吉米多维奇

# 数学分析

## 习题集精选详解

主编：滕兴虎　郑　琴　周华任　廖洪林

（下册）

经典名著最新版本　数学名家权威解读

选题精当解析详尽　深入浅出适用面广

东南大学出版社
Southeast University Press

吉米多维奇

# 数学分析

## 习题集精选详解

【下册】

# 吉米多维奇数学分析习题集精选详解(下)

主编:滕兴虎　郑　琴
周华任　廖洪林

东南大学出版社
·南京·

## 内 容 提 要

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部影响力巨大的国际知名学术著作。我们从吉米多维奇的《数学分析习题集》中选择最具代表性的2073道题，汇编成《吉米多维奇数学分析习题集精选详解》上、下册，本书可供高等院校理工类、财经类学生学习、考研使用，也可作为相关专业教师的教学参考用书。

**图书在版编目(CIP)数据**

吉米多维奇数学分析习题集精选详解. 下/滕兴虎，郑琴，周华任，廖洪林主编. —南京：东南大学出版社，2011.6

ISBN 978-7-5641-2705-3

Ⅰ.①吉… Ⅱ.①滕… ②郑… ③周… ④廖… Ⅲ.①数学分析—题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第053271号

**吉米多维奇数学分析习题集精选详解(下)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **主　编** | 滕兴虎　郑琴　周华任　廖洪林 | **责任编辑** | 刘　坚 |
| **电　话** | (025)83793329/83362442(传真) | **电子邮件** | liu-jian@seu. edu. cn |
| **出版发行** | 东南大学出版社 | **出 版 人** | 江建中 |
| **社　址** | 南京市四牌楼2号 | **邮　编** | 210096 |
| **销售电话** | (025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真) | | |
| **网　址** | www. seupress. com | **电子邮件** | press@seupress. com |
| **经　销** | 全国各地新华书店 | **印　刷** | 南京新洲印刷有限公司 |
| **开　本** | 880mm×1230mm　1/32 | **印　张** | 20.25　**字　数**　500千 |
| **版　次** | 2011年6月第1版第1次印刷 | | |
| **书　号** | ISBN 978-7-5641-2705-3 | | |
| **定　价** | 28.00元 | | |

# 前　言

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部影响力巨大的国际知名学术著作。尤其在我国，自20世纪50年代出版以来，一直是各大专院校的必备参考书籍。

该书内容丰富，由浅入深，涉及的内容几乎囊括了高等数学《数学分析》的全部命题。但该书习题数量多（原书共4462道题），许多题目在题型和解题方法上具有相似之处。同时该书难题多，许多题目的难度超出教学要求。为了帮助广大学生更好地掌握《数学分析》的基本概念，综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们从吉米多维奇的《数学分析习题集》中选择最具代表性的2073道题，汇编成《吉米多维奇数学分析习题集精选详解》上、下册。为了便于读者查阅，本书中各题前所标的黑括号【】中数字表示该题在原书的题号。

这些习题涉及内容广、题型多，既有基础性，又有技巧性，其中基础题从多个角度帮助理解相应的基本概念和基本理论，锻炼基本解题方法；而层次较高的习题，有助于开拓解题思路，使数学的分析能力和应用能力进一步加强。

本书解题思路明了，步骤详细，过程清晰，是广大本、专科理工科同学学习高等数学的理想参考书，同时也可作为研究生入学考试的数学参考书。

本书的策划、编写、审稿等过程得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示由衷感谢。解放军理工大学的寇冰煜、毛磊、张燕、吴欧以及杨传兵、刘娟、陈兴春、董晓向、侯燕等也参加了本书的编写工作。由于我们水平有限，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

# 目录

# 第五章　级　　数

## §1. 数值级数、同号级数收敛性的判别法

**1. 一般概念**

对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{①}$$

若 $$\lim_{n\to\infty} S_n = S\text{(级数的和)}$$

存在，其中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则级数 ① 称为收敛的. 反之，级数 ① 称为发散的.

**2. 柯西准则**

级数 ① 收敛的充要条件是对于任何 $\varepsilon > 0$，都存在 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 和 $p > 0$（$n$ 和 $p$ 为正整数）时，下列不等式成立：

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon.$$

特别地，若级数 ① 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**3. 比较判别法 1**

除级数 ① 之外，设有以下级数：

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \tag{②}$$

若当 $n \geqslant n_0$ 时，不等式

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

成立，则

(1) 由级数 ② 收敛可推出级数 ① 收敛;

(2) 由级数 ① 发散可推出级数 ② 发散.

特别地,当 $n\to\infty$ 时,若 $a_n\sim b_n$,则正项级数 ① 和 ② 同时收敛或同时发散.

**4. 比较判别法 2**

设

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

则

(1) 当 $p>1$ 时,级数 ① 收敛;

(2) 当 $p\leqslant 1$ 时,级数 ① 发散.

**5. 达朗贝尔判别法**

若$a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则

(1) 当 $q<1$ 时,级数 ① 收敛;

(2) 当 $q>1$ 时,级数 ① 发散.

**6. 柯西判别法**

若 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则

(1) 当 $q<1$ 时,级数 ① 收敛;

(2) 当 $q>1$ 时,级数 ① 发散.

**7. 拉阿比判别法**

若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且

---

* 符号 $O^*$ 的意义见第 1 章第 6 节.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则

(1) 当 $p>1$ 时,级数 ① 收敛;

(2) 当 $p<1$ 时,级数 ① 发散.

**8. 高斯判别法**

若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

其中 $|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$,则

(1) 当 $\lambda>1$ 时,级数 ① 收敛;

(2) 当 $\lambda<1$ 时,级数 ① 发散;

(3) 当 $\lambda=1$ 时,若 $\mu>1$,则级数 ① 收敛,若 $\mu\leqslant1$,则级数 ① 发散.

**9. 柯西积分判别法**

若 $f(x)(x\geqslant1)$ 为非负递减连续函数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

**直接证明下列级数的收敛性并求出它们的和**(2546 ~ 2552):

**【2546】** $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots.$

**解** 由

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}},$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}.$

故该级数收敛,其和为$\dfrac{2}{3}$.

【2548】 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\cdots.$

**解** 由 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n},$

有 $2S_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}},$

于是
$$\begin{aligned}S_n&=2S_n-S_n\\&=1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\cdots+\\&\quad\left(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=0,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+2=3.$

故该级数收敛,其和为 3.

【2550】 $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

**解** 由

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

考察通项

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right),$$

有 $$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

故该级数收敛,其和为$\frac{1}{3}$.

**【2551】** (1) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots(|q|<1)$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots(|q|<1)$.

**解** 令 $z=q(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$,其中 i 为虚数单位. 而

$$z^n=q^n(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha),$$

于是有 $$\sum_{j=1}^{n}z^j=\sum_{j=1}^{n}q^j(\cos j\alpha+\mathrm{i}\sin j\alpha)=\sum_{j=1}^{n}q^j\cos j\alpha+\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}q^j\sin j\alpha.$$

令 $$S_n^{(1)}=q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha,$$
$$S_n^{(2)}=q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha,$$

有 $$\sum_{j=1}^{n}z^j=S_n^{(2)}+\mathrm{i}S_n^{(1)}.$$

而 $$\sum_{j=1}^{n}z^j=\frac{z(1-z^n)}{1-z},$$

因为 $|q|<1$,

故有 $|z|<1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0.$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n^{(2)} + \mathrm{i}S_n^{(1)}) = \dfrac{z}{1-z} = \dfrac{q\cos\alpha - q^2 + \mathrm{i}q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \dfrac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2},$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2},$$

所以 (1)、(2) 级数收敛，其和分别是 $\dfrac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$，$\dfrac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$.

**【2552】** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

**解** 由

$$\begin{aligned}&\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\\ &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})\\ &= [(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-\sqrt{1})]\\ &\quad + [(\sqrt{4}-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})]\\ &\quad + [(\sqrt{5}-\sqrt{4}) - (\sqrt{4}-\sqrt{3})] + \cdots\\ &\quad + [(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]\\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1\\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}},\end{aligned}$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$

所以该级数收敛，其和是 $1-\sqrt{2}$.

【2554】 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则把该级数的各项重新组合且改变其先后次序所得的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$也收敛并具有同样的和.反之是不正确的,举例说明,其中

$$A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i(p_1=1,p_1<p_2<\cdots).$$

**解** 记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$的前$n$项和为$T_n$,有

$$\begin{aligned}T_n&=A_1+A_2+\cdots+A_n\\&=\sum_{i=p_1}^{p_2-1}a_i+\sum_{i=p_2}^{p_3-1}a_i+\cdots+\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\\&=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1}a_i=S_{p_{n+1}-1},\end{aligned}$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛知$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}$存在,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$收敛且与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$有相同的和.

反之是不正确的.例如,级数$2-2+2-2+\cdots$发散,但$(2-2)+(2-2)+(2-2)+\cdots$收敛,所以各项重新组合后收敛,而原级数不一定收敛.

【2555】 证明:设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的各项是正值,若将该级数各项重新组合所得出的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$收敛,则该级数也收敛.

**解** 令

$$T_n=A_1+A_2+\cdots+A_n,$$

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots).$$

于是有$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$存在，所以$\{T_n\}$是有界数列. 因此，对给定的$n$，存在$p_n$，使得$S_n < T_{p_n} < M$，$M$为一常数，又$S_n$单调上升，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，故该级数也收敛.

**研究下列级数的收敛性**(2556 ～ 2664)：

**【2557】** $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

**解** 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1$，所以该级数发散.

**【2558】** $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$.

**解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

所以该级数收敛.

**【2560】** $\dfrac{1}{1001}+\dfrac{1}{2001}+\dfrac{1}{3001}+\cdots+\dfrac{1}{1000n+1}+\cdots$.

**解** 因为$\dfrac{1}{1000n+1}>\dfrac{1}{1000(n+1)}$，

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1000(n+1)}$发散，所以该级数发散.

**【2563】** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

**解** 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛，而

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$收敛.

**【2565】** 证明:等差级数各项倒数组成的级数是发散的.

**解** 设等差级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,$d$ 为公差.

当 $d>0$ 时,存在 $n_0>0$,有 $(n_0-1)d>a$,于是当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$2(n-1)d>a+(n-1)d,$$

从而

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a+(n-1)d}$发散.

当 $d=0$ 时,$a\neq 0$,此时级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a}$发散.

当 $d<0$ 时,与 $d>0$ 时级数敛散性等价,故 $d<0$ 时级数发散,因此,等差级数各项倒数的级数是发散的.

**【2566】** 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$(A) 及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$(B) 收敛,且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$(C) 也收敛. 若级数(A) 和(B) 是发散的,则级数(C) 的收敛性会怎样?

**证** 因为 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,所以

$$0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n,n=1,2,\cdots.$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛. 于是有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若级数(A) 和(B) 皆发散,则级数(C) 可能收敛,也可能发散. 例如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$均发散,但当 $c_n=0,n=1,2,\cdots$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛,当 $c_n=\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散.

**【2568】** 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也

收敛.反之不真,举例说明.

**解** 因为$a_n \geqslant 0$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.于是存在$M$,当$n > M$时,$0 \leqslant a_n < 1$,因此当$n > M$时,$0 \leqslant a_n^2 < a_n$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛.

反之不成立.例如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛.

**【2569】** 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$也收敛.

**证** 因为$0 \leqslant |a_n b_n| \leqslant \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$,而$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$,$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$收敛,于是有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$收敛.

又$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛,故有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$收敛.

因为$\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$收敛.

**【2570】** 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

**证** (1) 设$a > 0$,因为$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a$,所以存在$M > 0$,当$n > M$时,有

$$n a_n > \frac{a}{2},$$