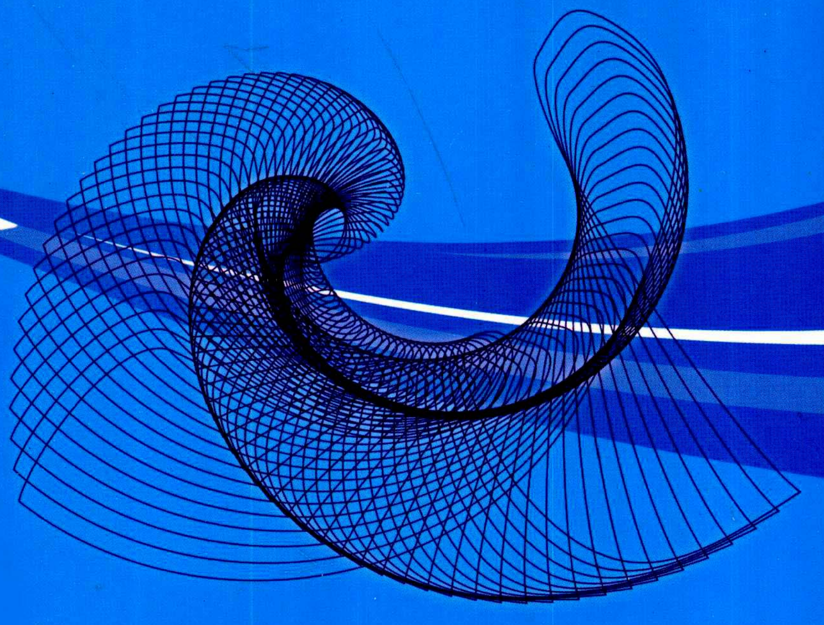
独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学

上册

主　编　夏亚峰

副主编　杨　宏



科学出版社
www.sciencep.com

独立学院应用型创新人才培养系列规划教材

高等数学

（上册）

主　编　夏亚峰
副主编　杨　宏

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是在高等教育大众化和办学层次多样化的新形势下，结合工科本科高等数学的教学基本要求，在独立学院多年教学经验的基础上编写而成的.

全书分为上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用.下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程、曲线积分与曲面积分、数学建模初步.节后配有习题，书后附有部分习题答案.全书尽量削枝强干、分散难点，力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂.

本书可供工科各专业学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/夏亚峰主编.—北京：科学出版社，2010.8
(独立学院应用型创新人才培养系列规划教材)
ISBN 978-7-03-028756-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①夏… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第163982号

责任编辑：李鹏奇 滕亚帆 王国华／责任校对：张凤琴
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年8月第一版 开本：B5(720×1000)
2010年8月第一次印刷 印张：31
印数：1—3 500 字数：610 000

定价：48.00元(上、下册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书是面向独立学院工科类各专业学生编写的高等数学教材.

随着我国高等教育的大众化和办学层次的多样化,因材施教已成为当前教学改革和课程建设的重要内容之一.本书根据国家质量工程全面提高本科生素质教育的指导思想,结合工科本科高等数学的教学基本要求,在独立学院多年教学经验的基础上编写而成.近年来的教学实践与研究表明,独立学院的数学教学必须与独立学院的人才培养层次和模式紧密联系.因而本书的编写不仅强调学生掌握高等数学的基本概念、基本方法与基本技能,而且强调培养学生利用数学方法分析和解决工程实际问题的能力.

本书分为上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用.下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程、曲线积分与曲面积分、数学建模初步,下册中部分内容可根据教学需要适当删减.节后配有习题,书后附有部分习题答案.

本书在编写上尽量体现以下特点:

(1) 从独立学院工科类专业学生的基础出发,适度弱化一些纯数学理论及一些有难度的定理的证明,而代之以直观的几何说明;

(2) 结合独立学院工科类专业学生的实际需要,在编写过程中尽量削枝强干、分散难点,力求结构严谨、逻辑清晰、通俗易懂;

(3) 侧重于培养学生的应用意识与应用能力,增加数学建模实例与训练,在例题与习题选编上,侧重于应用,未编入理论性较强的证明题与概念题.

参加本书编写的有夏亚峰、杨宏、玄海燕、罗双华、李冬娜、李建生.

本书的编写得到了兰州理工大学技术工程学院的支持与帮助,在此表示衷心的感谢.

本书中的不妥及错误之处,真诚希望读者批评指正.

编　者

2010 年 6 月

目　录

第1章　函　　数

函数是描述变量之间相互依存关系的数学概念，它是微积分研究的基本对象，在中学数学中，我们对函数的概念和性质已有初步了解. 本章首先介绍数集的概念，然后进一步阐述函数的定义，介绍函数的性质以及反函数、复合函数、初等函数等概念，这些内容都是学习本课程的基础.

1.1　实数集与区间

高等数学研究的对象是定义在实数集上的函数，为此，现简要叙述实数集的有关概念.

1.1.1　实数集

数学上将具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**，集合中的每一个对象称为该集合的元素.

通常，用大写拉丁字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示集合中的元素. 通常集合表示如下：设 X 是具有某种特性的元素 x 的全体组成集合，就记作

$$X=\{x \mid x\text{ 所具有的特性}\}.$$

如果集合中的元素都是数，此集合称为数集. 自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 都是数集. 本课程涉及的集合都是数集，讨论的量都是实数集中的数.

实数集 $\mathbf{R}$ 有如下一些主要性质：

(1) 实数集对加、减、乘、除四则运算封闭，及任意两个实数的和、差、积、商(分母不为 0)仍然是实数.

(2) 实数集是有序的，即任意两个实数 a,b 必满足下述三个关系之一：

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b.$$

(3) 实数的大小关系有传递性，即若 $a>b,b>c$，则 $a>c$.

(4) 实数具有阿基米德(Archimedes)性，即任意两个实数 a,b，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

(5) 实数集具有稠密性，即任意两个不相等实数之间必有另一个实数，此实数既可以是无理数，也可以是有理数.

(6) 实数集中的数可以由数轴上的点互相唯一表示，如果集合中的元素由点

表示,此集合称为**点集**.

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,实数 a 的绝对值 $|a|$ 就是实数 a 的点到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质:

(1) $|a|=|-a|\geqslant 0$;当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $|a|<h \Leftrightarrow -h<a<h$; $|a|\leqslant h \Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h\ (h>0)$.

(4) 对于任意两个实数 a,b,有如下三角不等式:

$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

(5) $|ab|=|a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

1.1.2 区间与邻域

1. 区间

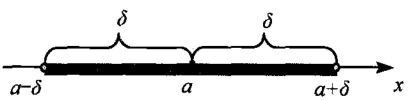
区间是特殊数集,中学数学中对区间的概念已经较为熟悉,以后经常遇到用区间表示一种特定的数集. 如:

$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$,即全体实数 $\mathbf{R}$.

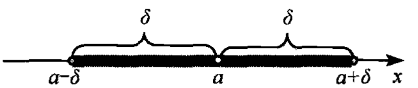
$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$,即满足 $a\leqslant x<b$ 的全体实数 x 的集合.

2. 邻域

邻域也是高等数学中常用的数集,在表示点 a 附近的点时设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,称点集 $E=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 **δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$.



称点集 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=\{x\,|\,a-\delta<x<a\}\cup\{x\,|\,a<x<a+\delta\}$ 为点 a 的**空心 δ 邻域**,记作 $U^0(a,\delta)$.



此外,我们还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右半邻域 $U_+(a)=\{x\,|\,a\leqslant x<a+\delta\}$;

点 a 的 δ 右半空心邻域 $U_{+}^{0}(a)=\{x|a<x<a+\delta\}$；

点 a 的 δ 左半邻域 $U_{-}(a)=\{x|a-\delta<x\leqslant a\}$；

点 a 的 δ 左半空心邻域 $U_{-}^{0}(a)=\{x|a-\delta<x<a\}$.

习 题 1.1

1. 用集合描述法表示下列集合.

(1) 方程 $\sin x=0$ 全体实数解的集合；

(2) 2 的平方根组成的集合；

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内部(不包含圆周)一切点的集合；

(4) 直线 $y=2x-1$ 与直线 $y=-x+1$ 交点的集合.

2. 下列集合哪些是空集？

$A=\{x|x^2=1\}$； $B=\{x|x^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$； $C=\{x||\sin x|>1\}$；

$D=\{(x,y)|x^2+y^2=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$；

$E=\{(x,y)|y=x^2,x-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$；

$F=\{x|x>1$ 且 $x<-1\}$.

3. 下列写法是否正确？不正确的话，请改正.

(1) $\{0\}=\varnothing$； (2) $1\subset\{1,2\}$；

(3) $\{1\}\in\{1,2\}$； (4) $\varnothing\subset\{1,2\}$.

4. 设 $X=(-2,+\infty)$，$A=[0,4)$，$B=[4,9]$，$C=(-\infty,0)$，求：

$$A\cup B,\quad A\cap B,\quad A^C,\quad B^C,\quad A^C\cup B^C,\quad A^C\cap B^C.$$

1.2 函数与初等函数

关于函数概念，中学数学中已有了解，本节将进一步讨论.

1.2.1 函数的概念

定义 1.1 给定两个实数集 X,Y，若有一个对应法则 f，使得 X 内每一个数 x，都有唯一一个数 $y\in Y$ 与之相对应，则称 f 是定义在数集 X 上的**函数**，记作

$$f:X\to Y,$$

数集 X 称为函数 f 的**定义域**，x 所对应的数 y，称为 f 在点 x 的**函数值**，记作 $f(x)$，全体函数值的集合

$$f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 f 的**值域**. 习惯上把函数表示为 $y=f(x)$，其中 x 是自变量，y 是因变量.

从函数的定义可见，确定函数有两个要素：一个是定义域；另一个是对应法则. 两个函数当且仅当定义域和对应法则相同时，这两个函数才相等，无论使用什么样

函数的记号.

在实际问题中,往往用公式表示的解析形式函数,如 $y=f(x)=\sin x+x^2$,这种函数,如果没有附加条件,其定义域就是使得公式成立的一切 x 值.

例 1.1 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须表示函数的公式有意义,有

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi, \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\end{cases}$$

其公共解为

$$-4\leqslant x<\pi \quad 或 \quad 0<x<\pi,$$

即函数的定义域为$[-4,\pi)\cup(0,\pi)$.

1.2.2 函数表示法

在中学数学课程里,函数表示法主要有三种,即解析法(公式法)、列表法、图像法.

有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达,这类函数通常叫分段函数.下面给出几个常见的分段函数.

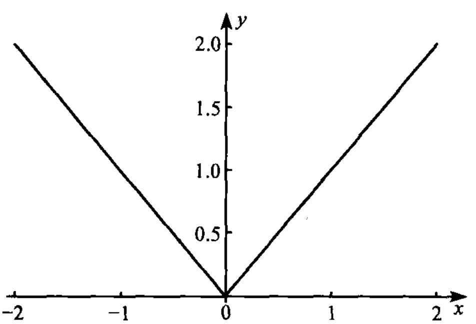


图 1.1

函数 $y=|x|$ 可用分段函数

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

表示,其图像如图 1.1 所示.

符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

是分段函数.而 $y=|x|$ 可表示为 $y=x\operatorname{sgn}x$,其图像如图 1.2 所示.

对于取整函数

$$y=[x],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.例如

$$[3]=3,\quad [3.1415]=3,\quad \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=-1,\quad [0.21]=0.$$

可见 $y=[x]=n, n\leqslant x<n+1(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,由此,我们可以画出函数 $y=[x]$的图像(图 1.3).

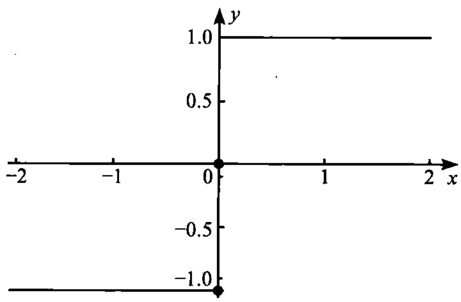


图 1.2

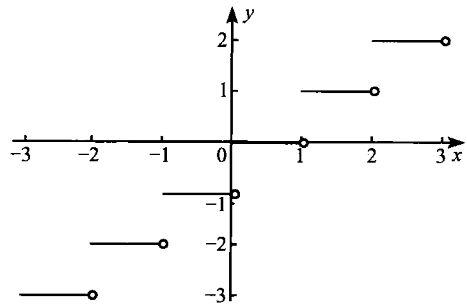


图 1.3

例如，电信部门规定的市内电话收费标准是：前 3 分钟收费 0.2 元，不足 3 分钟按 3 分钟收费，3 分钟以后，每分钟收费 0.2 元. 这样打电话用时 t 与费用 s 的函数关系是

$$s=\begin{cases}0.2, & 0<t<3,\\ 0.2([t-3]+1)+0.2, & t\geqslant 3.\end{cases}$$

例 1.2　某工厂生产某产品年产量为 x 台，每台售价 500 元，当年产量超过 800 台时，超过部分只能按 9 折出售. 这样可多售出 200 台，如果再多生产，本年就销售不出去了. 试写出本年的收益(入)函数.

解　因为产量超过 800 台时售价要按 9 折出售，超过 1000 台(即 800 台+200 台)时，多余部分销售不出去，从而超出部分无收益. 因此，要把产量分三阶段来考虑. 依题意，收益(入)函数为

$$R(x)=\begin{cases}500x, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 500\times 800+0.9\times 500(x-800), & 800<x\leqslant 1000,\\ 500\times 800+0.9\times 500\times 200, & x>1000\end{cases}$$

$$=\begin{cases}500x, & 0\leqslant x\leqslant 800,\\ 400000+450(x-800), & 800<x\leqslant 1000,\\ 490000, & x>1000.\end{cases}$$

有些函数难以用解析法、列表法、图像法表示，如定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

1.2.3　函数的四则运算

给定两个函数 $y=f(x)$，定义域 D_1 和 $y=g(x)$，定义域 D_2，记作 $D=D_1\cap D_2\neq\Phi$，定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积、商运算如下：

$$F(x)=f(x)+g(x),\quad x\in D;$$

$$G(x)=f(x)-g(x),\quad x\in D;$$
$$H(x)=f(x)g(x),\quad x\in D;$$
$$L(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in D-\{x\mid g(x)=0,x\in D_2\}.$$

函数四则运算的作用是将简单的函数线性组合成形式复杂的函数.

1.2.4 复合函数

例如,一质量为 m 的质点,以速度 v 做直线运动,其动能是函数 $T=\frac{1}{2}mv^2$,如果质点做匀速运动,则其速度又是时刻 t 的函数 $v=at$,因而 T 通过 v **成为时刻 t 的函数** $T=\frac{ma^2}{2}t^2$.

又如,$y=\sqrt{x^2}$ 可看成是由 $y=\sqrt{u}$,$u=x^2$ 组合而成的函数.

一般的,设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,u 又是 x 的函数,$u=\varphi(x)$,如果函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 D_1 包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D 内,即 $D_1\subset D$,则将 x 通过 u 与 y 的对应关系成为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**,记作
$$y=f[\varphi(x)],$$
称 x 为自变量,u 为中间变量,$u=\varphi(x)$ 为内函数,$y=f(u)$ 为外函数.

函数 $y=\arctan x^2$ 可以看成是由函数 $y=\arctan u$,$u\in(-\infty,+\infty)$ 和 $u=x^2$,$x\in(-\infty,+\infty)$ 复合而成的函数,其中内函数 $u=x^2$ 的值域 $[0,+\infty)$ 包含在外函数 $y=\arctan u$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内.

复合函数也可由两个以上函数复合. 例如,$y=\ln\ln x^2$ 可以看成是由函数 $y=\ln v$,$v=\ln u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的函数,这里 u,v 都是中间变量.

例 1.3 设函数 $f(\sin x)=\cos 2x$,求 $f(x)$.

解 因为
$$f(\sin x)=\cos 2x=1-2\sin^2 x,$$
所以
$$f(x)=1-2x^2.$$

函数复合的作用是将简单的函数通过复合形式组合成为复杂的函数,反过来在研究这样的复杂的函数时,通常拆分为一些简单的函数,通过研究简单的函数,从而得到复杂的函数的结果.

1.2.5 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 因为 W 是函数值的集合,所以对于任一 $y\in W$,必定有 $x\in D$ 使得 $f(x)=y$ 成立. 然而,这样的 x 可能不止一个. 从中

学所学过的函数 $y=\sin x$ 的图形可见，在 $W=[-1,1]$ 上任取一点 y，作与 x 轴平行的直线，此直线和 $y=\sin x$ 图像的交点不止一个.

如果，对于任一 $y\in W$，在 D 中有唯一的 x 满足

$$f(x)=y,$$

这样，就得到一个新函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，称函数 $y=f(x)$ 为其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数. 在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，自变量是 y，因变量是 x，定义域为 W，值域为 D.

函数 $y=f(x)$ 和其反函数的 $x=f^{-1}(y)$ 图像画在同一坐标平面上是互相重合的，表示同一条曲线.

事实上，在函数表示时，我们习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 如果把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，即 y 改成 x、x 改成 y，反函数就变成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式，此时 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上，这两条曲线关于直线 $y=x$ 对称.

一般来说，一个函数 $y=f(x)$ 不一定有反函数，只有其对应关系是一一对应时存在反函数，此时，反函数和直接函数互为反函数. 如定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的正弦函数 $y=\sin x$，其值域 $[-1,1]$，对任一 $y\in[-1,1]$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有无穷多个 x 满足关系 $y=\sin x$，可见正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数. 如果正弦函数 $y=\sin x$ 定义域限制在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，值域还是 $[-1,1]$，这时，函数 $y=\sin x$ 存在反函数，即 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$y\in[-1,1]$，函数 $y=\sin x$ 存在反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 同样的情况，有反余弦函数 $y=\arccos x$，$x\in[0,\pi]$ 等.

1.2.6 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数有下面的六类，这些函数在中学数学中读者已熟悉.

常量函数 $y=c$（c 是常数）；

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 是实数）；

指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1$）；

对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1$）；

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$；

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为**初等函数**. 例如, $y=\sin^2(\ln x+2)$, $y=\sqrt[3]{\tan\frac{x}{2}}$, $y=\lg(e^x+\sqrt{1+\sin^2 x})$等.

不是初等函数的函数,称为**非初等函数**. 例如

$$f(x)=1+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\quad -1<x<1.$$

前面所说狄利克雷函数,以及

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & -1<x\leqslant 2,\\ x^3-3, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

都是非初等函数.

并不是分段函数就一定是非初等函数,如

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是初等函数,因为它是初等函数 $y=\sqrt{u}$和 $u=x^2$ 的复合函数.

习　题　1.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=-2^x+3$;　(2) $y=e^{-x}-1$;

(3) $y=|x|-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x-4}}$;　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$;

(5) $y=\ln(x-3)+1$;　(6) $y=2\sin(3x+\pi)-1$;

(7) $y=\tan(2x-\pi)$;　(8) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}+\arctan 2x$.

2. 判断下列各题中函数是否相同.

(1) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=2^{\log_2 x}, g(x)=\arcsin(\sin x)$;

(3) $f(x)=x+2, g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

(4) $f(x)=\lg(3-x)-\lg(x-1), g(x)=\lg\dfrac{3-x}{x-1}$.

3. 确定函数 $f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ -\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\end{cases}$ 的定义域,求 $f\left(\frac{1}{2}\right), f(2), f(-1), f\left(-\frac{3}{2}\right)$,并作出函数的图形.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x+3$;　(2) $y=x^2+1(x\leqslant 0)$;

(3) $y=x^3-1$;　(4) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;

(5) $y=3\sin 2x\left(\frac{1}{4}\pi\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\pi\right)$；　　(6) $y=\frac{1}{1+2^{-x}}$.

5. 设 $f(x)=4x-5, g(x)=x^2$，求下列复合函数的值和公式.

(1) $f[g(0)]$；　　(2) $g[f(0)]$；　　(3) $f[g(x)]$；

(4) $g[f(x)]$；　　(5) $f[f(x)]$；　　(6) $g[g(x)]$.

6. 求下列函数构成的复合函数，并指出定义域.

(1) $y=e^x, u=-\sqrt{1+\sin x}$；　　(2) $y=\arccos u, u=\frac{x+1}{x-1}$；

(3) $y=\ln u, u=1-e^x$；　　(4) $y=\sqrt{u}, u=x^2-3$.

7. (1) 设 $f(x-1)=x^2+4x-1$，求 $f(x)$；(2) 设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x)), g(f(x))$.

9. 根据我国个人所得税规定：个人工资、薪金所得应缴纳个人所得税. 应纳税所得额的计算为：工资、薪金所得，以每月收入额减除费用 800 元后的余额，为应纳税所得额. 下列是税率表的一部分.

个人所得税税率表(工资、薪金所得适用)

级　数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元到 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元到 5000 元的部分	15

若某人的工资、薪金所得为 x 元(不超过 5800 元)，求他应缴纳的税款 y 与他的工资、薪金所得 x 之间的关系.

1.3 具有某些特性的函数

函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性是函数的基本几何特性，由这些几何特性，可以初步确定函数曲线和描述函数曲线的形态.

1.3.1 有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于数集 $X(X\subset D)$ 内的任一 x，如果存在常数 M，使得 $f(x)\leqslant M(\geqslant M)$，称函数 $f(x)$ 在数集 X 上有**上界**(**下界**)，常数 M 为上界(下界). 函数 $f(x)$ 在数集 X 上有上界和下界，统称**有界**.

函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界，可以等价地表示成：如果存在常数 $M\geqslant 0$，使得任意 $x\in X$ 时，都有 $|f(x)|\leqslant M$. 如 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$|\sin x|\leqslant 1$，表示函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

函数有界,其上界或下界不一定唯一.

例 1.4 验证函数 $f(x)=\dfrac{5x}{2x^2+3}$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证明 当 $x\neq 0$ 时,有

$$|f(x)|=\left|\frac{5x}{2x^2+3}\right|=\frac{5|x|}{2x^2+3}\leqslant\frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|}\leqslant 3.$$

当 $x=0$ 时,有

$$|f(0)|=\left|\frac{1}{3}\right|\leqslant 3.$$

因此 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$|f(x)|\leqslant 3$,即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

应该注意的是,讨论函数的有界性,需要考虑自变量的范围.例如,函数 $f(x)=e^x$ 在区间$(1,2)$内有界,但在$(-\infty,+\infty)$内无界.

因为,当 $x\in(1,2)$时,$|f(x)|=|e^x|<e^2$,表示函数 $f(x)=e^x$ 在区间$(1,2)$内有界.

函数 $f(x)=e^x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$内无界,需要验证:

对于任意一个正数 M,存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,使得$|f(x_0)|=e^{x_0}>M$.

事实上,对于任意给定的正数 M(无论 M 是多大的正数),取 $x_0=\ln(M+1)\in(-\infty,+\infty)$,可使得$|f(x_0)|=e^{\ln(M+1)}=M+1>M$.

1.3.2 单调函数

设函数 $f(x)$的定义域为 D,对于数集 $X(X\subset D)$上的任意两点 x_1,x_2,如果 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$在 X 上**单调递增**(**单调递减**),也称函数 $f(x)$在 X 上是**单调递增函数**(**单调递减函数**).

如果 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$在 X 内**严格单调递增**(**严格单调递减**).

单调递增和单调递减统称为**单调**.

考查一个函数在数集 X 上是否单调,就需要考查数集 X 上的任意两点 x_1,x_2,设 $x_1<x_2$,是否有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),即

$$f(x_1)-f(x_2)\leqslant 0 \quad 或 \quad f(x_1)-f(x_2)\geqslant 0.$$

从函数的图像上看,单调递增函数的图像是沿 x 轴正向上升的,单调递减函数的图像是沿 x 轴正向下降的.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增,称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调递增区间**;$f(x)$ 在区间 I 上单调递减,称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调递减区间**. 单调递增区间和单调递减区间统称为**单调区间**.

例 1.5 确定函数 $f(x)=3(x^2-1)$ 的单调区间.

解 对于函数定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任意的 x_1,x_2,有

$$f(x_1)-f(x_2)=3(x_1^2-1)-3(x_2^2-1)=3(x_1^2-x_2^2)=3(x_1-x_2)(x_1+x_2).$$

当 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ 时,设 $x_1<x_2$,则有 $(x_1-x_2)<0,x_1+x_2<0$,于是,$f(x_1)-f(x_2)=3(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$,函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递增.

当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 时,设 $x_1<x_2$,则有 $(x_1-x_2)<0,x_1+x_2>0$,于是,$f(x_1)-f(x_2)<0$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0]$,单调递减区间为 $[0,+\infty)$.

需要注意的是:上述函数在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数,它的单调区间分别是 $(-\infty,0]$ 和 $[0,+\infty)$,在 $(-\infty,0]$ 上单调递增,在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

1.3.3 奇函数和偶函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称,如果对于任意的 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x),$$

称函数 $y=f(x)$ 为**奇函数**;如果对于 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x),$$

称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如,函数 $y=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数(图 1.4),$y=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数(图 1.5).

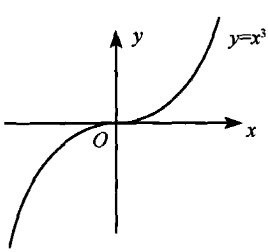


图 1.4

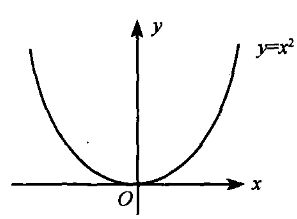


图 1.5

正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数,余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数,反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是奇函数,反正切函数 $y=\arctan x$ 是奇函数,反余弦函数 $y=\arccos x$ 既不