

数值天气预报

金汉良编

(南京大学气象系)

下 册

8499898

湖北省气象科学研究所翻印

一九八四年

数值天气预报和分析

(下 册)



第五章 行星边界层的参数化	1
§5.1 包括湍流脉动在内的基本方程组	1
A. Reynolds 方程和湍能方程	1
B. 平均形式的热力学能量方程和物质守恒方程	6
C. 大气边界层中的支配方程组	9
§5.2 最简单的一阶闭合方程组	13
A. 总体公式	13
B. 混合长和涡动粘性系数	15
§5.3 由 Prandtl 层和 Ekman 层组成的边界层模式	16
A. 中性层结的情形	16
B. 非中性层结的情形	21
§5.4 混合层边界层模式	26
A. 相似性函数	26
B. 混合层模式	32
第六章 凝结和积云对流的参数化	41
§6.1 大尺度凝结和降水	41
A. 大尺度降水	41
B. 非对流性凝结	44
§6.2 对流调查	49
A. 干对流调查	50
B. 湿对流调查	52
§6.3 积云对流的参数化	53
A. 郭晓凤的参数化方案	54
B. Arkin - Schubert 模式	63

第七章 辐射作用的参数化	86
§7.1 对流圈中的地气(长波)辐射	86
A. 基本方程	86
B. 模式大气无云的情形	93
C. 模式大气有云的情形	97
§7.2 对流圈中的太阳辐射	100
A. 概无迷	100
B. 晴空	102
C. 云天	103
§7.3 平流圈辐射	112
第八章 客观分析和初值化	113
§8.1 天气图的客观分析方法	113
A. 多项式法	113
B. 订正法	117
C. 面积加权平均法	122
D. 单要素的最优内插	126
E. 多要素的最优内插	130
§8.2 初值化方法	134
A. 静态初值化	135
B. 动态初值化	137
C. 变分法(静力平衡下的温压场)	141
D. 变分法(地转平衡约束)	143
E. 变分法(线性平衡约束)	146
§8.3 平滑与过滤	149
A. 基本的平滑与过滤函数	149
B. Robert - Asselin 时间滤波因子	154
C. 一维空间平滑	158
D. 二维空间平滑	162
后记	166

第五章 行星边界层的参数化

§5.1 包括湍流脉动在内的基本方程组

A. Reynolds 方程和湍能方程

行星边界层是紧贴地表面的一气层,其厚度大抵为 1km 左右。在该气层内湍流铅直输送对动量、水汽和感热收支起着重要作用,并且湍能在时空上也是连续分布的。

考虑分子粘性在内的 Navier-Stokes 方程为:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{F}} \quad (5.1)$$

式中分子粘性应力 $\underline{\underline{F}}$ 是二阶张量,可写成

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

粘性系数 $\mu = \rho \nu$, ν 称为运动学粘性系数。

定义下列时间平均量

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} A(t') dt' \quad (5.3)$$

$$\tilde{A}(t) = \frac{1}{\tau \bar{\rho}} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \rho(t') A(t') dt' \quad (5.4)$$

式中 τ 为时间平均周期，一般不宜取得过大，也不能取得太小。显然

$$A = \bar{A} + A', \quad \bar{A}' = 0$$

$$A = \tilde{\tilde{A}} + A'', \quad \tilde{\tilde{A}}'' = 0$$

$$\overline{\rho A} = \bar{\rho} \tilde{\tilde{A}}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \bar{A}, \quad \tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$$

由 $\tilde{\tilde{A}} - \bar{A} = A' - A''$ 可得

$$\tilde{\tilde{A}} - \bar{A} = \tilde{A} - \bar{A} = -\bar{A}''$$

$$\tilde{\tilde{A}} - \tilde{\tilde{A}} = \tilde{A} - \bar{A} = \tilde{A}' \quad (5.5)$$

由定义式(5.3)和(5.4)不难证明

$$\overline{\rho \vec{v} A} = \bar{\rho} \tilde{\tilde{v}} \tilde{\tilde{A}} + \overline{\rho \vec{v}'' A''} \quad (5.6)$$

$$\overline{\rho \vec{v} \vec{v}} = \bar{\rho} \tilde{\tilde{v}} \tilde{\tilde{v}} + \overline{\rho \vec{v}'' \vec{v}''}$$

另将连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (5.7)$$

取平均, 即得

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\vec{v}} = 0 \quad (5.8)$$

方程(5.1)结合连续方程(5.7), 乃有

$$\frac{\partial \rho \tilde{\vec{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\vec{v}} \tilde{\vec{v}}) + 2 \vec{\Omega} \times \rho \tilde{\vec{v}} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{E} \quad (5.9)$$

上式取平均, 并引用(5.6)式, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \tilde{\vec{v}} + \overline{\rho \tilde{\vec{v}}'' \tilde{\vec{v}}''}) + 2 \vec{\Omega} \times \bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \\ = \bar{\rho} \vec{g} - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

再引用平均连续方程(5.8), 即可求得 Reynolds 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\vec{v}}}{\partial t} + \tilde{\vec{v}} \cdot \nabla \tilde{\vec{v}} + 2 \vec{\Omega} \times \tilde{\vec{v}} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} \\ + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\vec{E} - \overline{\rho \tilde{\vec{v}}'' \tilde{\vec{v}}''}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Reynolds 应力或涡动力应力张量的表示式如下:

$$\begin{aligned} -\overline{\rho \tilde{\vec{v}}'' \tilde{\vec{v}}''} &= \begin{pmatrix} \overline{-\rho u'' u''} & \overline{-\rho v'' u''} & \overline{-\rho w'' u''} \\ \overline{-\rho u'' v''} & \overline{-\rho v'' v''} & \overline{-\rho w'' v''} \\ \overline{-\rho u'' w''} & \overline{-\rho v'' w''} & \overline{-\rho w'' w''} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

(5.11) 中的 $\rho \tilde{v} \cdot \tilde{v}$ 方差表示了动量的涡动通量。通常分子粘性应力远小于涡动应力, 可略去不计。

由方程 (5.10) 很容易导出平均运动动能方程。

$$\bar{\rho} \tilde{v} \cdot (5.10): \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{k} = \bar{\rho} \tilde{v} \cdot \vec{g} - \tilde{v} \cdot \nabla \bar{p} + \nabla \cdot [\tilde{v} \cdot (\bar{\underline{E}} - \overline{\rho \tilde{v}'' \tilde{v}''})] - (\bar{\underline{E}} - \overline{\rho \tilde{v}'' \tilde{v}''}) \cdot \nabla \tilde{v} \quad (5.12)$$

其中

$$k = \frac{1}{2} (\tilde{v} \cdot \tilde{v}) = \frac{\tilde{v}^2}{2} = \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2}{2}$$

也可结合连续方程, 写成通量式的动能方程。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{k}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{v} \tilde{k}) + \nabla \cdot (\tilde{v} \cdot \overline{\rho \tilde{v}'' \tilde{v}''}) - \nabla \cdot (\tilde{v} \cdot \bar{\underline{E}}) \\ = \bar{\rho} \tilde{v} \cdot \vec{g} - \tilde{v} \cdot \nabla \bar{p} - \bar{\underline{E}} \cdot \nabla \tilde{v} + \overline{\rho \tilde{v}'' \tilde{v}''} \cdot \nabla \tilde{v} \end{aligned} \quad (5.13)$$

另由 (5.1) 式也可得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{v}}{2}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{v} \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{v}}{2}) = \bar{\rho} \tilde{v} \cdot \vec{g} - \tilde{v} \cdot \nabla \bar{p} + \tilde{v} \cdot \nabla \bar{\underline{E}} \quad (5.14)$$

定义

$$k'' = \frac{1}{2} (\tilde{v}'' \cdot \tilde{v}'') = \frac{(\tilde{v}'')^2}{2} = \frac{(\tilde{u}'')^2 + (\tilde{v}'')^2 + (\tilde{w}'')^2}{2}$$

将 (5.14) 式取平均, 注意下等式

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{v}}{2} &= \frac{\rho}{2} (\tilde{v} + \tilde{v}'') \cdot (\tilde{v} + \tilde{v}'') = \frac{\rho}{2} (\tilde{v} \cdot \tilde{v} + 2 \tilde{v} \cdot \tilde{v}'' + \tilde{v}'' \cdot \tilde{v}'') \\ &= \rho (\tilde{k} + \tilde{v} \cdot \tilde{v}'' + k'') \end{aligned}$$

$$\overline{\rho \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}} = \frac{\bar{\rho}}{2} \widetilde{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \bar{\rho} \tilde{k} + \overline{\rho k''}$$

$$\begin{aligned} \overline{\rho \vec{v} \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2}} &= \widetilde{\vec{v}} \rho (\tilde{k} + \widetilde{\vec{v} \cdot \vec{v}''} + k'') + \overline{\rho \vec{v}'' (\tilde{k} + \widetilde{\vec{v} \cdot \vec{v}''} + k'')} \\ &= \bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \tilde{k} + \widetilde{\vec{v}} \overline{\rho k''} + \widetilde{\vec{v} \cdot \rho \vec{v}'' \vec{v}''} + \overline{\rho \vec{v}'' k''} \end{aligned}$$

$$\overline{\rho \vec{v} \cdot \vec{g}} = \overline{g \vec{v} \cdot \vec{g}} = \bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \cdot \vec{g}$$

$$-\overline{\vec{v} \cdot \nabla p} = -\widetilde{\vec{v} \cdot \nabla p} - \overline{\vec{v}'' \cdot \nabla p}$$

$$\begin{aligned} \overline{v \cdot \nabla \cdot \underline{E}} &= \widetilde{\vec{v} \cdot \nabla \cdot \underline{E}} + \overline{\vec{v}'' \cdot \nabla \cdot \underline{E}} = \nabla \cdot (\widetilde{\vec{v} \cdot \underline{E}} + \overline{\vec{v}'' \cdot \underline{E}}) \\ &\quad - \underline{E} \cdot \nabla \tilde{\vec{v}} - \underline{E} \cdot \nabla \vec{v}'' \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{k} + \overline{\rho k''}) &+ \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \tilde{k} + \widetilde{\vec{v}} \overline{\rho k''} + \widetilde{\vec{v} \cdot \rho \vec{v}'' \vec{v}''} + \overline{\rho \vec{v}'' k''}) \\ &- \nabla \cdot (\widetilde{\vec{v} \cdot \underline{E}} + \overline{\vec{v}'' \cdot \underline{E}}) \end{aligned}$$

$$= \bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \cdot \vec{g} - \widetilde{\vec{v} \cdot \nabla p} - \overline{\vec{v}'' \cdot \nabla p} - \underline{E} \cdot \nabla \tilde{\vec{v}} - \underline{E} \cdot \nabla \vec{v}''$$

上式与 (5.13) 式相减, 求得通易式的湍能方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho k''}) &+ \nabla \cdot (\widetilde{\vec{v}} \overline{\rho k''}) + \nabla \cdot (\overline{\rho \vec{v}'' k''}) - \nabla \cdot (\widetilde{\vec{v}'' \cdot \underline{E}}) \\ &= -\overline{\vec{v}'' \cdot \nabla p} - \underline{E} \cdot \nabla \vec{v}'' - \overline{\rho \vec{v}'' \vec{v}''} \cdot \nabla \tilde{\vec{v}} \end{aligned}$$

(5.15)

相应的平流式的湍能方程有

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{k}''}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \cdot \nabla \tilde{k}'' + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}}'' k'') \\ = -\overline{\tilde{\vec{v}}'' \cdot \nabla p} + \nabla \cdot (\overline{\tilde{\vec{v}}'' \cdot \underline{\underline{E}}}) - \underline{\underline{E}} \cdot \nabla \overline{\tilde{\vec{v}}''} - \bar{\rho} \overline{\tilde{\vec{v}}'' \tilde{\vec{v}}''} \cdot \nabla \tilde{\vec{v}} \quad (5.16)$$

(5.13)式右端第三项常写成

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{\bar{\rho}} \underline{\underline{E}} \cdot \nabla \tilde{\vec{v}}$$

它表示平均运动动能通过分子粘性转化为热能的动能耗散率。(5.15)式右端第二项可写成

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{\bar{\rho}} \underline{\underline{E}} \cdot \nabla \overline{\tilde{\vec{v}}''}$$

它表示由于分子粘性将涡动动能转化为热能的耗散率。

$\mathcal{E}_m \ll \mathcal{E}_t$, 但在许多气象问题中, $\mathcal{E}_t$ 也可略去不计。(5.13)和

(5.15)式右端最末一项数值相同, 符号相反。它是平均运动动能和涡动动能相互转换的“桥梁”。(参阅余志豪、王彦昌编著的《流体力学》239—240)

B. 平均形式的热力学能量方程和物质守恒方程

Reynolds应力表示了动量的涡动通量。对热力学能量方程和水汽守恒方程取平均, 我们也可得到感热、水汽和潜热的湍流通量的表达式。

将通量式的热力学能量方程

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \theta) = \frac{\rho \theta}{\rho T} Q \quad (5.17)$$

取平均, 即得:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{\theta}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{V}} \tilde{\theta}) = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho Q \right)} - \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{V}}'' \theta'') \quad (5.18)$$

或

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{\theta} = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho Q \right)} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{V}}'' \theta'') \quad (5.19)$$

式中 $\bar{\rho} \tilde{\vec{V}}'' \theta''$ 是为悉热的湍流通量。

任一物质的守恒方程或连续方程可写成

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \varphi) = \rho S \quad (5.20)$$

或

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \varphi) = S \quad (5.21)$$

其中 φ 是为该物质的混合比, 这种物质可以是水汽、雨滴、冰雹或臭氧; S 是源汇项。而后这里的 φ 是指水汽的混合比。

对水汽连续方程 (5.21) 施行平均, 类似可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{\varphi}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{V}} \tilde{\varphi}) = \bar{S} - \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{V}}'' \varphi'') \quad (5.22)$$

或

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \tilde{\vec{V}} \cdot \nabla \tilde{\varphi} = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{S} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{V}}'' \varphi'') \quad (5.23)$$

式中 $\overline{\rho \vec{v}'' q}$ 即为水汽的涡动力通量。

还可以写出平均状态的总位能方程和潜能方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_v T) + \vec{v} \cdot \nabla (C_v T) + R T \nabla \cdot \vec{v} = Q$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_v T) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} C_v T) - \vec{v} \cdot \nabla \rho = \rho Q$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} C_v \tilde{T}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}} C_v \tilde{T}) + \nabla \cdot (\overline{C_v \rho \vec{v}'' T''}) \\ = \tilde{\vec{v}} \cdot \nabla \bar{\rho} + \overline{\vec{v}'' \cdot \nabla \rho} + \bar{\rho} Q \end{aligned} \quad (5.24)$$

式中 $\overline{C_v \rho \vec{v}'' T''}$ 也称为热的湍流通量。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi = g \omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \phi) = g \rho \omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \phi) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}} \phi) = g \bar{\rho} \tilde{\omega} \quad (5.25)$$

(5.24) + (5.25) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\bar{\rho} (C_v \tilde{T} + \phi)] + \nabla \cdot [\bar{\rho} \tilde{\vec{v}} (C_v \tilde{T} + \phi)] + \nabla \cdot (\overline{C_v \rho \vec{v}'' T''}) \\ = g \bar{\rho} \tilde{\omega} - \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{v}}) + \tilde{\vec{v}} \cdot \nabla \bar{\rho} + \overline{\vec{v}'' \cdot \nabla \rho} + \bar{\rho} Q \end{aligned} \quad (5.26)$$

上式是考虑了湍流运动影响后的总位能方程。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho L \xi) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} L \xi) = L S$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} L \tilde{q}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{v} L \tilde{q}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{v} L \tilde{q}) + \nabla \cdot (\overline{L \rho \tilde{v}'' q''}) = L \bar{S} \quad (5.27)$$

(5.27)式是包括了湍流脉动影响在内的潜热方程。

C. 大气边界层中的支配方程组

厚度只有几公尺的最贴近地面的气层叫做贴地层。这一层中湍流活动不占优势，受下垫面状况（海陆、地形、植被、冰雪覆盖、粗糙度等）的影响较大。同年的大气环流模式和数值预报模式常把它作为下垫面边界条件来处理，而没有把它作为一特殊层来处理。除贴地层外，大气边界层可分为二层。厚度约为几十米的近地面层或简称地面层（也称常数通量层或 Prandtl 层）和上界约在 1 公里高度处的螺旋层或称 Ekman 层。近期的研究表明，仅在常定的水平均匀气层情况下 Ekman 层才存在，对于非中性的不稳定气层，地面层以外的其它边界层主要是受热对流扰动支配的对流混合层。这里我们先从早期的大气边界层的处理方法讲起。

大气边界层中下列三个假定成立：

1° 分子粘性应力 τ ，从而分子摩擦力很小，可以略去不计。类似地，由于分子粘性所造成的热量和水汽的扩散输送也可忽略不计。

2° 虽则 Reynolds 应力 $-\overline{\rho \tilde{v}'' \tilde{v}''}$ 的各个分量是同量级

的, 但 $\left| \frac{\partial}{\partial z} (-\rho w'' \vec{v}'') \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial x} (-\rho u'' \vec{v}'') \right|$ 和 $\left| \frac{\partial}{\partial y} (-\rho v'' \vec{v}'') \right|$ 。

类似地, $\left| \frac{\partial}{\partial z} (\rho w'' \theta'') \right| \gg \left| \nabla_h \cdot (\rho \vec{V}_h'' \theta'') \right|$ 及 $\left| \frac{\partial}{\partial z} (\rho w'' q'') \right| \gg \left| \nabla_h \cdot (\rho \vec{V}_h'' q'') \right|$ 。

3° 平均量是准恒定和准水平均匀的, 即 $\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\quad}) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\quad}) \simeq 0$, $\nabla_h (\bar{\quad}) = \nabla_h (\tilde{\quad}) \simeq 0$, 只是决定地转风的 $\nabla_h \bar{p}$ 和决定热成风的 $\nabla_h \tilde{\tau}$ 例外。

$$(5.8) \rightarrow \nabla \cdot \bar{p} \tilde{\vec{v}} = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{d}{dz} (\bar{p} \tilde{w}) = 0, \quad \therefore \bar{p} \tilde{w} = \text{常数}$$

由于 $\tilde{w}(0) \equiv 0$, 因而 $\tilde{w}(z) = 0$ 。

$$(5.10) \rightarrow f \vec{k} \times \tilde{\vec{v}}_h = -\frac{1}{\rho} \nabla_h \bar{p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho w'' \vec{v}_h'')$$

$$-f^* \tilde{u} = -g - \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial}{\partial z} (-\rho w'' w'')$$

式中 $f^* = 2 \Omega \cos \varphi$ 。自然, 后一个方程可以再进一步简化成静力方程, 即

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{p} g \quad (5.29)$$

引用地转风关系式

$$\tilde{\vec{V}}_g = \frac{1}{f\bar{\rho}} \vec{k} \times \nabla_h \bar{p} \quad (5.30)$$

和(5.11)所表示的 Reynolds 应力的记号

$$\vec{\tau}_z = \vec{\tau} = \vec{i} \tau_{zx} + \vec{j} \tau_{zy} = \vec{i} \overline{(-\rho w''u'')} + \vec{j} \overline{(-\rho w''v'')}$$

则有

$$f \vec{k} \times (\tilde{\vec{V}}_h - \tilde{\vec{V}}_g) = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} \quad (5.31)$$

这就是著名的 Ekman 方程。其上下界条件为：在 $z = z_0$ (地面粗糙度参数) 处

$$\tilde{\vec{V}}_h = 0, \quad \vec{\tau} = \vec{\tau}_0$$

在边界层顶 $z = z_B$ 处

$$\tilde{\vec{V}}_h = \tilde{\vec{V}}_{gB}, \quad \vec{\tau} = 0$$

$$(5.19) \rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial z} \overline{(\rho w''\theta'')} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial T} \rho Q\right)} - \tilde{\vec{V}}_h \cdot \nabla_h \bar{\theta}$$

与 Reynolds 应力相似，定义感热的涡动通量

$$H_s = \overline{\rho w''\theta''}$$

则有

$$\frac{\partial H_s}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial T} \rho Q\right)} - \tilde{\vec{V}}_h \cdot \nabla_h \bar{\theta} \quad (5.32)$$

上下界条件为

$$H_s|_{z=z_0} = H_{s0}, \quad H_s|_{z=z_B} = H_{sB}$$

$$(5.23) \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho w'' q''}) = \overline{S}$$

令水汽的涡动通量为

$$E_w = \overline{\rho w'' q''}$$

则有

$$\frac{\partial E_w}{\partial z} = \overline{S}$$

以及上下界条件

$$E_w|_{z=z_0} = E_{w0}, \quad E_w|_{z=z_B} = E_{wB}$$

综上所述, 在 Ekman 层中有下方程组

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = f \rho \vec{k} \times (\vec{V}_h - \vec{V}_g)$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \rho Q - \vec{V}_h \cdot \nabla \rho \nabla_h \theta$$

$$\frac{\partial E_w}{\partial z} = \overline{S}$$

式中所有的表示平均的记号都略去不写了。

在常物通层中则有

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_w}{\partial z} = 0$$

(5.35)

这样,为了考虑湍流脉动的影响,在天气预报方程组中又引进了动量、总热和水汽的涡动通量 $\bar{u}$ 、 H_s 和 E_w 等这些新变量。倘若直接采用平均运动的变量来表示这些湍流通量,则可建立一称之为 α 阶闭合的方程组。倘若为使方程组闭合,另外又引入了表示这些湍流通量的新方程,而那些新方程中又含有扰动量的 α 阶相关,在 α 阶相关的一定假定下使方程组得以闭合,则称为 α 阶闭合的方程组。类似地,还可以求得更高阶的闭合方程组。

§5.2 最简单的一阶闭合方程组

A. 总体公式

将包含有湍流摩擦力作用在内的水平运动方程写在模式的最低一层(图5.1中的 k 位面)上,其中的涡动动量输送项可表示成

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)_k = -g \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right)_k$$

$$\approx -g \frac{\bar{u}_{k+1} - \bar{u}_{k-1}}{2\Delta p}$$

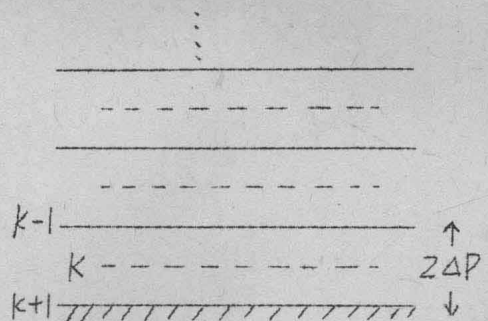


图5.1 模式铅五分层示意图

一般的模式中 Δp 较大, $k-1$ 位子在边界层之上,故 $\bar{u}_{k-1} = 0$ 。 $k+1$ 位子即为地面, $\bar{u}_{k+1} = \bar{u}_s$ 。因此

$\vec{c}_{k+1} = \vec{c}_s$ 。因此

$$-g \left(\frac{\partial \vec{c}}{\partial p} \right)_k \simeq -\frac{g}{2\alpha p} \vec{c}_s$$

若设地面应力 $\vec{c}_s$ 平行于地面风并与拖曳系数 C_D 成正比，即

$$\vec{c}_s = \rho_s C_D V_s \vec{V}_s \quad (5.36)$$

则方程组并没有增加新变量，因为 $\vec{c}_s$ 可由模式中的地面风来推求。模式中的地面风可由模式中高层风的外推求得或对面地转风加以摩擦订正求得。

类似地，地面感热通量和地面水汽通量的总体公式可写成：

$$H_{s,s} = \rho_s c_H V_a (T_s - T_a) \quad (5.37)$$

$$E_{w,s} = \rho_s C_E V_a (q_s - q_a) \quad (5.38)$$

式中 C_H 和 C_E 为无因次经验系数， T_s 为地面水温； q_s 为相应于 T_s 的饱和比湿； V_a 、 T_a 和 q_a 为测风高度上的风速、气温和比湿。在大气环流模式中无因次系数 C_D 、 C_H 和 C_E 的数量级为 10^{-3} 。

采用反映摩擦总效应的总体公式来使方程组闭合，这种方法虽是十分简单，但因斜压性和近地层层结非中性的缘故，误差较大。