国家教育部
规划教材

中等师范学校代数与初等函数（试用本）第二册

教学参考书

民教育出版社

教学参考书

中等师范学校

代数与初等函数（试用本）

第二册

教学参考书

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

中等师范学校

代数与初等函数（试用本）第二册

教学参考书

人民教育出版社中学数学室　编

*

人民教育出版社 出版发行

（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）

网址：http://www.pep.com.cn

北京联华印刷厂印装　　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1092毫米　1/16　印张: 9.75　字数: 220 000

1999 年12 月第 2 版　2000 年 6 月第 1 次印刷

印数: 0 001~6 000

ISBN 7-107-13270-9 / G·6379（课）　定价：8.90 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换。

（联系地址：北京市方庄小区芳城园三区 13 号楼　100078）

第二版说明

本版是在1995年12月第一版的基础上修订而成的，修订主要包括以下几方面：

1. 按照国家技术监督局颁发的《量和单位》国家标准GB3100～3102－93，规范使用了有关的单位和符号.

2. 根据教师使用中的意见，对第一版中个别地方的不足进行了修订.

3. 为了与《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》的内容相衔接，在原教材体系不变的情况下作了部分补充.

参加此次修订的有薛彬、饶汉昌、方明一、颜其鹏，责任编辑是田载今、颜其鹏.

人民教育出版社中学数学室

1999年12月

目　　录

第八章　数列和数学归纳法

Ⅰ　教学要求

1. 理解数列的有关概念；了解数列通项公式的意义；理解等差数列与等比数列的概念；掌握其通项公式和前 n 项和的公式；并能运用这些公式解决一些较简单的问题.

2. 理解数学归纳法的原理；并能用数学归纳法证明一些较简单的数学命题.

3. 通过本章内容的教学，加深学生对由具体到抽象、由特殊到一般以及由一般到特殊的关系的认识，继续培养学生分析、推理的能力，发展学生的逻辑思维能力.

Ⅱ　教材分析和教学建议

本章内容包括等差数列，等比数列以及数学归纳法三大节. 数列是中等师范学校数学课程的一项重要内容，它不仅有着广泛的实际应用，而且是对学生进行计算、推理等基本训练、综合训练的重要题材和进一步学习数学的基础知识. 数学归纳法是数学中的一种重要的证明方法和思想方法，在进一步学习数学时要经常用到.

本章第一大节是等差数列. 教材首先通过实例说明数列的意义及有关数列的项、通项公式等概念，接着讲了特殊数列——等差数列的定义、通项公式、前 n 项和的公式. 本章第二大节介绍另一种特殊数列——等比数列. 通过实例说明等比数列的定义、通项公式与前 n 项和的公式以及实际应用. 第三大节是数学归纳法. 教材通过例子引出数学归纳法后，强调了其中的两个步骤缺一不可，然后用这种方法证明了一些代数、几何等方面的问题.

数列安排在基本初等函数的后面，并把数列作为定义在正整数集（或它的有限子集）上的函数的一列函数值. 这样，在学生学习了自变量连续变化的函数之后，又接触到了自变量为离散变化的函数，既可加深他们对函数概念本质的理解，也可较早地安排与数列有关的综合训练. 教材还增添了一些数列的图象表示，直观地说明数列与函数的关系，使这部分内容与前面知识衔接得更为紧凑. 数学归纳法安排在数列之后. 这样，在先用不完全归纳法得出数列中有关公式之后，紧接着用数学归纳法进行严格证明. 因而，这既可使学生对数列的学习深化一步，又可使数学归纳法的引入显得自然. 此外，反复运用数学归纳法，有助于学生更好地掌握这一方法.

本章教材的重点是：数列及等差数列、等比数列的概念，等差数列与等比数列的通项公式、前 n 项和的公式以及数学归纳法.

本章教材的难点是掌握数列有关应用，理解数学归纳法的实质以及掌握“归纳—猜测—

论证"这一数学思想方法.

本章教学时间约 14 课时. 具体分配如下(供教学时参考):

8.1	数列	2 课时
8.2	等差数列及其通项公式	2 课时
8.3	等差数列前 n 项的和	2 课时
8.4	等比数列及其通项公式	2 课时
8.5	等比数列前 n 项的和	2 课时
8.6	数学归纳法	1 课时
8.7	数学归纳法应用举例	2 课时
小结和复习		1 课时

一　等差数列

8.1　数列

1. 在本节教材中,从实例引出了"按一定次序排列的一列数",自然地引出了数列的定义. 数列就是"一列数","列"字已经含有"序"的意思. 但是,为了强调数列中的数的有序性,特别在"一列数"之前添加了限制定语"按一定次序排列的". 要注意:数列中的数可以重复出现. 例如本节教材中的数列(6),又如:

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$$

是将数 1 与 0 按一定次序排列起来而得到的一个数列. 另外,如果组成数列的数相同,但排列次序不同,那么它们也是两个不同的数列,例如:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}\text{与}\frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1.$$

2. 联系学生已经学过的函数知识,可以把数列当作一种特殊函数的一列函数值. 因为数列是按一定次序排列的一列数,因而它就必定有开头的数,有相继的第二个数,有第三个数,等等. 于是,数列中的每一个数都对应于一个序号;反过来,每个序号也都对应于数列中的一个数. 因此,数列就是定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)上的函数 $f(n)$. 当自变量从 1 开始依次取正整数时,相对应的一列函数值:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\cdots,f(n),\cdots.$$

通常用 a_n 代替 $f(n)$,于是数列的一般形式常记为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,a_n,\cdots,$$

或简记为$\{a_n\}$,其中 a_n 表示数列$\{a_n\}$的通项.

注意:(1) $\{a_n\}$与 a_n 是不同的,前者表示数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$,而后者仅表示这个数列的第 n 项;

(2) 数列的项与它的序号是不同的概念,数列的项是指数列中的某一个确定的数,它是

函数值；而序号是指数列的项的位置，是自变量 n 的值.

(3) $\{a_n\}$ 与 $\{a\}$ 是两个不同意义的式子，$\{a_n\}$ 是数列的一种特殊记法，而 $\{a\}$ 则表示只有一个元素 a 的集合.

3. 当一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系可以用一个公式 $a_n=f(n)$ 来表示时，就把这个公式叫做这个数列的通项公式. 如果知道了一个数列的通项公式，那么只要用具体的序号代替 n，就可以写出这个数列的任意一项.

正如并不是所有的函数关系都能用解析式表达出来一样，也不是所有的数列都能写出它的通项公式.

有的数列的通项公式，在形式上不一定是唯一的. 例如：

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\cdots.$$

它的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$，或者写成 $a_n=\cos n\pi$，也可写成

$$a_n=\begin{cases}-1, n\text{ 为奇数时},\\ 1, n\text{ 为偶数时},\end{cases}$$

这些通项公式形式上虽然不同，但表示同一个数列.

有些数列，只给出它的前面几项，并没有给出它的构成规律，那么仅由前面几项归纳出来的所谓“通项公式”，常常不是唯一的. 如由数列 2,4,8,…可以归纳出 $a_n=2^n$，也可以归纳出 $a_n=n^2-n+2$，等等. 由于这些“通项公式”不同，由它们写出的后继项就不一样了，因此只从数列的有限项来归纳通项公式是不一定可靠的.

4. 关于数列的分类，教材中只介绍了按数列的项数是有限还是无限来进行分类，即分为有穷数列与无穷数列. 实际上，还可以按数列中任何相邻两项的大小，或按任何一项的绝对值是否都小于某一正数等来对数列进行分类(见本章附录).

5. 所谓已知一个数列，就是已知这个数列的任意一项. 给出一个数列，就是给出它的构成规律，并且这个规律常常可以用解析式给出. 如果已知数列的通项公式 a_n，就可写出这个数列的任意一项. 除了通项公式外，递推公式也是给出数列的一种重要方法. 如教材中例 3，就是用递推公式给出数列的一个例子. 另外，不少重要数列也是用这种递推公式给出的，如优选法中有重要应用的数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\cdots$$

就是用下面的递推方法给出的：第 1 项是 1，第 2 项是 1，以后各项根据公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 递推.

用递推关系给出数列的方法，难度一般较大，教学中只要使学生知道有这样一种方法即可，不作进一步的要求.

此外，还可用其他方式给出数列. 例如，“将 π 的不足近似值按所保留的位数自少到多排列起来的一列数”就是用语言叙述的方法给出的一个数列，见下表：

$$\pi=3.141\cdots$$

精确到	1	0.1	0.01	0.001	…
序号	1	2	3	4	…
项	3	3.1	3.14	3.141	…

6．这一节教材中的三个例题属于两种类型：

（1）已知数列的通项公式或递推关系，写出数列或数列的某一项或某几项，如例 1，例 3；

（2）根据数列的前几项，写出数列的一个通项公式，如例 2.

后一类型的问题，是本节教学中的难点. 教学时要引导学生观察数列中各项与其序号的变化情况，分解所给数列的前几项，看看这几项的分解式中，哪些部分是变化的，哪些是不变的，再探索各项中变化的部分与序号间的关系，从而归纳出构成规律，写出通项公式. 在这里应着眼于培养学生的观察和分析能力.

对于后一类型的问题，教材中的例题、习题只给出了数列的前几项，要求写出一个使这几项能够满足的通项公式. 由于题中没有说出数列的整个构成规律，这种问题的解答可能不是唯一的. 一般地说，这时写通项公式，常常是只要求学生写出一个使所给的有限项能够满足的、最简单的公式.

除了这两种类型的问题外，教科书的习题中还有利用数列的通项公式，判断一个数是不是这个数列中的项的问题. 这实质上是求以 n 为未知数的方程有没有正整数解的问题.

8.2 等差数列及其通项公式

1．本节教材的重点是等差数列的定义及其通项公式. 等差数列的通项公式的导出离不开等差数列的定义. 因此，教学中首先要讲清等差数列的定义，并且自始至终都要紧扣这个定义.

2．对于等差数列，要强调它的公差 d 是"从第 2 项起，每一项与它的前一项的差"，防止学生在从相邻两项相减求公差时出现颠倒顺序的错误. 应指出虽然等差数列的每一项减去它的后一项的差也是一个常数，但它不是公差，而是公差的相反数.

要证明一个数列是等差数列，只需证明差 $a_{n+1}-a_n$ 是一个与 n 无关的常数即可.

3．在给出等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 后，应引导学生分析这个公式，指出公式中有四个量 a_1, n, d, a_n，如果已知其中任意三个量，就可以根据公式求出另外的一个量.

4．把等差数列的通项公式整理为 $a_n=dn+(a_1-d)$，这表明当 $d\neq 0$ 时，a_n 是关于 n 的一次式. 由此可见，以正整数集为定义域的函数 $f(n)=a_n$ 的图象是一条直线上的点的集合（图 8－1）.

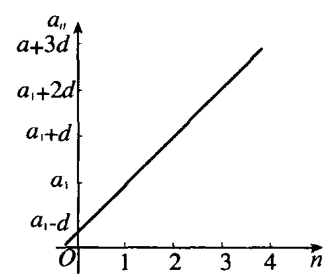

图 8－1

这条直线的斜率为 d，在纵轴上的截距为 a_1-d.

5. 在等差数列中，如果给出了首项 a_1 与公差 d，那么这个数列的各项就可由等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 求出. 本节中的例 1 给出了等差数列的首项 a_1 与公差 d，只要把 n 代入通项公式即可. 例 2 中要求项数 n，必须注意 n 是正整数，否则就不是这个数列的项. 例 3 是一道通项公式的应用题，只要弄清题意，寻找出等差数列的数学模型，问题就迎刃而解了.

6. A 是 a、b 的等差中项的充要条件是 $2A=a+b$. 两个数的等差中项又叫做这两个数的算术平均数. 等差中项的性质在实际中应用比较广泛，掌握这些知识是很有用的. 在等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

8.3 等差数列前 n 项的和

1. 在讲解等差数列前 n 项和的公式时，要紧扣等差数列的定义，从分析等差数列的公差 d 的性质出发. 推导求和方法是对学生进行思维训练的好题材，应通过对实例的观察和分析，着重讲述求和的思路.

2. 等差数列前 n 项和的公式有两种形式. 如果已知等差数列的首项 a_1 与末项 a_n 以及项数 n，用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$；如果已知等差数列的首项 a_1 与公差 d 以及项数 n，用公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

3. 在解有关等差数列的问题时，如果已知 a_1,d,n,a_n,S_n 这五个量中的任意三个，就可以求出其余的两个.

在解有关等差数列的应用题时，如果已知三个数成等差数列，一般设这三个数分别为 $a-d,a,a+d$（其中 d 为公差）；如果已知四个数成等差数列，可设这四个数分别为 $a-3d$，$a-d,a+d,a+3d$（其中公差为 $2d$）. 这样设通常使计算较为简便.

4. 在计算题目时，往往要求 S_n 与 a_n 的关系. 如在等差数列中，$S_1=a_1,S_2=a_1+a_2=S_1+a_2,S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3,\cdots S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_{n-1}+a_n$，所以有

$$a_1=S_1,a_2=S_2-S_1,a_3=S_3-S_2,\cdots,a_n=S_n-S_{n-1}.$$

如果已知 S_n，就可求出等差数列的通项公式 a_n，公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 在解题中应用很广.

二 等比数列

8.4 等比数列及其通项公式

1. 本节教材的重点是等比数列的定义及其通项公式. 其中等比数列的定义又是推导通项公式的基础.

2. 讲解等比数列的公比 q 时，应强调它是“从第 2 项起，每一项与它的前一项的比”，防

止在求公比时，把相邻两项比的次序颠倒.

在等比数列中公比 q 是一个常数，它不仅可以是正数，而且也可以是负数. 要防止学生片面理解公比只能是正数. 但是公比不能为零，这可从等比数列的定义推出. 对于公比 q 的取值，还可以提出一些问题，启发学生结合实际深入地探讨. 例如 $|q|=1$ 时会出现什么结果? q 的绝对值大于（或小于）1 与 q 的值大于（或小于）1 是否一样? $q>0$ 与 $q<0$ 时各项的符号怎样？等等.

要向学生指出，要证明一个数列是等比数列，只需证明对于任意正整数 n，$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 是同一个常数就行了.

3. 等比数列的通项公式可整理为 $a_n=\frac{a_1}{q}q^n$，当 q 为不等于 1 的正数时，$y=q^x$ 是一个指数函数，而 $y=\frac{a_1}{q}q^x$ 是一个不为零的常数与指数函数的积. 因此，从图上看，表示数列 $\left\{\frac{a_1}{q}q^n\right\}$ 中的各项的点都在函数 $y=\frac{a_1}{q}q^x$ 的图象上.

4. G 是 a、b 的等比中项的充要条件是 $G^2=ab(ab>0)$.

任意两个同号的数的等比中项都有两个，它们互为相反数.

要提醒学生弄清等差中项与等比中项的关系与不同，此外，它们的几何意义也不同.

8.5 等比数列前 n 项的和

1. 求等比数列前 n 项和的方法是对学生进行思维训练的好课题，应着重讲解求和的思路.

在 $S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$ 的两边分别乘以公比 q 这一步，学生往往想不到. 为此要说明将上面等式右边的每一项乘以公比 q，就得到它后面相邻的一项，即

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n,$$

因而从前一等式的两边分别减去后一等式的两边，就可以消去那些相同项. 这种求和的思路在解决某些求和问题时经常用到，应要求学生掌握.

2. 等比数列前 n 项和的公式有两种不同的形式. 如果已知首项 a_1 和公比 q 以及项数 n，用公式

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q};$$

如果已知首项 a_1 和末项 a_n 以及公比 q，用公式

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.$$

当公比 $q=1$ 时，等比数列是常数列，即

$$a_1,\ a_1,\ a_1,\cdots,a_1,\cdots,$$

它的前 n 项和为 $S_n=na_1$.

3. 本节例 3 中的数列，各项近似于 1，1.6，2.5，4.0，6.3，10，…，常被选用作各种产品尺寸型号的分级参数. 例如：

卡车载重量常设计成 1，1.6，2.5，4.0，6.3，10 吨；

火车一节车厢的载重量常设计成 25，40，63，100 吨；

仓库容量常设计成 100，160，250，400，630，1 000 吨.

这样的数列有下列特点：

(1) 相邻两项的比值均匀(都是 $\sqrt[5]{10}$)；

(2) 任一项后面的第 5 项是这一项的 10 倍，符合实用的十进制计数法；

(3) 必要时数列各项可向前向后无限延伸，如 1 之前可有 0.10，0.16，0.25，0.40，0.63；10 之后可有 16，25，40，63，100，等等；

(4) 有利于国民经济各部门之间产品尺寸规格的相互配合，如 10 卡车的载重量恰好装满火车一节车厢，10 节车厢的载重量恰好装满一仓库，等等.

为此，国家标准规定国民经济各部门产品尺寸必须最大限度地采用这样的参数系列. 这样的参数系列叫做**优先数系**. 例 3 中的数列是优先数系. 此外，优先数系还有其他的基本系列以及补充系列、派生系列等，如基本系列 $R10$ 数系：

$$
\begin{aligned}
&1,10^{\frac{1}{10}}\doteq 1.25,10^{\frac{2}{10}}\doteq 1.60,10^{\frac{3}{10}}\doteq 2.00,\\
&10^{\frac{4}{10}}\doteq 2.50,10^{\frac{5}{10}}\doteq 3.15,10^{\frac{6}{10}}\doteq 4.00,\\
&10^{\frac{7}{10}}\doteq 5.00,10^{\frac{8}{10}}\doteq 6.30,10^{\frac{9}{10}}\doteq 8.00,\\
&10^{\frac{10}{10}}=10,\text{等等}.
\end{aligned}
$$

4. 在解有关等比数列的问题时，如果已知 a_1,q,n,a_n,S_n 这五个量中的任意三个，就可求出其余的两个.

在解有关等比数列的应用题时，如果已知三个数成等比数列，一般设这三个数分别为 $\frac{a}{q},a,aq$(其中 q 为公比)；如果已知四个数成等比数列，可设它们为 $\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3$(其中 q^2 为公比).

三 数学归纳法

8.6 数学归纳法

1. 本节教材对数学归纳法作了比较详细的阐述，在指出不完全归纳法局限性的基础上，介绍了数学归纳法的思想方法和证题步骤.

正确掌握数学归纳法的方法是本节教材的重点，开始学习时学生往往难于理解它的实质，具体表现在不了解第二个步骤所起的作用，并且不能根据归纳假设来证题. 为此，在教学中一定要抓住关键，讲清数学归纳法的实质，特别是两个步骤的相互关系及其在论证过程中

的充要性，使学生真正弄懂.

2. 在数学里，常用的推理方法可分为演绎法和归纳法两种.

在进行归纳推理时，如果逐个考察了某类事件的所有对象，从而得出一般结论，那么这个结论是可靠的，这是完全归纳法(通常叫枚举法). 如果考察的只是某件事的部分对象，就得出一般结论，这就称为不完全归纳法，由此得出的一般结论不一定可靠，数学问题中，有一类问题是与正整数有关的命题，因为正整数有无限个，我们不可能对所有的情况一一加以验证，所以用完全归纳法是不可能的. 然而只对部分正整数验证得到的结论，即用不完全归纳法得到的结论，是不一定可靠的. 因此，就需要研究一种新的方法——数学归纳法.

3. 用数学归纳法进行证明要分两个步骤. 其中第一步是命题递推的基础，第二步是命题递推的根据；把第一步结论与第二步结论联系在一起考虑，就可以断定命题对所有的正整数都成立. 这里第一步为第二步提供了初始的根据，再按这个初始根据，用第二步进行递推，最后得出“命题对于任何正整数都成立”的结论. 也就是说，在验证对第一个值命题正确的基础上，再由第二步可推出对第二个值命题正确，既然对于第二个值命题正确，再由第二步可推出对于第三个值命题正确，如此递推下去，最后可以得出，命题对于第一个值后面的任何正整数都正确.

数学归纳法的两个步骤缺一不可. 这是因为，只有第一步或几个特殊数值的验证，无第二步，那就属于不完全归纳法，论断的普遍性是不可靠的；反之，有第二步无第一步，则第二步中的假设就失去了基础. 对于数学归纳法这种证题方法，学生往往不理解它的实质，不理解两个步骤各起什么作用，而是死套它的步骤解题. 为此要通过例子说明，只有一个步骤得到验证的命题不一定成立.

为了使学生对此有深刻的印象，可以再多举几个反例，或要学生自己编拟一些问题. 例如

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{5n^2-7n+4}{2},$$

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n-1)=3n^2-3n+2$$

等都是当 $n=1,2,3$ 时成立，但当 $n=4$ 时就不成立的例子；

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1,$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2-1,$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}+2$$

等都是假设当 $n=k$ 时成立，可推出当 $n=k+1$ 时也成立，但当 $n=1$ 时并不成立的例子.

4. 在讲解数学归纳法的两个步骤时，还需要指出：

(1) 在第一步中，只需验证 n 取第一个值 N(这里 N 是使结论有意义的最小的正整数，它不一定是 1，可以取 2，或取别的正整数)时结论成立就可以了. 学生对此很不放心，往往想多验证几个正整数. 这里应该告诉学生：验证了 $n=N$ 时结论成立，就说明命题具备了递推

的基础，待证得第二步后，便具备了递推的根据，这就可以推得 $n=N+1,N+2,\cdots$ 时结论都成立. 当验证了命题在 $n=N$ 时成立以后，递推的基础已经有了，不必再验证命题对更多的正整数值成立. 因为即使能验证命题对很多个正整数值都成立，而没有第二步递推的根据，仍然不能证明这个命题对任何正整数都成立.

(2) 在第二步中，学生对"假设 $n=k$ 时结论正确"一句中的"假设"二字往往迷惑不解，认为既然是假设的，就没有什么根据，那么即使证明得 $n=k+1$ 时结论成立，也没有什么意义. 这主要是学生对证明这一步的实质没有理解. 因此应该强调：这一步实质上是要证明命题的传递性，就是要得出这样一个结论，如果对于正整数 k 能使命题成立，就能保证对于它的后继数 $k+1$ 也能使命题成立. 事实上，在证明了 n 取第一个值 N 时命题成立之后，N 作为这里的 k，当 $n=k$ 时命题成立，就不是一个假设而是一个事实了. 于是根据这一步，可递推得对于 $N+1$ 命题成立. 再以 $N+1$ 作为这里的 k，再次运用这一步，又可推得对于 $N+2$ 命题也成立. 这样递推下去，可知命题对于任意不小于 N 的正整数都成立.

此外，根据(1)与(2)得出结论：命题成立，这一步十分重要，不是可有可无，否则证明没有结束，还没有结论.

(3) 证明的关键往往在于第二步，而第二步主要在于合理运用归纳假设. 学生往往不会用归纳假设，即 $n=k$ 时命题成立这一条件，常直接将 $n=k+1$ 代入命题，便说结论成立. 这样做实质上是没有证明.

(4) 有些命题可能仅仅当 n 是偶数(或奇数)时成立，这时可将它化为 n 取全体正整数的情形. 例如，用数学归纳法证明 x^m+y^m(m 是正奇数)能被 $x+y$ 整除，这时可将它化为证明 $x^{2n-1}+y^{2n-1}$($n\in\mathbf{N}^*$)能被 $x+y$ 整除.

8.7 数学归纳法应用举例

1. 学生在实际运用数学归纳法证题时，还会遇到一些困难，其原因主要是由于在这过程中需要综合运用过去所学过的知识，而对这些知识的遗忘，往往会成为用数学归纳法证题的障碍. 因此，讲解例题时要适当穿插复习过去所学的知识.

2. 例 1 是用数学归纳法证明恒等式. 对这类问题，在证明第二步时，由于 $k+1$ 比 k 多了一项，左边由原来的 $1^3+2^3+\cdots+k^3$ 变为 $1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$，因而右边就应在 $n=k$ 时的结果 $\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$ 上再加上 $(k+1)^3$. 下面的关键就在于将 $\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$ 转化成 $n=k+1$ 时相同的形式，即 $\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$. 这种方法，适合于证明与正整数有关的恒等式.

3. 例 2 是用数学归纳法证明几何问题. 对这类问题，在证明第二步时，要根据几何性质来运用归纳假设. 如本例中要着重搞清：假设 $n=k$ 时命题成立，当凸 k 边形增加一条边成为凸 $(k+1)$ 边形时，因为 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的内角和等于 $(k-2)\pi$，$\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的内角和等于 π，所以 $k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 的内角和为

$$(k-2)\pi+\pi=[(k+1)-2]\pi,$$

这就是说，如果当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时，命题成立，那么当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

4. 例 3 是用数学归纳法证明一个整除性的命题. 这类问题涉及到数（或式）的整除性的知识，要结合例题，复习有关整除的知识，例如：(1) 如果 a 能被 c 整除，那么 a 的倍数 pa 也能被 c 整除；(2) 如果 a,b 能被 c 整除，那么它的和或差 $a\pm b$ 也能被 c 整除.

在证明这类问题时，第二步一般先将 $n=k+1$ 代入原式，然后将原式作适当的恒等变形（或先将 $n=k+1$ 代入原式，再将所得的式子加上一个适当的项，然后减去同样的项；或先将 $n=k+1$ 代入原式，再将所得的式子中的某一项化成几项的代数和），然后运用归纳假设来进行证明.

5. 例 4 是一种新的解决问题的方法. 在实际生活中，往往采取尝试、实验和总结的方法解决问题. 在数学中可看到，观察、猜测、利用数学归纳法进行证明（或者说分析、归纳、证明）的方法，可以用来求数列的前 n 项和，从例 4 还可以看到把 S_n 看成数列 $\{S_n\}$ 的通项，那么分析、归纳、证明的方法就可以用来求数列的通项.

为了说明这种解决问题的新思路，下面再补充两个例子.

例 1 顺次计算数列 $1-\frac{1}{4}$，$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$，$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)$，$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)$，…的前 4 项值，由此猜测

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

的结果，并用数学归纳法加以证明.

解：原数列为 $\frac{3}{4},\frac{4}{6},\frac{5}{8},\frac{6}{10},\cdots$，其中各项的分子依次为 $3,4,5,\cdots,n+2,\cdots$ 分母依次为 $4,6,8,\cdots,2(n+1),\cdots$，从而猜测：

$$a_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$=\frac{n+2}{2(n+1)},(n=1,2,3,\cdots)$$

用数学归纳法证明这个结论.

(1) 当 $n=1$ 时，$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)},$$

那么当 $n=k+1$ 时，

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$
$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$
$$=\frac{k+3}{2(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)+2}{2[(k+1)+1]},$$
等式也成立.

根据(1)和(2),等式对任何的正整数 n 都成立.

例 2 计算数列 $\frac{1\times2}{1\times2},\frac{1\times2+2\times3}{2\times3},\frac{1\times2+2\times3+3\times4}{3\times4},\frac{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5}{4\times5},\cdots$ 的前 4 项的值,由此猜测数列 $\{n(n+1)\}$ 前 n 项和的公式,并用数学归纳法加以证明.

解 $\frac{1\times2}{1\times2}=1$,

$\frac{1\times2+2\times3}{2\times3}=\frac{4}{3}$,

$\frac{1\times2+2\times3+3\times4}{3\times4}=\frac{5}{3}$,

$\frac{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5}{4\times5}=\frac{6}{3}$,

$\frac{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6}{5\times6}=\frac{7}{3}$,

……

从而猜测:

$$\frac{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+n(n+1)}{n(n+1)}=\frac{n+2}{3},$$

即

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

用数学归纳法证明以上结论.

(1) 当 $n=1$ 时,左边 $=2$,右边 $=2$,命题成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

那么,当 $n=k+1$ 时,

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2],$$