专业核心课

全国普通高等院校物流管理与物流工程专业教学指导意见配套规划教材

运筹学

专业核心课

常大勇 主编

中国物资出版社

全国普通高等院校物流管理与物流工程专业教学指导意见配套规划教材

运　筹　学

主　编　常大勇
副主编　史兰芳　周　伟　张　燕
刘　炜　张金花

中国物资出版社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/常大勇主编．—北京：中国物资出版社，2010.2

（全国普通高等院校物流管理与物流工程专业教学指导意见配套规划教材）

ISBN 978－7－5047－3306－1

Ⅰ．运…　Ⅱ．常…　Ⅲ．运筹学—高等学校—教材　Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 226265 号

策划编辑　王宏琴
责任编辑　王宏琴
责任印制　何崇杭
责任校对　孙会香　杨小静

中国物资出版社出版发行
网址：http://www.clph.cn
社址：北京市西城区月坛北街 25 号
电话：（010）68589540　邮政编码：100834
全国新华书店经销
中国农业出版社印刷厂印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：21.75　字数：502 千字
2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
书号：ISBN 978－7－5047－3306－1/O・0040
印数：0001—3000 册
定价：36.00 元

前　言

运筹学是二十世纪三四十年代以后形成的一门综合应用科学，它的主要思想是运用数学模型方法研究各种决策问题的优化途径，给出符合约束条件的最优方案或尽可能接近所有目标要求的满意方案，为决策者提供科学决策的参考依据。运筹学的研究对象是各种有组织系统的管理问题及其经营活动，以及经济管理中出现的各种实际问题。目前它已成为经济管理类专科、本科和研究生的主干课、学位课。

本书从培养经济管理人才应具备的运筹学知识、能力出发，系统介绍了运筹学中的线性规划、线性规划的对偶问题、运输问题、目标规划、整数规划、图与网络模型、动态规划、存储论、排队论、决策分析和博弈论，共包括十一章的内容。课时需要 72 学时。学时少的院校，可根据专业特点选学其中部分内容。

本书主要是针对经济管理类本科层次的学生编写的，同时也兼顾了应用数学专业学生，还可以作为研究生的参考书。本书具有以下几个特点：

（1）在不失科学性和逻辑性的前提下，叙述较为通俗、简洁，减少了复杂的数学推导和证明，降低了经济管理类学生学习的困难。书中有大量的经济管理问题的实例，通过学习可提高学生的建模能力。

（2）书中吸收了近年来国内外运筹学教材中的长处和精华，也加入了运筹学的一些新进展。例如在图和网络模型中的统筹方法部分，采用了国外的讲述方式；在决策分析中，增加了定性与定量相结合的层次分析法以及简单的马尔可夫决策方法。

（3）每章的最后一节详细介绍了运筹学专用软件 WinQSB 的使用方法，编者尽量将该软件利用得多一些，使学生学习后能提高其解决实际问题的能力。

（4）每章后的练习题有两个层次，练习题 A 是配合各章的基本题型；练习题 B 收集了全国部分高校近年来关于运筹学的研究生入学试题，供考研学生参考。

（5）本书的附录一收集了部分高校研究生入学试题中的判断题；附录二收集了部分高校研究生入学试题中的选择题；附录三收集了几所高校近几年的研究生入学试题，供读者参考。

本书的编者是北京师范大学珠海分校“运筹学教学团队”的成员，这是一支老、中、青相结合的教学团队，他们将多年的运筹学教学经验、丰富的实践经验和扎实的专业知识结合在一起，编撰了这部教材。其中绪论、第八章、第九章由

常大勇教授编写；第十章由常大勇教授和史兰芳副教授共同编写；第十一章由史兰芳副教授编写；第一章至第三章由周伟讲师编写；第六章由张燕讲师编写；第四章、第五章由刘炜讲师编写；第七章由张金花讲师编写。各章的图形由周伟讲师绘制和修改，全书由常大勇教授统稿。

在本书编写过程中，得到了北京师范大学珠海分校教务处领导以及北京师范大学珠海分校物流学院领导和工作人员的大力支持和协助，在此，一并向他们表示感谢。

本书编者有志于编写一部有特色、高质量的运筹学教材，但鉴于编者水平有限，书中有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

本书配有相关授课课件及 WinQSB 软件安装文件，若有需要请登录中国物资出版社网站下载。网址：http：//www. clph. cn。

编　者

2009 年 12 月于北京师范大学珠海分校

目　录

绪 论

一、运筹学名称的来源

运筹学一词的英文原名为 Operations Research，缩写为 O. R，可直译为“运作研究”或“运用研究”。1957 年我国从“夫运筹帷幄之中，决胜于千里之外”（见《史记·高祖本纪》）这句古语中摘取“运筹”二字，将 O. R 正式译作运筹学，恰当地反映了这门学科的性质和内涵。

对于运筹学有多种不同的释义，在《大英百科全书》中认为，“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学”，“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析工具”。英国运筹学会认为，“运筹学是运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥或管理中出现复杂问题的一门学科”。在《中国企业管理百科全书》中认为，“运筹学应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中的人、财、物等有限资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理”。综上所述，可以认为“运筹学是一门新兴的边缘科学，它使用数学方法利用计算机等现代化工具，把复杂的研究对象当做综合系统，进行定量分析，从整体最优出发进行有目的的分析，提出一个最优的可行方案，提供给执行机构作为决策的参考”。

二、运筹学发展简史

早期的运筹学是和战争联系在一起的。在第二次世界大战期间，为了解决作战行动和军需物资的生产与供应发生的问题，英国的军事管理部门邀请了各种领域的科学家，研究了诸如：为防御德国空军轰炸，如何在英国本土布防雷达；为了封锁德国潜艇在考比士湾的活动，研究了英国飞机的飞行路线、起飞架次、飞行时间问题；还研究了深水炸弹在怎样的深度下爆炸，才能对敌潜艇有更大的杀伤力等问题。在第二次世界大战期间，英国空、海、陆军都成立了运筹组织，主要研究如何提高防御和进攻作战的效果。美国军队也陆续成立了运筹小组，其中海军成立得最早，它是由莫尔斯博士发起和组织的，主要研究反潜战。加拿大皇家空军也在 1942 年成立了运筹学小组。

虽然军事运筹学作为一门学科，是在第二次世界大战中逐渐形成的，但是军事运筹思想早在古代就已经产生了。中国春秋末期军事家孙武的《孙子兵法·形篇》中，就有许多关于军事运筹的论述，他把度、量、数、称等概念引入军事领域，通过双方对比计算，进行战争胜负的预测分析。他在《孙子兵法·计篇》中还说“夫未战而庙

算胜者，得算多也；未战而庙算不胜者，得算少也。多算胜，少算不胜，而况于无算乎！”这里的“算”就是计算筹划之意。此外，《孙膑兵法》、《尉缭子》、《百战奇法》等历代军事名著及有关史籍，都有不少关于运筹思想的记载。《史记·孙子吴起列传》载：战国齐将田忌与齐威王赛马，二人各拥有上、中、下三个等级的马，但齐王各等级的马均优于田忌同等级的马，如依次按同等级的马对赛，田忌必连负三局。田忌根据孙膑的运筹，以自己的下、上、中马分别与齐王的上、中、下马对赛，结果是二胜一负。这反映了在总的劣势条件下，以己之长击敌之短，以最小的代价换取最大胜利的古典运筹思想，也是博弈论的最早渊源。

在早期的西方军事运筹学中，兰彻斯特战斗方程是 1914 年提出的；丹麦工程师爱尔朗于 1917 年提出了排队论的一些公式；列温逊于 1920 年研究了商业运筹学中的零售问题，等等。

第二次世界大战以后，军事运筹学家的研究重点转向民用部门，研究成果显著。1947 年美国数学家丹捷格（G. B. Dantzig）提出了求解线性规划的有效方法——单纯形法，并于 20 世纪 50 年代初应用电子计算机求解线性规划获得成功。到 20 世纪 50 年代以后，发达国家已对企业中的一些普遍性问题，如库存、资源分配、设备更新、任务分配等问题进行研究，并成功地应用到建筑、纺织、钢铁、煤炭、石油、电力、农业诸行业。具有代表性的成果是，1951 年贝尔曼（R. Bellman）根据一类多阶段决策问题的特征，提出了解决这类问题的最优化原理，从而创立了动态规划。1959 年格莫瑞（R. Gomory）提出了求解整数规划的割平面法。1961 年美国的查恩斯（A. Charnes）和库伯（W. Cooper），首次提出了目标规划的概念，并在《管理模型及线性规划的工业应用》一书中介绍了相关内容，标志着目标规划这一运筹学分支的诞生。

随着运筹学的应用越来越广泛和深入，众多的运筹工作者对运筹学的发展方向以及如何发展进行了深入的研究。目前的共识是运筹学应在三个领域中发展，即运筹学应用、运筹科学和运筹数学，并强调发展前两者。在当前，运筹学工作者面临的问题是经济、社会、技术、生态和政治等因素交织在一起的复杂系统，要解决这类问题必须注重大系统的研究，把运筹学和系统分析相结合。此外，应当注意在运筹学中除了常用的数学方法外，还必须引用一些非经典的方法和理论。1978 年美国运筹学家沙旦（T. L. Saaty）创立的层次分析法（AHP），为解决非数学结构的决策问题提供了有效的方法。

运筹学发展的另一个标志是运筹学在全世界的普及。20 世纪 50 年代中期，我国著名科学家钱学森、许国志等将运筹学从西方引入我国，并结合国内的特点推广应用，确立了它在经济建设中的地位。在这期间，数学家华罗庚教授提出的统筹方法、运筹学家管梅谷教授提出的中国邮递员问题，在世界运筹学历史上都具有重要的地位。

为了加强运筹学的研究和应用，国内外成立了许多学术性组织。1948 年英国运筹学会成立；1952 年美国运筹学会成立；1959 年国际运筹学会成立；我国的运筹学会

成立于 1980 年，并于 1982 年加入国际运筹学会。此外，还有一些地区性组织，如 1976 年成立欧洲运筹学协会，1985 年成立亚太运筹学协会等。

在运筹学的发展过程中，电子计算机的发展是推动运筹学发展的重要动力。有人曾预言，今后运筹学和计算机的界限将消除，并将脱离各自的领域组合成更适用、更广泛的管理科学的形式。

三、运筹学的内容和特点

经过近 60 年的发展，运筹学已经形成了一个庞大的家族，出现了众多的运筹学分支，通常提到的有：线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划、网络规划等，一般称为规划论。此外还有图论与网络（含统筹方法）、存储论、决策论、博弈论、排队论（随机服务系统理论）、搜索论、维修更新理论，等等。

运筹学具有以下几个特点：

(1) 运筹学研究的对象是一类有目的性、可控制的过程或行动。不论哪一个行业，凡属于安排、调度、筹划、控制等问题，都是运筹学研究的对象。

(2) 运筹学是从量的方面对上述体系进行研究的，因此就要建立相应的数学模型。它的结构是确定一组决策变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使目标函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 达到最优(最大化或最小化)，且受约束于

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant (\geqslant, =) b_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

由于目标函数、约束条件有不同的形式，就会产生不同的运筹学分支。

(3) 模型的求解方法要使用较多的基础数学知识，通过计算得到满意解。在解决实际问题时，必须利用计算机的专用软件求解。本书每章最后一节都介绍了 WinQSB 运筹学软件的使用方法。

(4) 运筹学工作者是决策者的参谋。用运筹学方法得到的最优（或满意）方案，要提供给决策者参考，并协助决策者实施方案及对方案进行评价。

总的来说，运筹学是一门较为年轻的科学，随着科学技术的发展，实际管理中的社会、经济、技术、心理等各种因素相互渗透的问题越来越多，这就需要各方面的专业人员协同配合。运筹学是在解决实际管理问题中发展起来的，它必将在管理科学的发展中成长壮大。

第一章 线性规划与单纯形法

线性规划的英文名称为“Linear Programming”，简称 LP，它是运筹学中发展最早、理论与计算方法最成熟的分支，应用十分广泛。线性规划所研究的是：在一定条件下，合理安排人力物力等资源，使经济效果达到最好（如产量最多，利润最大，成本最小）。简单地讲，也就是资源的最优利用问题。这类问题是在生产管理和经营活动中经常会遇到的。

早在 1823 年法国数学家傅立叶（Fourier）就提出了与线性规划有关的问题。

1939 年，前苏联的经济学家康托洛维奇（Канторович）发表了重要著作《生产组织与计划中的数学方法》，书中针对生产的组织、分配、上料等一系列问题，提出了线性规划的模型，并给出了“解乘数法”的求解方法。当时这个工作未引起足够的重视。

1947 年美国数学家丹捷格（Dantzig）提出了线性规划的一般数学模型和求解线性规划问题的通用方法——单纯形法（Simplex Method），这标志着线性规划这一运筹学的重要分支的诞生。此后，对线性规划的研究日渐受到关注。

1960 年康托洛维奇再次发表了《最佳资源利用的经济计算》一书，受到国内外的重视，为此他获得了诺贝尔经济学奖。此外，阿罗、萨缪尔森、西蒙、多夫曼和胡尔威茨等一批经济学家也因在线性规划研究中的贡献而获得了诺贝尔奖。在这批经济学家的努力下，线性规划的理论得到了不断的完善，已发展成为一门成熟的理论。今天，它已成为一个标准的工具，被广泛地应用于工业、农业、交通运输、军事和经济等各种决策领域，为世界上许多具有相当规模的公司和商业企业节省了数千乃至数百万美元的成本。

本章首先通过几个应用实例，引出线性规划问题并建立其数学模型，介绍线性规划的一些基本概念以及简单情形下的几何解法——图解法，然后介绍线性规划的基本理论，讨论它的一般求解方法——单纯形法，最后，介绍运用软件 WinQSB 解线性规划问题。

第一节 线性规划问题的数学模型

一、线性规划问题的实例

在生产管理和经营活动中，通常需要对“有限的资源”寻求“最佳”的利用或分配方案。这里所说的“有限的资源”，一般包括劳动力、原材料、设备、资金等。而

常见的"最佳"一般有两种含义，使利润最大化或成本最小化。

【例 1.1】　生产计划问题

红星玻璃制品厂是一个有 3 个工人的生产两种类型手工艺窗户的小厂。窗户一种是木框架的，一种是铝框架的。3 个工人的分工是：张三制作木框架，每天做 4 个；李四制作铝框架，每天做 6 个；王二制作和切割玻璃，每天制作 18 平方米的玻璃。每一个木框架窗户使用 3 平方米的玻璃，每一个铝框架窗户使用 2 平方米的玻璃。又知每生产一个木框架窗户可获得 30 元的利润，每生产一个铝框架窗户可获得 50 元的利润。由于工厂产量小，可假设每天生产出来的产品都可以卖出。现在请为该厂制订一个每天的生产计划，使其获利最大。

解：工厂获利的多少取决于两种窗户的产量，产量越大获利越多，而两种窗户的生产又受到三个工人每天生产能力的限制。木框架窗户需要张三和王二的生产能力，而不需要李四的生产能力。铝框架窗户需要李四和王二的生产能力，而不需要张三的生产能力。可见两种产品都为王二的生产能力而竞争，如何分配有限的生产能力来产生最大的利润是这个问题的关键。表 1－1 概括了问题中给的相关数据。

表 1－1

	木框架窗户	铝框架窗户	工人的生产能力
张三制作的木框架（个）	1	0	4
李四制作的铝框架（个）	0	1	6
王二制作的玻璃（平方米）	3	2	18
利润（元/个）	30	50	

这是一个典型的生产组合型的线性规划问题，下面建立其相应的数学模型。

制订生产计划的决策需要确定的是两种窗户的产量，记 x_1 表示每天木框架窗户的产量，x_2 表示每天铝框架窗户的产量。

在此，称 x_1、x_2 是模型中的决策变量。记 z 表示利润，由表 1－1 最后一行，得到：

$$z=30x_1+50x_2$$

该厂的目标是选择 x_1 和 x_2 的值使得 $z=30x_1+50x_2$ 的值最大，而 x_1 和 x_2 的值受三个工人的生产能力的限制。表 1－1 表明每生产一个木框架窗户，需要张三制作的木框架一个，而张三每天仅能生产 4 个。这个限制条件用数学不等式表示为：

$$x_1\leqslant 4$$

类似地，李四的生产能力限制条件的数学表示是：

$$x_2\leqslant 6$$

生产两种窗户所需玻璃为 $3x_1+2x_2$，因此王二的生产能力限制条件的表示是：

$$3x_1+2x_2\leqslant 18$$

最后，产量不能为负数，即 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$。

综上所述，该计划问题的数学模型表示为：

$$\text{目标函数} \quad \max z = 30x_1 + 50x_2$$

$$\text{满足约束条件} \begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

上述模型表示，在满足工人生产能力的约束条件下，使工厂的总利润最大。

【例 1.2】 人员分配问题

人民医院计划进行值班护士的人事改革，在满足护士工作需求的情况下尽可能节约成本。通过调查得知，该院每天各时间段内需求的值班护士数如表 1－2 所示：

表 1－2

时间段	6：00～8：00	8：00～10：00	10：00～12：00	12：00～14：00	14：00～16：00
需求数	48	79	65	87	64
时间段	16：00～18：00	18：00～20：00	20：00～22：00	22：00～24：00	24：00～6：00
需求数	73	82	43	52	15

该院护士实行每周 5 天 8 小时的轮班工作制，一共有 5 个班次，另外由于护士不愿意被分配到某些轮班，故不同班次的报酬不一样。具体情况如下：

第一班：早上 6：00 到下午 14：00，　　报酬 170 元；

第二班：上午 8：00 到下午 16：00，　　报酬 160 元；

第三班：中午 12：00 到晚上 20：00，　　报酬 175 元；

第四班：下午 16：00 到午夜 24：00，　　报酬 180 元；

第五班：晚上 22：00 到次日早上 6：00，　　报酬 195 元。

问题是在满足工作需求的情况下，每天应该分配多少护士给各轮班使总的人力成本最小化？

解：人力成本的多少取决于各班次分配的护士数，护士数越少，人力成本越少。而护士数不能过少，要满足各时间段工作的需求，即不能少于各时间段的需求数。下面建立数学模型。

这个问题的决策变量是各班次分配的护士数。记 $x_i(i = 1,2,3,4,5)$ 为每天分配给第 i 班的护士数，每天总的人力成本为 z，由各班次的值班报酬可得：

$$z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

该院的目标是使总的人力成本 $z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$ 最小化。z 值的大小取决于 x_i 值的给定，而 x_i 值的选定又受各个时间段需求值班护士的人数约束。

例如，由表 1-2 知，上午 6：00 至上午 8：00 期间值班护士的需求人数是 48 人，根据该院的班次安排，这个时间段只有第 1 班的护士在值班，值班人数为 x_1。而实际值班人数不能少于需求人数，因此这个时间段的人数约束用数学不等式可表示为：

$$x_1 \geqslant 48$$

同样，上午 8：00 至上午 10：00 期间值班护士的需求人数是 79 人，此时第 1 班和第 2 班的护士都在值班，值班总人数为 x_1+x_2，因此这个时间段的人数约束用数学不等式可表示为：

$$x_1+x_2 \geqslant 79$$

类似地，我们可以给出其他时间段的约束条件。

综上所述，该问题的数学模型可以表示为：

$$\min z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 \geqslant 48 \\ x_1 + x_2 \geqslant 79 \\ x_1 + x_2 \geqslant 65 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 87 \\ x_2 + x_3 \geqslant 64 \\ x_3 + x_4 \geqslant 73 \\ x_3 + x_4 \geqslant 82 \\ x_4 \geqslant 43 \\ x_4 + x_5 \geqslant 52 \\ x_5 \geqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

上述数学模型表示，在满足每天各时间段工作需求的约束条件下，使总的人力成本最低。

【例 1.3】 投资问题

某投资公司在 2001 年年初有 200 万元资金，每年都有如下的投资方案可供考虑采纳：若第一年年初投入一笔资金，第二年年初又继续投入此资金的 50%，则到第三年年初就可回收第一年投入资金的两倍。请为投资公司决定最优的投资策略使 2006 年年初所有资金最多。

解： 设 x_1 为 2001 年年初的投入资金，x_2 为 2001 年年初的预留资金；

x_3 为 2002 年年初的投入资金，x_4 为 2002 年年初的预留资金；

x_5 为 2003 年年初的投入资金，x_6 为 2003 年年初的预留资金；

x_7 为 2004 年年初的投入资金，x_8 为 2004 年年初的预留资金；

x_9 为 2005 年年初的预留资金。

易知，2005 年年初不再进行新的投资，因为这笔投资要到 2007 年年初才能收回。每年的资金情况满足关系式：追加投资金额＋新投资金额＋预留资金＝可利用的资金

总额。

2001 年 $x_1+x_2=200$

2002 年 $(x_1/2+x_3)+x_4=x_2$

2003 年 $(x_3/2+x_5)+x_6=x_4+2x_1$

2004 年 $(x_5/2+x_7)+x_8=x_6+2x_3$

2005 年 $x_7/2+x_9=x_8+2x_5$

到 2006 年资金总额为 x_9+2x_7，得到下列线性规划模型：

$$\max z = 2x_7 + x_9$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 0 \\ 4x_3 - x_5 + 2x_6 - 2x_7 - 2x_8 = 0 \\ 4x_5 - x_7 + 2x_8 - 2x_9 = 0 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,9) \end{cases}$$

二、线性规划问题的数学模型

数学模型是实际问题的一种数学简化表示。

从上述例子看到，线性规划问题的数学模型一般包含三个组成要素：

(1) 一组决策变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，指决策者为实现规划目标采取的方案，是问题中要确定的未知量；

(2) 一个目标函数，指问题要达到的目的要求，表示为决策变量的函数，依问题的具体性质取最大值或最小值；

(3) 一组约束条件，指决策变量取值时受到的各种实际条件的约束限制，表示为含决策变量的等式或不等式，一般还包含决策变量的非负约束。

另外在线性规划问题的数学模型中，目标函数和约束条件都是线性的。

对于不同的线性规划问题，其数学模型的形式也有不同，但其一般形式可表示为以下几种形式：

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，x_j 表示决策变量，共有 n 个；约束条件共有 $m+n$ 个；后 n 个约束条件一般称为决策变量的非负约束；c_j 为价值系数；a_{ij} 称为技术系数；b_i 称为限额系数。在例 1.1 的生产计划问题中，c_j 表示第 j 种产品的单位价格；a_{ij} 表示生产单位第 j 种产

品对第 i 种资源的消耗量；b_i 表示第 i 种资源的拥有量。

以上模型用和式的简写形式为：

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\geqslant)b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

用矩阵的形式来表示可写为：

$$\max(\min)z=\boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant(=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$；$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 称为约束方程组的系数矩阵。

第二节 两个变量线性规划问题的图解法

一、可行解和最优解

给定线性规划问题：

$$\max(\min)z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\geqslant)b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

所谓求解线性规划问题，就是从满足约束条件的解中找出一个解，使目标函数达到最优。下面介绍两个线性规划解的概念。

可行解：满足约束条件的解 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解：使目标函数达到最有利的可行解称为最优解，这里所说的最有利是最大化或最小化，要依模型的具体情况而定。

求解一个线性规划问题的过程就是一个寻找最优解的过程。

二、图解法

对于只有两个决策变量的线性规划问题，由于可行域可以用一个平面区域来表