Б. П. 吉米多维奇

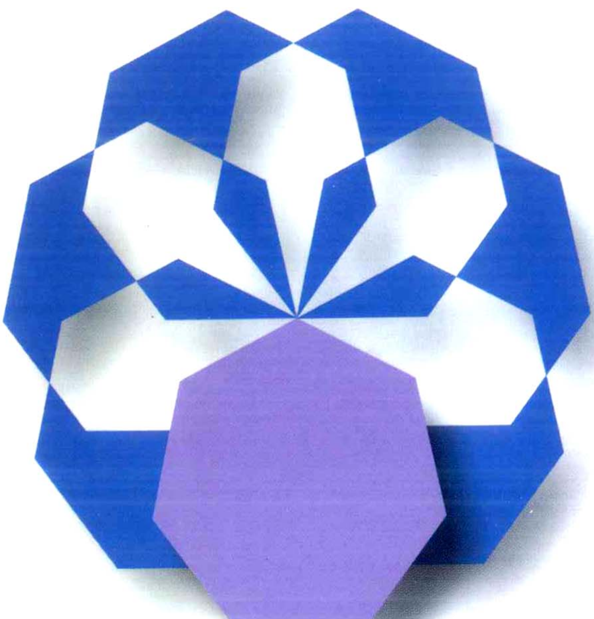
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题集题解

（五）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审



山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(五)

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (5)/费定晖编.—2版.—济南:山东科学技术出版社,1999.9(2003.2重印)

ISBN 7-5331-0103-0

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43956号

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(五)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路16号 邮编250002)

山东科学技术出版社发行

(济南市玉函路16号 电话2064651)

济南申汇印务有限责任公司印刷

*

787mm×1092mm 32开本 22.25印张 520千字

2003年2月第2版第13次印刷

印数:217601—225600

ISBN 7-5331-0103-0

O·9 定价:19.80元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。

如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第六章　多变量函数的微分法 …… 1

§1. 多变量函数的极限. 连续性 …… 1

§2. 偏导函数. 多变量函数的微分 …… 39

§3. 隐函数的微分法 …… 132

§4. 变量代换 …… 203

§5. 几何上的应用 …… 299

§6. 台劳公式 …… 353

§7. 多变量函数的极值 …… 378

第七章　带参数的积分 …… 484

§1. 带参数的常义积分 …… 484

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性 …… 519

§3. 广义积分中的变量代换. 广义积分号下微分法及积分法 …… 567

§4. 尤拉积分 …… 645

§5. 福里叶积分公式 …… 686

第六章　多变量函数的微分法

§1. 多变量函数的极限．连续性

1°　多变量函数的极限　设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义．若对于任何的 $\varepsilon>0$ 存在有 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$、使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$〔其中 $\rho(P,P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离〕,则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2°　连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的．

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续,则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的．

3°　一致连续性　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta>0$,使得对于域 G 中的任何点 P',P'',只要是

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立,则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的．

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的．确定并绘出下列函数存在的域:

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$$y\geqslant 0,$$

如图 6·1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内.

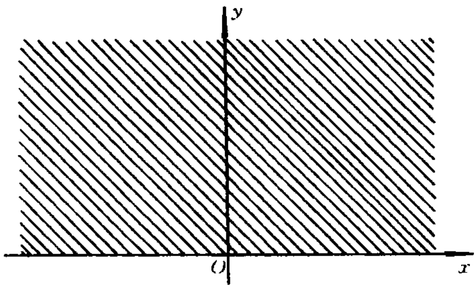


图 6·1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式

$$|x|\leqslant 1,\ |y|\geqslant 1$$

的点集，如图 6·2 阴影部分所示，包括边界(粗实线)在内.

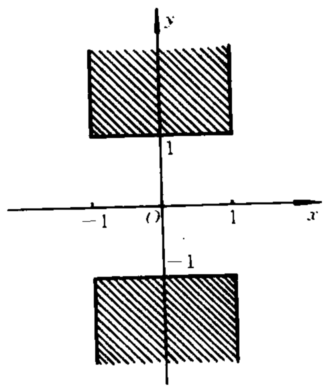


图 6·2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

如图 6·3 阴影部分所示，包括圆周在内．

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图 6·4 所示，不包括圆周（虚线）在内．

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的点集，如图 6·5 所示的环，包括边界在内．

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的点集．由 x^2+y^2

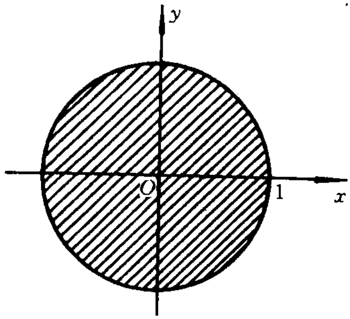


图 6·3

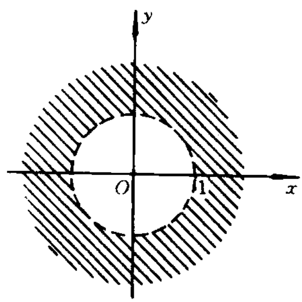


图 6·4

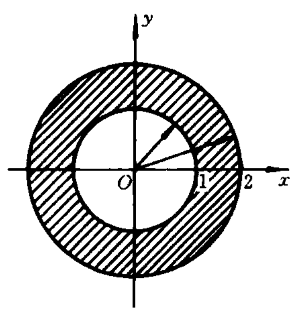


图 6·5

$\geqslant x$得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图6·6阴影部分所示.

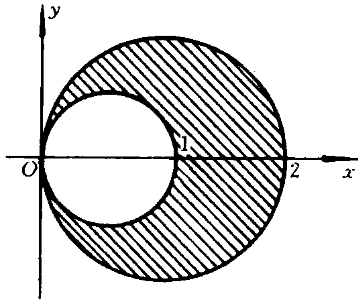


图 6·6

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集，如图6·7阴影部分所示，包括边界在内.

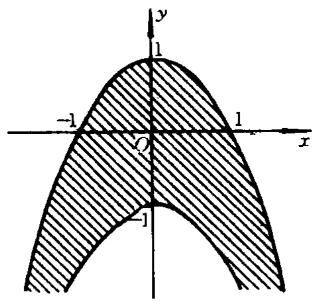


图 6·7

3143. $u=\ln(-x-y)$.

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图6·8阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内.

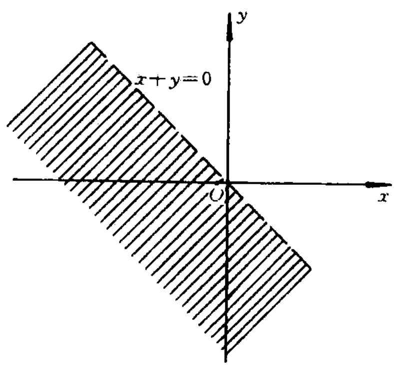


图 6·8

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant 1$$

或 $|y|\leqslant|x|\ (x\neq 0)$ 的点集，这是一对对顶的直角，如图 6·9 阴影部分所示，不包括原点在内．

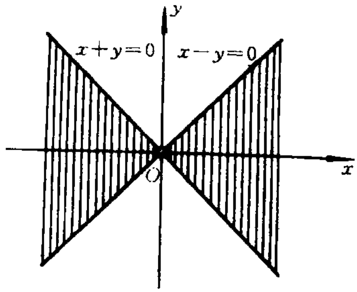


图 6·9

3145. $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$$

的点集，由 $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$ 得 $|x|\leqslant|x+y|\ (x\neq -y)$，即 $x^2\leqslant x^2+2xy+y^2$ 或 $y(y+2x)\geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -2x, \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} y\leqslant 0, \\ y\leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x，y 不能同时为零，这是由直线：$y=0$ 和 $y=-2x$ 所围成的一对对顶的角，如图 6·10 阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内．

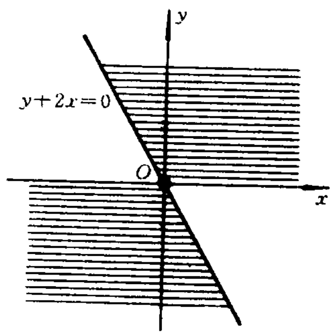


图 6·10

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 及 } |1-y|\leqslant 1(y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2 \end{cases} \text{和}$$

$$\begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$ 和直线 $y=2$ 所围成的曲边三角形，如图 6·11 阴影部分所示，不包括原点在内．

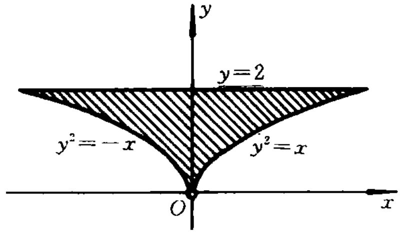


图 6·11

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解　存在域为满足不等式

$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$

或 $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$ 的点集，如图 6·12 所示的同心环族．

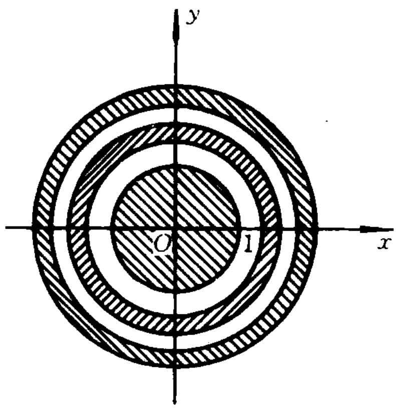


图 6·12

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$$

（x,y 不同时为零）

或

$x^2+y^2-z^2\geqslant 0$

（x，y 不同时为零）

的点集，这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面，如图 6・13 阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点．

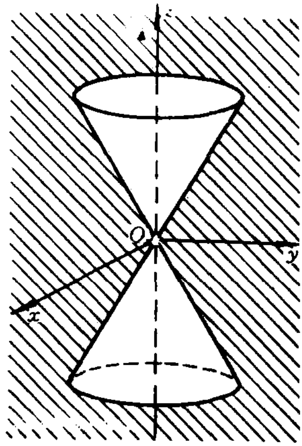


图 6・13

3149. $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集，即

$x>0,y>0,z>0$；或 $x>0,y<0,z<0$；

$x<0,y<0,z>0$；或 $x<0,y>0,z<0$.

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面．由于图形为读者所熟知，故省略．以下有类似情况，不再说明．

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$-x^2-y^2+z^2>1$ 的点集．这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图 6・14 阴影部分所示，不包括界面在内．

作出下列函数的等位线：

3151. $z=x+y$.

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示.

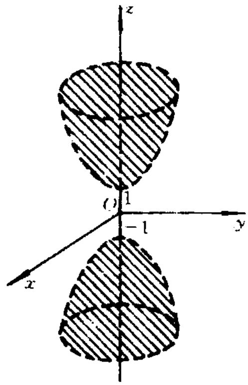


图 6·14

3152. $z=x^2+y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2$$

$$(a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为原点；当 $a>0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族.

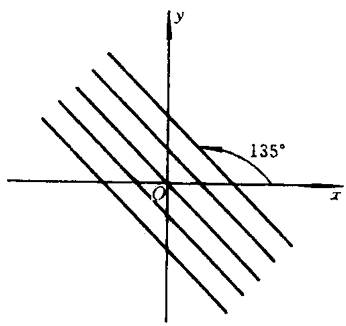


图 6·15

3153. $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x$，$y=-x$.

当 $k\neq 0$ 时为以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k>0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k},0)$，$(\sqrt{k},0)$，当 $k<0$ 时顶点为 $(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\sqrt{-k})$.

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2(a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为直线 $x+y=0$. 当 $a\neq 0$ 时为与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx(x\neq 0),$$

不包括 Oy 轴在内.

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2(a>0).$$

长半轴为 a,短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$,焦点为 $\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2(a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$. 当 $a>0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等边双曲线族,顶点为 $(-a,-a)$ 及 (a,a).

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+y=k,$$

其中 k 为一切实数. 当 $x\geqslant 0$ 时为 $x+y=k$;当 $x<0$

时为$-x+y=k$. 这是顶点在 Oy 轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图 6 • 16 所示.

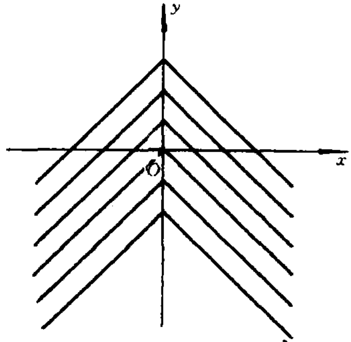


图 6 • 16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$|x|+|y|-|x+y|=a$.

因为恒有$|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant 0$.

当 $a=0$ 时，由$|x|+|y|=|x+y|$两边平方即得

$$xy\geqslant 0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内.

当 $a>0$ 时，$xy<0$，分下面四组求解：

(1)$x>0,y<0,x+y\geqslant 0,|x|+|y|-|x+y|=a$，

解之得 $y=-\dfrac{a}{2}$；

(2)$x>0,y<0,x+y\leqslant 0,|x|+|y|-|x+y|=a$，

解之得 $x=\dfrac{a}{2}$；

(3)$x<0,y>0,x+y\geqslant 0,|x|+|y|-|x+y|=a$，

解之得 $x=-\dfrac{a}{2}$；

(4)$x<0,y>0,x+y\leqslant 0,|x|+|y|-|x+y|=a$，

解之得 $y=\dfrac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6·17 所示.

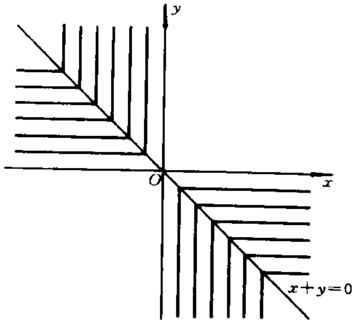


图 6·17

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k(x,y\text{ 不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k\neq 0).$$

当 $k=0$ 时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$，从而等位线为 $x=0$ 即 Oy 轴，但不包括原点.

当 $k\neq 0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点（但不包括原点在内）的圆束，圆心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$，半径为 $\left|\frac{1}{k}\right|$，如图 6·18 所示.

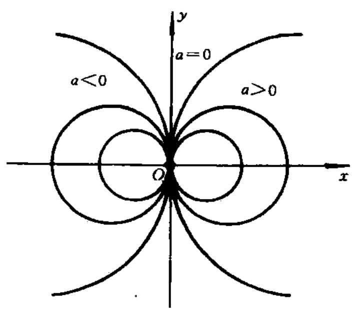


图 6·18

3161. $z=x^y(x>0)$.

解 等位线为曲线族