龙门品牌 学子至爱

LongMen

龙门专题

不等式

高中数学

主　　编　傅荣强
本册主编　张　硕
　　　　　倪智慧

龍門書局
www.Longmenbooks.com

龙门专题

不等式

高中数学

主　编：傅荣强

本册主编：张　硕　倪智慧

编　者：贺民兰　刘敏杰　周喜龙
方连英　刘淑琴　孙丽荣
李贵栋　张友富　杨福祥
牛明义　梁桂珍　马清琴
李洪琴　李树枫　董志录
胡佩玉　刘恒礼　张秀芝
夏福盛　王哲

龍門書局

北　京

举报电话：(010)64030229；(010)64034315；13501151303
邮购电话：(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题：新课标．高中数学．不等式/傅荣强主编；张　硕，倪智慧本册主编．—北京：龙门书局，2010.7

ISBN 978-7-5088-2511-3

Ⅰ．①龙…　Ⅱ．①傅…②张…③倪…　Ⅲ．①数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 142231 号

责任编辑：马建丽　许冲冲　刘　婷/封面设计：耕　者

龍　門　書　局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
www.longmenbooks.com
保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2010 年 7 月第　一　版　开本：A5(890×1240)
2010 年 7 月第一次印刷　印张：5 3/4
字数：203 000

定　价：12.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

策划者语

生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

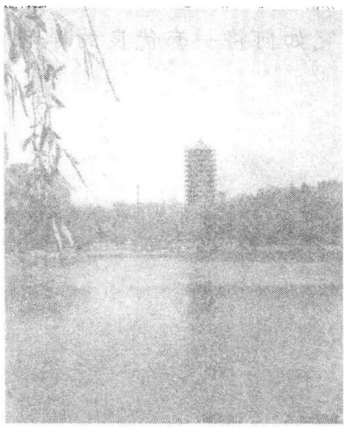
明媚的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋的是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静地坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主，还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”梦想？

在来来往往带他们巡讲的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都有一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。



小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了”。她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大

年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到39度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分684分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年6.4万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，被全球最大的软件公司MICROSOFT聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈地努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考上清华或北大吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化到图书中，让同学们在不知不觉中轻松、快速地获取高分。这就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。

《龙门专题》走向名校的阶梯！

总策划　《龙门专题》策划组

2010年8月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元
中国人民大学财政金融学院

星座：射手座
喜欢的运动：爬山 乒乓球
喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止
学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。

卢 毅 2006年浙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座
喜欢的运动：跑步 滑板
喜欢的书：《卡尔维诺文集》
人生格言：做自己
学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。

武睿颖 2005年河北省文科状元
北京大学元培学院

星座：天秤座
喜欢的运动：游泳 网球
喜欢的书：*A Thousand Splendid Suns*
人生格言：赢得时间，赢得生命
学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。

刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元
北京大学元培学院

星座：金牛座
喜欢的运动：篮球 台球 排球
喜欢的书：《三国演义》
人生格言：战斗到最后一滴血
学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。

邱 汛 2005年四川省文科状元
北京大学

星座：处女座
喜欢的运动：篮球 乒乓球
喜欢的书：《哈利·波特》
人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远
学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。

林 叶 2005年江苏省文科状元
北京大学

星座：水瓶座
喜欢的运动：跑步 台球 放风筝
喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》
人生格言：不经省察的生活不值得过
学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。

田 禾 2005年北京市理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座
喜欢的运动：羽毛球
喜欢的书：历史类书籍
人生格言：认真、坚持
学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。

朱师达 2005年湖北省理科状元
北京大学元培学院

星座：水瓶座
喜欢的运动：足球 篮球 游泳
喜欢的书：《追风筝的人》《史记》
人生格言：有梦想就有可能，有希望
就不要放弃
学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。

编委会

Contents

目录

基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简单地说它是研究“数”和“形”的学科. 代数是它的侧重研究运算方法的一个分支. 不等式是代数的一个节点，它的本质是研究“数量关系”中的“不等关系”，落脚点是符号“$>$、$<$、$\neq$”.

本书研究的基本问题有三大类：

(1)不等关系与不等式；

(2)基本不等式；

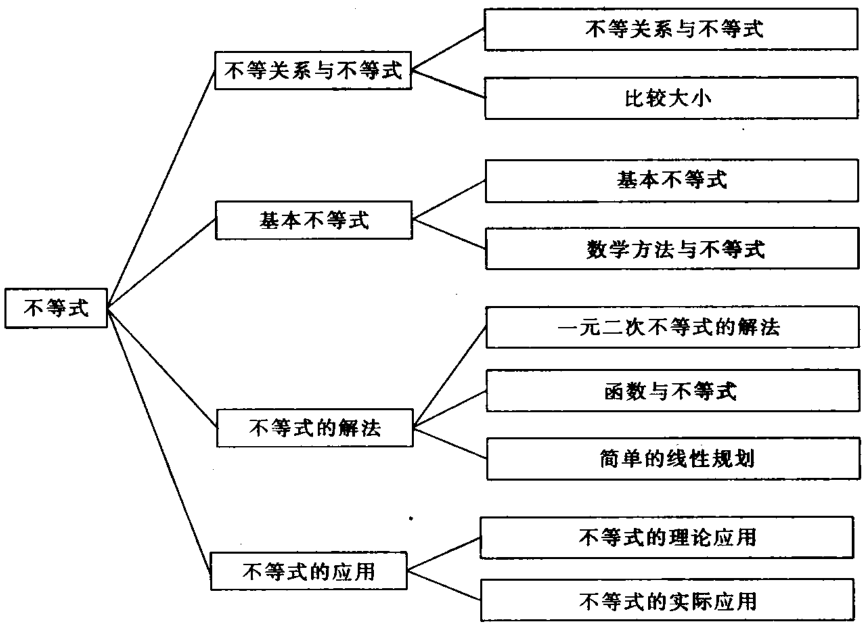
(3)不等式的解法.

讨论不等式成立，其理论依据是“实数的顺序性、不等式的性质、函数的单调性、基本不等式”；主要方法是“比较法、综合法、分析法”.

解不等式的总体思路有二：一是等价转化；二是套用“模型”.

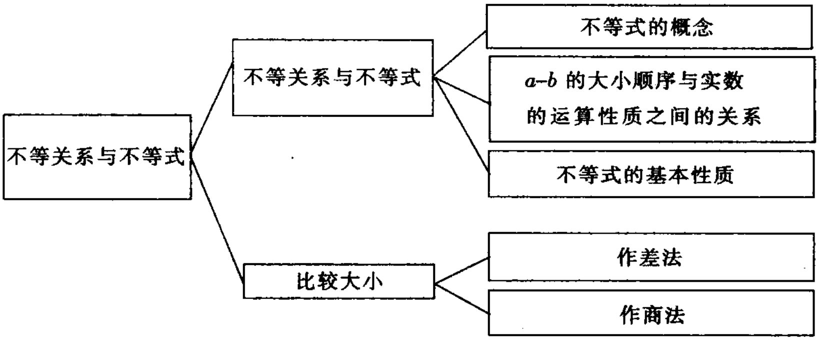
解答不等式问题，最常用的数学思想是等价转化思想和分类讨论思想.

本篇知识框图



第一讲 不等关系与不等式

本讲知识框图



1.1 不等关系与不等式

重点难点归纳

重点 1. 实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系.

2. 不等式的 7 条基本性质.

难点 对不等式的 7 条基本性质的正确运用.

本节需掌握的知识点 不等式的 7 条基本性质.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

在生产、科学和日常生活中，大与小、多与少、轻与重、高与矮等都为人们所熟悉，在比较的意义下，它们描述的都是客观事物在数量上的不等关系.

现实世界中，各式各样的不等关系大量存在，怎样来描述不等关系呢？

探究——抽象概括

在数学中，用不等式来表示不等关系.

1. 不等式的概念

(1)不等式的定义

用不等号“$<$、$>$、$\leqslant$、$\geqslant$、$\neq$”表示不等关系的式子叫做不等式. 用“$<$”或“$>$”号连接的不等式，叫做严格不等式；用“$\leqslant$”或“$\geqslant$”号连接的不等式，叫做非严格不等式.

(2)同向、异向不等式

$f(x)>0$ 与 $g(x)>0$ 叫做同向不等式；$f(x)>0$ 与 $g(x)<0$ 叫做异向不等式.

(3)不等式的解集

使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)成立的 x 的集合，叫做 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的解集.

(4)同解不等式

若 $f(x)>0$ 与 $g(x)>0$(或 $g(x)<0$)的解集相等，则 $f(x)>0$ 与 $g(x)>0$(或 $g(x)<0$)叫做同解不等式.

(5)不等式的同解变形

一个不等式变形为与它同解的不等式，这样的变形称为不等式的同解变形.

(6)证明不等式

证明不等式成立的过程叫做证明不等式.

(7)解不等式

求不等式的解集的过程叫做解不等式.

2. $a-b$ 的大小顺序(实数的顺序性)与实数的运算性质之间的关系

(1)设 $a,b\in\mathbf{R}$，则

① $a-b>0\Leftrightarrow a>b$；

② $a-b=0\Leftrightarrow a=b$；

③ $a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(2)设 a、b 都是正实数，则

① $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；

② $\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；

③ $\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

3. 不等式的基本性质

(1)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性).

(2)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$(可加性).

(3)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(4)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$(可乘性).

(5)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(6)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0$($n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$).

(7)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0$($n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$).

解题方法指导

不等式部分的练习，要从比较 $a-b$ 与 0 的大小或 $\frac{a}{b}$ 与 1 的大小入手，总结其中的固定步骤，经过一段时间演练，对各类题型也就熟悉了.

1. $a-b$ 与 0 比较类型题

[例 1] 比较 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+2$ 与 $4-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$ 的大小.

解 $\because \left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+2\right]-\left[4-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]$ 作差,被比较的两个数的差

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-2$$

$$=\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-2$$

$$=2\left(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}\right)-2=2\left(1+\frac{6}{a^2}\right)-2$$

变形,变到与0可以比较大小的位置

$$=\frac{12}{a^2}>0,$$ 判号,与 0 比较,是正?是负?还是零?

$\therefore \left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+2>4-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$. 定论,被比较的两个数谁大,谁小?

点评 解答本题的依据是 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$. 解题步骤是:作差,变形,判号,定论.

[例 2] 比较 x^2+2113 与 $3x+2110$ 的大小,其中 $x\in\mathbf{R}$.

解 $\because (x^2+2113)-(3x+2110)=\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0,$

$\therefore$ $$x^2+2113>3x+2110.$$

[例 3] 设 a、b 都是正实数,比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

解 $\because a$、b 都是正实数,

$$\therefore \left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

［例 4］ 比较 x^6+2019 与 x^4+x^2+2018 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

解 $(x^6+2019)-(x^4+x^2+2018)=x^6-x^4-x^2+1=x^4(x^2-1)-(x^2-1)$

$=(x^2-1)(x^4-1)=(x^2-1)^2(x^2+1).$

当 $x=\pm1$ 时，$x^6+2019=x^4+x^2+2018$；

当 $x\neq\pm1$ 时，$x^6+2019>x^4+x^2+2018$.

点评 本题与例 3 比较，"$=$"成立的条件有些区别：例 3 中"$=$"成立，只要 a、b 具备"a、b 都是正实数，$a=b$"这一条件；而本题中"$=$"成立，指出了 x 的具体值，即"$x=\pm1$".

［例 5］ 已知 $a,b,c,d\in\{$正实数$\}$，且 $b<c$，比较 $ab+d$ 与 $ac+bc+d$ 的大小.

解 $(ab+d)-[(ac+bc)+d]=a(b-c)-bc.$

$\because b<c,$

$\therefore b-c<0,$

又 $a>0,$

$\therefore a(b-c)<0;$

$\because b>0,c>0,$

$\therefore bc>0,-bc<0;$

$\therefore a(b-c)-bc<0,$

$\therefore ab+d<ac+bc+d.$

比较受条件限制的两个数的大小，逻辑顺序非常重要

点评 本题与例 1～例 4 不同的是：例 1～例 4 中，被比较的两个数不受条件限制，而本题中被比较的两个数 $ab+d$ 与 $ac+bc+d$ 受条件"$b<c$"的限制.

［例 6］ 已知 $x>0,x\neq1,m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小.

分析 本题对 x 分类讨论，即讨论 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两种情况.

解 $x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}$

$$=(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right).$$

当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$，知

$$x^m<x^n \text{ 且 } x^{m+n}<1,$$

$$1-\frac{1}{x^{m+n}}<0,$$

所以 $$(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0;$$

当 $x>1$ 时，由 $m>n>0$ 知，

$$x^m>x^n \text{ 且 } x^{m+n}>1,$$

$$1-\frac{1}{x^{m+n}}>0,$$

所以 $$(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0.$$

综上，$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0$，即 $$x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}.$$

2. $\frac{a}{b}$ 与 1 比较类型题

[例 7] 比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

分析 本题通过两个数的商与 1 比较确定两个数的大小.

解 $\because \frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}=\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8=\left(\frac{128}{81}\right)^8>1,$

$\therefore$ $$16^{18}>18^{16}.$$

点评 解答本题的依据是：若 $a>0,b>0,\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$. 当 $a<0,b<0$ 时，比较 a 与 b 的大小，可先比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小，然后再确定 a 与 b 的大小.

基础达标演练

一、选择题

1. 若 $f(x)=5x^2-x+1$，$g(x)=4x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 ( )

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)=g(x)$

C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 值的变化而变化

2. 若 $a\neq2$ 或 $b\neq-1$，则 $M=a^2+b^2-4a+2b+1$ 的值与 -4 的大小关系是 ( )

A. $M>-4$　　B. $M<-4$　　C. $M=-4$　　D. 不能确定

3. 若 $a>b,c>d$，则下列不等关系中不一定成立的是 ( )

A. $a-d>b-c$　　B. $a+d>b+c$

C. $a-c>b-c$　　D. $a-c<a-d$

4. 若 $-1<\alpha<\beta<1$，则下列各式中恒成立的是 ( )

A. $-1<\alpha-\beta<1$　　B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-2<\alpha-\beta<0$　　D. $-1<\alpha-\beta<0$

二、填空题

5. 6^8 与 8^6 的大小关系是 6^8 ______ 8^6.

6. 设 $a>5$,则 $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}$与$\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$的大小关系是______________.

7. 当__________时,$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$.

8. 设 $0<a<b$,且 $a+b=1$. 将 a、b、$\frac{1}{2}$、$2ab$、a^2+b^2 从小到大排列,可排列为______.

三、解答题

9. 比较 a^2-2a+1 与 $a-2$ 的大小.

10. 比较$\frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$与 $4\sqrt{n}$的大小($n\in \mathbf{N}^*$).

答案与提示

一、选择题

1. A($f(x)-g(x)=(5x^2-x+1)-(4x^2+x-1)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0.$)

2. A($(a^2+b^2-4a+2b+1)-(-4)=a^2+b^2-4a+2b+5=(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1)$ $=(a-2)^2+(b+1)^2$. ∵ $a\neq 2$ 或$b\neq -1$,∴ $(a-2)^2+(b+1)^2>0.$)

3. B(依不等式的性质 $a-d>b-c$,或 $a-c<a-d$ 都成立,∴ A、D是成立的. C 中以 $a>b$ 为前提,两边同加$-c$ 也成立.)

4. C(∵ $-1<\alpha<1$,$-1<\beta<1$,∴ $-1<-\beta<1$,∴ $-2<\alpha-\beta<2$. 又∵ $\alpha<\beta$,∴ $\alpha-\beta<0$. ∴ $-2<\alpha-\beta<0$.)

二、填空题

5. $>$$\left(\frac{6^8}{8^6}=\frac{2^8\times 3^8}{2^{18}}=\frac{3^8}{2^{10}}\right.$. 设 $x=\frac{3^8}{2^{10}}$,则 $\lg x=8\lg 3-10\lg 2=8\times 0.4771-10\times 0.3010>0$. ∴ $x>1$. ∴ $\left.6^8>8^6.\right)$

6. $\sqrt{a-3}-\sqrt{a-4}<\sqrt{a-4}-\sqrt{a-5}$ (∵ $a>5$,只需判断 $\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5}$与$2\sqrt{a-4}$的大小,即比较$(\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5})^2-(2\sqrt{a-4})^2$的大小,即 $a-3+2\sqrt{(a-3)(a-5)}+a-5$ 与 $4(a-4)$的大小. 只需比较$2\sqrt{(a-3)(a-5)}$与$2(a-4)$的大小,只需判断$(a-3)(a-5)$与$(a-4)^2$ 的大小,只需判断 $a^2-8a+15$ 与 $a^2-8a+16$ 的大小.)

7. a、b 同号且 $a>b$ 或 a、b 异号且 $a<b$(不妨先假设$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$. 通过等价变换来分析应具备的条件:原式等价于 $a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b<a-b\Leftrightarrow -3\sqrt[3]{ab}\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})<0$,∴ 应满足条件是 a、b 同号且 $a>b$ 或 a、b 异号且 $a<b$.)

8. $a<2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2<b$$\Big($由 $0<a<b$ 且 $a+b=1$ 可知 $0<a<\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}<b<1$,$a^2+b^2>2ab$. 这样 $a<\frac{1}{2}<b$,$2ab<a^2+b^2$. 它们两组之间什么关系呢? ∵ $b=1-a$,$(a^2+b^2)-b=a^2+(1-a)^2-(1-a)=2a^2-a=a(2a-1)$,$0<a<\frac{1}{2}$,∴ $2a-1<0$,$a>0$,∴ a^2+b^2

$<b$. 又 $\because 2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}=-2a^2+2a-\frac{1}{2}=-2\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0$，$\therefore 2ab<\frac{1}{2}$. $a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，$2ab-a=a(2a-1)$，$\because 2b>1$，$\therefore 2ab>a$.）

三、解答题

9. $\because (a^2-2a+1)-(a-2)=a^2-2a-a+3=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore a^2-2a+1>a-2$.

10. $\because \frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$，$\therefore \frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-4\sqrt{n}=2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-4\sqrt{n}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>0$，$\therefore \frac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}>4\sqrt{n}$.

能力拓展

释疑解难

用分类讨论思想剖析数学中的"不重不漏"

"不重不漏"，是指数学问题的解不重复，不遗漏. 各类书刊杂志上，"千万要不重不漏，一定要不重不漏……"让人感到亲切，真是用心良苦啊！问题是怎样去保证一个数学问题的解不重不漏呢？这还要从分类讨论的数学思想说起.

(1)思想是行动的指南

思想是行动的指南. 数学思想当然就是数学活动的指南，它能指明数学活动过程中的前进方向. 类比指南针，南清楚了，东、西、北自然也就清楚了，上北下南左西右东很少有人不知.

(2)分类讨论思想的理论基础

思想要有理论基础作指导，分类讨论思想的理论基础由三部分组成.

设一个数学问题的母类是集合 A，子类是集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它们满足下面的三个条件：

①$A_i\neq\varnothing$, $i=1,2,\cdots,n$;

②$A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$;

③$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$.

上面的①、②、③即是分类讨论思想的理论基础.

(3)用分类讨论思想剖析数学中的"不重不漏"

如图 1-1，A 相当于全集，$A_i(i=1,2,\cdots,n)$都是 A 的子集.

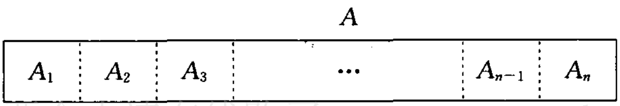


图 1-1