分类标准,可以有不同的分类.比如三角形的分类,可以按角作出前面所述的分类,也可以按边分类,分为不等边三角形和等腰三角形.又如有理数可按与零的大小关系分为正有理数、负有理数和零三类;也可按分子是否可被分母整除分为整数和分数两类.

在分类的结果中,所得到的各个概念,有的还可以再分类,这样,可以得到一个概念体系.例如,三角形按边分类如下:

三角形	{	不等边三角形
		等腰三角形 {
		底边和腰不相等的等腰三角形
		等边三角形

对概念正确地分类,可以使我们在明确概念外延的过程中,弄清概念之间的联系和区别,获得系统的知识,促进逻辑思维能力的发展.

对概念进行分类,必须满足以下两条要求:

1. 分得的各个类应当互不相容.

所谓互不相容,简单地说就是“不重复”,是指各个类之间都有全异关系,即不能有一些事物既属于这