

断裂力学与裂纹扩展

姜偉之 編

北京航空学院第八研究室

一九八四年十月

目 录

第一章 绪 论

第二章 裂纹顶端附近的弹性应力场

2.1 引言	3
2.2 平面应变与平面应力问题	3
2.3 用复变函数解二维问题	5
2.4 威斯特噶尔德方法	8
2.4.1 I 型裂纹	9
2.4.2 II 型裂纹	14
2.4.3 III 型裂纹	15
2.5 多项式应力函数法	16
2.6 应力强度因子	20
附录 A2.1 平面问题应力函数的性质	21

第三章 线弹性断裂力学

3.1 引言	24
3.2 能量平衡理论	24
3.2.1 裂纹扩展力和脆性断裂的能量准则	26
3.2.2 裂纹扩展力与应力强度因子的关系	27
3.2.3 裂纹扩展力与柔度	28
3.3 断裂准则	30
3.3.1 脆性断裂准则	30
3.3.2 裂纹尖端塑性区估计	31
3.3.3 线弹性断裂力学的适用范围	34
3.4 复合型裂纹的断裂准则	36
3.4.1 最大拉应力理论	36
3.4.2 应变能释放率准则	38
3.4.3 应变能密度因子准则	40

第四章 应力强度因子计算

4.1 引言	43
4.2 普遍形式的复变应力函数	43
4.3 边界配位法	48
附录 A4.1 带椭圆孔受拉板的复应力函数	57
A4.2 椭圆裂纹的应力强度因子	64

第五章 弹塑性断裂力学

5.1 引言	66
5.2 J 积分	66
5.2.1 J 积分的定义	66
5.2.2 J 积分与裂纹尖端应力应变强度的关系	69
5.2.3 J 积分的能量解释和形变功率	73
5.2.4 弹塑性断裂分析中 J 积分的适用条件	78
5.3 裂纹顶端张开位移	79
5.3.1 裂纹尖端张开位移($CTOD$) 的定义	79
5.3.2 $CTOD$ 与 J 积分	83
5.3.3 屈服断裂的 $CTOD$ 分析	83
5.4 裂纹扩展阻力曲线	85
5.4.1 裂纹扩展阻力	85
5.4.2 断裂的能量准则	86
5.4.3 R 曲线的一些特点	87

第六章 疲劳裂纹扩展

6.1 引言	90
6.2 裂纹扩展准则	90
6.2.1 裂纹扩展的三个阶段	90
6.2.2 断裂表面形态	91
6.2.3 裂纹扩展模型	92
6.3 疲劳裂纹的弹塑性断裂力学模型	93
6.4 塑性区的性质	96
6.4.1 塑性区的位错结构	97
6.4.2 塑性区尺寸及形状	100
6.4.3 残余应力	101
6.5 疲劳裂纹扩展的定量描述和不扩展条件	102
6.5.1 不扩展条件	103
6.5.2 裂纹扩展速率	105
6.5.3 疲劳裂纹扩展中的瞬态效应	108

第七章 蠕变裂纹扩展

7.1 引言	112
7.2 蠕变裂纹扩展特征	112
7.3 蠕变裂纹扩展的定量描述	116
7.3.1 J^* 参量及其表达式	116
7.3.2 参考应力及其表达式	118
7.3.3 三种描述方法的比较	119

7.4 高温疲劳与蠕变—疲劳交互作用下的裂纹扩展	120
第八章 应力腐蚀与腐蚀疲劳裂纹扩展	
8.1 引言	125
8.2 应力腐蚀裂纹扩展的特征及过程	125
8.3 应力腐蚀裂纹的扩展速率及其门槛应力强度	126
8.4 腐蚀疲劳裂纹扩展	127
第九章 断裂韧性与裂纹扩展速率实验	
9.1 引言	129
9.2 平面应变断裂韧性 K_{IC}	129
9.2.1 原理和装置	129
9.2.2 试件的制备	135
9.2.3 试验步骤	135
9.2.4 K_{IC} 测试中的误差分析	136
9.3 临界 J 积分 J_{IC}	138
9.3.1 原理和装置	138
9.3.2 试件的制备	143
9.3.3 试验步骤	143
9.3.4 阻力曲线法	143
9.4 裂纹尖端临界张开位移 δ_c	145
9.4.1 原理及装置	145
9.4.2 试件要求	147
9.4.3 试验步骤	147
9.5 疲劳裂纹扩展速率 da/dN 及门槛值 ΔK_{th}	148
9.5.1 直读法	149
9.5.2 柔度测试法	150
9.6 应力腐蚀裂纹扩展速率 da/dt 和断裂韧性 K_{ISCC}	153

第一章 绪 论

断裂力学是弹、塑性力学用于裂纹体力学分析的一个重要分支，它和其他科学一样，都是生产实践提出了迫切要求而诞生的。

现代工程技术日益要求使用高强度材料，其中尤以航空工程最为突出。实践证明，这一趋势所带来的重要现象是在一系列工程领域中，产生灾难性断裂和破坏事件的机会大为增加。

从第二次世界大战以来，这类事例是屡见不鲜的。早期的著名事件有：40年美国全焊接“自由轮”的折断；50年美国北极星机壳在实验发射时发生爆炸以及在这期间和以后一系列高压瓶罐和大型桥梁的破坏等。

所有这些现象都是在载荷小于最大使用载荷，应力小于屈服应力的条件下产生的。这也就是说，按传统的强度计算方法，结构强度应该是足够的。但是，破坏还是发生了。正因为这样，这类灾难性事故的发生常常出人意外，它所造成的破坏也是惨重的。

经过长时间的分析研究，人们开始认识到：由于加工方面的原因，构件不可避免地存在初始裂纹。这样，就可能出现两种情况：

1. 承载能力小于设计载荷。在第一次施加设计载荷时，裂纹即快速扩展，招致结构的破坏。这就是静力强度不足。
2. 构件寿命小于检修周期。虽然在第一次施加设计载荷时，裂纹没有快速扩展，但在循环载荷作用下，裂纹仍然逐渐扩展，构件的承载能力逐渐降低，在检修周期到达以前，构件已不能负担最大使用载荷。这就是疲劳寿命不足。

为了保证构件的强度与寿命，应使以下两方面的条件得到满足：

1. 安全

- A. 在具有初始裂纹的情况下，构件能够承担设计载荷。
- B. 在具有临界裂纹的情况下，构件能够承担最大使用载荷。

2. 耐久

在裂纹从初始尺寸扩展到临界尺寸时的加载次数大于构件的使用寿命。

要正确无误地回答上述问题是不容易的。目前，也还只是在线弹性断裂领域内有较好的解答，应该说眼下的情况，离上述目标，还有漫长的道路。

现代断裂力学在发展过程中首先面临的一个问题是如何选择理想化的物理模型。因为它是建立在“缺陷理论”基础上的，这也就是认为断裂的发生是由于实际材料中存在不可避免的微小裂纹所造成的。传统的理想固体的边值问题是建立在没有缺陷的完整的连续介质的理想模型上的，其应力应变场分析可用弹性力学和塑性力学方法求解。虽然，在弹性和塑性力学中也处理固体中存在空穴或孔洞的边值问题，诸如带圆孔和椭圆孔的无限板拉伸问题。但它只涉及到变形前原先紧靠在一起的材料晶粒，在变形后仍然紧靠在一起。可是，如果一旦发生裂纹或实际材料中某一裂纹开始扩展，这时材料晶粒紧靠在一起的状态就不再保持。裂

纹开裂后，裂纹面相互脱开，形成新的自由表面，这就是说边界形式发生了变化。断裂力学的一个基本任务就是要建立准则来判断在什么情况下会出现这种边界形式的突然变化。

一般来说，“缺陷理论”是以研究实际物体中的空穴、裂纹、切口、刻痕等为对象的，它们的变形和扩展都会在晶粒尺度中发生。因此，选择“离散介质模型”会比“连续介质模型”更符合实际和有严格的物理基础。以点阵模型为基础的微观及亚微观研究对于晶体材料性能的定性分析是有重要意义的，但对解决定量问题却遇到了巨大的数学上的困难。而在大多数情况下，改用“连续介质模型”就可以克服。在连续介质模型中，质量不是颗粒的集合，而是一个连着一个的微分单元体的集合，因而可用密度来表示它的质量。由于这种简化，就可以将微分单元体之间的应力和应变用二个（各向同性弹性体）或者有限数目的“模数”联系起来。当然，这种介质是理想化的，它的性质已被简化到使数学处理成为可能。但它与实际物体保持着一定的物理相似，所以它的数学分析结果能给出一些接近于实际的数值，其可靠性最后还要由实践来加以检验。

就静态加载来说，断裂力学的合理基础是这样假定的：为了使裂纹扩展，有两个条件是必要和充分的。首先，在裂纹尖端必需有足够的应力以形成裂纹扩展的某种机理；第二，必须有足够的能量注入裂纹尖端，以供给创造新表面时作功。起先，人们曾经相信只需要第一个条件。然而对于椭圆孔的 *Inglis* 解指出，当接近裂纹尖端时，弹性应力趋于无穷大，从而导致有裂纹物体不能承受任何载荷的奇怪结论。这个问题已由 *Griffith* 解决，他利用一种基于表面能的能量平衡方法解释了玻璃的破坏。*Orwan* 和 *Irwin* 发展了这个能量平衡法，这个方法后来还被 *Rice* 和其他作者推广到包括全塑性的情况。

在此期间，*Irwin* 的重要贡献是提出了应力强度因子的概念，并指出：当两个条件都具备时，就在某一临界值时发生裂纹扩展。运用这个概念会有很大的优点，就象光滑试样的材料性质可以用应力来度量一样，有裂纹时的材料性质则可以用应力强度因子来度量。然而，用应力强度因子（或任何其他断裂力学参数）来测定材料的性质只能建立在这样的经验基础上，即按所述定律计算得出的结果与实际充分一致，并且对某一特定的应用，计算方便，有足够的精确度。建立在这种基础上的现代断裂力学已经用来解决广泛的问题，其中在小范围屈服条件下已经形成了一个评价结构可靠性的定量方法；在疲劳裂纹扩展方面，也取得了一些积极的结果。

由于上述原因，所以本教材以讨论线弹性断裂和疲劳裂纹扩展为主，考虑到材料科学专业应用上的需要，适当介绍了某些裂纹扩展的微观机制。

第二章 裂纹顶端附近的弹性应力场

2.1 引言

从分析大量脆性断裂事故发生, 材料和构件中存在裂纹是不可避免的。如果认为, 材料和构件在断裂以前基本上处于弹性范围内, 则可视物体为有裂纹的弹性体。用线弹性力学的方法来研究裂纹尖端附近的应力场和位移, 找出控制裂纹扩展的物理量。

2.2 平面应变与平面应力问题

在线弹性力学的平面问题中, 应变 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 和位移 u 、 v 的关系是

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

在式(2.1)中消去 u 和 v , 可得应变的相容方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

在不考虑体力时, 弹性力学平面问题的平衡方程有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

平面应力和平面应变是平面问题中的两种基本状态。

(1) 平面应力状态: 当应力 σ_z 、 τ_{zy} 、 τ_{zx} 等于零时, 称为平面应力状态。在此条件下, 虎克定律是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中 E , 为拉压弹性模量, μ 为剪切弹性模量, ν 是横向变形(波桑)系数。三者之间的关系为

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

在平面应力状态下, 应变 ε_z 为

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.6)$$

(2) 平面应变状态：当应变 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 等于零时，称为平面应变状态。在此条件下，虎克定律是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

在平面应变状态下，应力 σ_z 为

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.8)$$

利用虎克定律，可以式(2.2)得到应力的相容方程

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.9)$$

符号 ∇^2 是拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

平面问题的应力函数即艾瑞(Airy)函数 $\Phi(x, y)$ 与各应力分量的关系是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

显然，函数 $\Phi(x, y)$ 满足平衡方程，将上式代入相容方程(2.9)，得

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.11)$$

满足上式的函数 $\Phi(x, y)$ 称为双调和函数。由此可见，求解弹性力学平面问题归结为：选择适当的双调和函数 $\Phi(x, y)$ 作为应力函数，并使其满足所研究问题的全部边界条件，如得到满足，就可以用上述各关系求出应力、应变和位移。

在边界上，应力函数的定义：设边界上A点的 $\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ ，沿周界逆时针方向

由A点走到B点(图2.1)，即B点应力函数和其导数为

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \sum M \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \sum T_x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\sum T_y \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

其中， $\sum M$ 为边界上外力对B点的合力矩； $\sum X$ 为边界上外力在X轴上投影的和， $\sum y$ 为边界上外力在y轴上投影的和。有关推导详见本章附录A2.1。

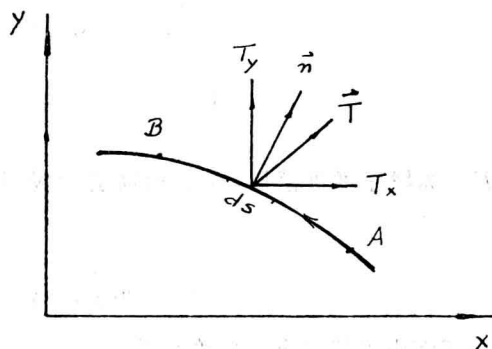


图2.1 应力函数在边界上的定义

2.3 用复变函数解二维问题

将双调和方程写成

$$\nabla^2 p = 0$$

并令 $p = \nabla^2 \Phi$ ，如果用 q 表示 p 的共轭函数，即

$$f(z) = p + iq \quad (2.13)$$

则根据复变函数理论， $f(z)$ 是一个解析函数，它对 z 的一次积分也是解析函数，令

$$F = P + iQ = -\frac{1}{4} \int f(z) dz \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad F'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (p + iq) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\text{因此} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4} p$$

由上述关系，可知

$$\nabla^2 (xP + yQ) = 2 \frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} = p$$

但 $\nabla^2 \Phi = p$ ，所以有

$$\nabla^2 (\Phi - xP - yQ) = 0, \text{ 即函数为一调和函数。令}$$

$$\Phi - xP - yQ = P_1$$

则应力函数可写成

$$\Phi = xP + yQ + P_1 \quad (2.16)$$

应力函数也可以写成其它多种形式。例如可组成下列函数

$$\chi(z) = P_1 + iQ_1$$

式中 Q_1 为 P_1 的共轭函数，注意到

$$\bar{z}F(z) = (x - iy)(P + iQ) = xP + yQ + i(xQ - yP)$$

可把 Φ 表示为

$$\Phi = \operatorname{Re}[\bar{z}F(z) + \chi(z)] \quad (2.17)$$

如果把 $F(z)$ 和 $\chi(z)$ 的共轭函数分别以 $\bar{F}(\bar{z})$ 及 $\bar{\chi}(\bar{z})$ 表示，即

$$\bar{F}(\bar{z}) = P - iQ$$

$$\bar{\chi}(\bar{z}) = P_1 - iQ_1$$

则式 (2.17) 可写成

$$\Phi = \frac{1}{2} [\bar{z}F(z) + z\bar{F}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})] \quad (2.18)$$

上述各式表明，应力函数可以用合适的任意选定的解析函数表示。

有了应力函数，即可导出相应的位移公式。

先讨论平面应力状态

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\tau_{xy}}{\mu} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

考虑到

$$p = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

及

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{4} p$$

可把式 (2.19) 的前两式改写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[\left(p - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[p - (1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[4 \frac{\partial P}{\partial x} - (1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left[4 \frac{\partial Q}{\partial y} - (1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \quad \left. \vphantom{\frac{\partial v}{\partial y}} \right\} \quad (2.20)$$

积分式 (2.20), 得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[4P - (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g_1(y) \right] \\ v &= \frac{1}{E} \left[4Q - (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + g_2(x) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

上式中 $g_1(y)$ 和 $g_2(x)$ 分别为 y 和 x 的任意函数。将式 (2.21) 代入 (2.19) 的第三式, 得

$$\begin{aligned} 4 \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{dg_1(y)}{dy} \\ + \frac{dg_2(x)}{dx} = -2(1+\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

但 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以上式变为

$$\frac{dg_1}{dy} + \frac{dg_2}{dx} = 0$$

上式要求

$$\frac{dg_1}{dy} = -\frac{dg_2}{dx} = c$$

式中 c 为常数, 因此

$$\begin{aligned} g_1 &= cy + c_1 \\ g_2 &= -cx + c_2 \end{aligned}$$

由应变分量的表达式可以看出, 位移分量 g_1 与 g_2 不会产生任何应变, 它们只代表物体的刚体位移。所以, 最后得到

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} [4P - (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x}] \\ v &= \frac{1}{E} [4Q - (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y}] \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

或

$$u + iv = \frac{1}{E} [4(P + iQ) - (1+\nu) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)]$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= i, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i \end{aligned}$$

由式 (2.18) 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{2} [\bar{z} F'(z) + F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) + \chi'(z) + \overline{\chi'}(\bar{z})] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{1}{2} [\bar{z} F'(z) - F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{F}(\bar{z}) + \chi'(z) - \overline{\chi'}(\bar{z})] \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= F(z) + z \bar{F}'(\bar{z}) + \overline{\chi'}(\bar{z}) \\ P + iQ &= F(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

由于

可得平面应力情况下位移表达式是

$$u + iv = \frac{3-\nu}{E} F(z) - \frac{1+\nu}{E} [z \bar{F}'(\bar{z}) + \overline{\chi'}(\bar{z})] \quad (2.25)$$

在平面应变情况下, 由于

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

得

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

所以式(2.17)变为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x] \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

用类似的推导方法，可得平面应变情况下位移表达式是

$$u + iv = -\frac{(3 - 4\nu)(1 + \nu)}{E} F(z) - \frac{1 + \nu}{E} [z \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})] \quad (2.27)$$

有了应力函数，同样可以导出应力的表达式。将式 (2.24) 分别对 x 和 y 微分，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} &= F'(z) + z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= i [F'(z) - z \bar{F}''(\bar{z}) + \bar{F}'(\bar{z}) - \bar{\chi}''(\bar{z})] \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

用式 (2.28) 中的第一式减去用 i 乘过的第二式，即得

$$\sigma_x + \sigma_y = 2F'(z) + 2\bar{F}(\bar{z}) = 4\operatorname{Re} F'(z) \quad (2.29)$$

用式 (2.28) 中的第一式加上用 i 乘过的第二式，即得

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} = 2[z\bar{F}''(\bar{z}) + \chi''(\bar{z})] \quad (2.30)$$

把 (2.30) 式中的 i 以 $(-i)$ 代换，得

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}F''(z) + \chi''(z)] \quad (2.31)$$

由此可见，(2.25) 或 (2.27) 及 (2.29)、(2.31) 诸式就是用复变应力函数 $F(z)$ 和 $\chi(z)$ 给出的位移及应力表达式。

2.4 威斯特噶尔德方法

为了研究带裂纹构件的强度，必须了解裂纹尖端的应力场和位移场，根据裂纹面的位移的不连续性可将裂纹分为三种基本类型：

- ① I 型或张开型 (拉伸型)，位移 v 在裂纹面不连续。
- ② II 型或滑开型 (面内剪切型)，位移 u 在裂纹面不连续。
- ③ III 型或撕开型 (反平面剪切型)，位移 w 在裂纹面不连续。相应如图 2.2 所示。

欧文 (Irwin) 用威斯特噶尔德 (westergaard) 方法分析了以上三种裂纹尖端附近的应力

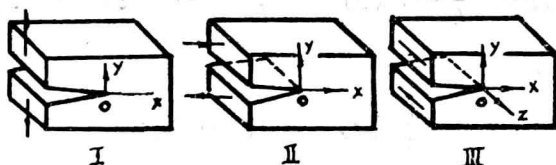


图 2.2 裂纹的三种位移类型

场和位移场。威氏法本质上就是一种复变应力函数法。由式 (2.16) 可知，关键在于选定合

适的解析函数。

2.4.1 I 型裂纹

设复函数 $Z_1(z)$ 及其导数为

$$\bar{Z}_1 = \frac{d\bar{Z}_1}{dz}, \quad Z_1 = \frac{dZ_1}{dz}, \quad Z_1' = \frac{dZ_1}{dz}$$

如果函数 $\bar{Z}_1 = \text{Re} \bar{Z}_1 + i I_m \bar{Z}_1$ 的导数不依赖于趋向极限所经过的路径，则 $\bar{Z}_1$ 为解析函数，且 Z_1 和 Z_1' 为解析函数，应有

$$Z_1 = \frac{d\bar{Z}_1}{dz} = \frac{d\bar{Z}_1}{dx} = \frac{1}{i} \frac{d\bar{Z}_1}{dy}$$

所以

$$i \frac{d\bar{Z}_1}{dx} = \frac{d\bar{Z}_1}{dy} \quad (2.32)$$

由

$$\frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial x} = \frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial x} + i \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial y} = \frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial y} + i \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial y}$$

代入 (2.32) 式，得

$$i \left(\frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial x} + i \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial y} + i \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial y}$$

由上式二边的实部及虚部分别相等，即得柯西—黎曼 (Cauchy—Riemann) 条件。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial x} &= \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial y} = \text{Re} Z_1 \\ \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial x} &= - \frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial y} = I_m Z_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

由 (2.33) 中的二式分别对 x 和 y 偏导相加减即得

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \text{Re} \bar{Z}_1 &= 0 \\ \nabla^2 I_m \bar{Z}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

可见，解析函数具有调和的实部和虚部。

取适当应力函数

$$\Phi = \text{Re} \bar{Z}_1 + y I_m \bar{Z}_1 \quad (2.35)$$

可得下列应力表达式

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\text{Re} \bar{Z}_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y I_m \bar{Z}_1) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial y I_m \bar{Z}_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \text{Re} \bar{Z}_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial I_m \bar{Z}_1}{\partial y} + I_m \bar{Z}_1 \right) \end{aligned}$$

由式 (2.33) 得

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial}{\partial y} (-I_m \bar{Z}_1) + \frac{\partial}{\partial y} (y \operatorname{Re} Z_1 + I_m \bar{Z}_1) \\ &= -\operatorname{Re} Z_1 + y \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} Z_1) + \operatorname{Re} Z_1 + \frac{\partial}{\partial y} (I_m \bar{Z}_1) \\ &= -y I_m Z_1' + \operatorname{Re} Z_1\end{aligned}$$

用类似的推导即得各应力分量的表达式:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} Z_1 - y I_m Z_1' \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1 + y I_m Z_1' \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1'\end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

(2.36) 诸式, 也可以从式 (2.29) 和 (2.31) 直接导出, 取

$$\begin{aligned}F'(z) &= \frac{1}{2} Z_1 \\ \chi''(z) &= -\frac{1}{2} z Z_1'\end{aligned}$$

当然 Z_1 是解析函数, 则式 (2.29) 可写成

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \operatorname{Re} Z_1 \quad (2.37)$$

式 (2.31) 可写成

$$\begin{aligned}\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 \left(\bar{z} \cdot \frac{1}{2} Z_1' - \frac{1}{2} z Z_1' \right) \\ &= (\bar{z} - z) Z_1' \\ &= -2iy Z_1'\end{aligned}$$

实部虚部分别相等得

$$\sigma_y - \sigma_x = 2y I_m Z_1' \quad (2.38)$$

$$\tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z_1' \quad (2.39)$$

联解式 (2.37) (2.38) 加上式 (2.39), 即得 (2.36) 诸式。

以下讨论位移分量的表达式

1. 平面应变

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{du}{dz} \\ &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma_z &= \nu (\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}$$

消去 σ_z , 即得

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y \\ &= \frac{1-\nu^2}{E} (\operatorname{Re} Z_1 - y I_m Z_1') - \frac{\nu(1+\nu)}{E} (\operatorname{Re} Z_1 + y I_m Z_1')\end{aligned}$$

$$= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \operatorname{Re} Z_I - \frac{1+\nu}{E} y I_m Z_I'$$

由 $\frac{du}{dz} = \varepsilon_x$, 积分得:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \operatorname{Re} \bar{Z}_I - \frac{1+\nu}{E} y I_m Z_I \\ &= \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu) \operatorname{Re} \bar{Z}_I - y I_m Z_I] \end{aligned}$$

同理可得

$$v = \frac{1+\nu}{E} [2(1-\nu) I_m \bar{Z}_I - y \operatorname{Re} Z_I] \quad (2.40)$$

2. 平面应力

用上述类似方法可得

$$\begin{aligned} u &= \frac{1-\nu}{E} \operatorname{Re} \bar{Z}_I + \frac{1+\nu}{E} y I_m Z_I \\ v &= \frac{2}{E} I_m \bar{Z}_I - \frac{1+\nu}{E} y \operatorname{Re} Z_I \end{aligned} \quad (2.41)$$

有了 I 型裂纹问题的通解, 以下讨论典型 I 型问题——无限大板含中心裂纹的应力场:

在双向拉伸载荷作用下含中心裂纹的无限大板如图 2.3 所示。

为此可选择一个适当的调合函数 Z_I , 以便使边界条件得到满足:

$$1) y=0, x \leq \pm a \text{ 时, } \sigma_y = 0$$

$$2) y=0, x \rightarrow \infty \text{ 时, } \sigma_y = \sigma$$

由 (2.36) 中第二式可见, 当 $y=0$ 有

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z_I \quad (2.42)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_y \rightarrow \sigma$; 而 $|x|$ 略大于 $|a|$ 时, σ_y 要大于 σ 。显然, 满足这一条件的最简单函数将具有 $\sigma_y = \sigma / (1 - \frac{a}{x})$ 的形式,

或者为了使之相对 x 轴是对称的, 则应使 $\sigma_y = \sigma / (1 - \frac{a^2}{x^2})$ 。但是, 函数还应满足 $y=0, -a < x < a$ 处 $\sigma_y = 0$ 的条件, 由于在 $y=0$ 处 $\sigma_y = \operatorname{Re} Z_I$, 所以如果在 $-a < x < a$ 的区间内 Z_I 为虚数的话, 即可满足要求, 所以要把 $(1 - \frac{a}{x})$ 改为 $(1 - \frac{a^2}{x^2})^{1/2}$, 即

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{(1 - \frac{a^2}{x^2})^{1/2}}$$

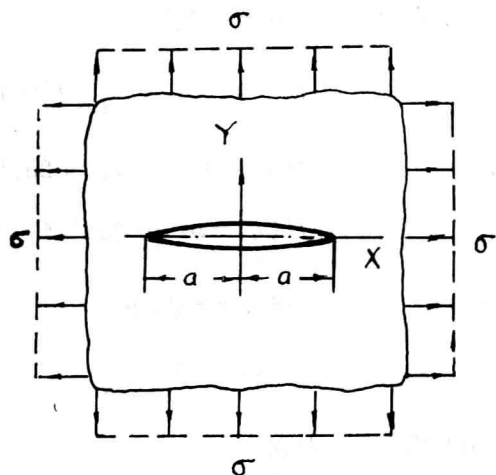


图 2.3 有穿透裂纹并受均匀双轴拉伸的无限大板

当 $-a < x < a$ 时, 分母为虚数, 有 $\sigma_y = 0$

由上面分析可知, 应取

$$Z_I = \frac{\sigma}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{1/2}} = \frac{\sigma z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \quad (2.43)$$

即为满足边界条件的函数, 同时它满足平衡条件和协调条件。

为了研究裂纹尖端附近的应力场, 可把坐标原点移至裂纹尖端上, (图2.4) 即

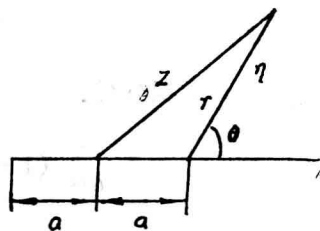


图2.4 坐标平移

$$\eta = z - a = r e^{i\theta}$$

此时, 将 $z = \eta + a$ 代入式 (2.43) 可得

$$\begin{aligned} Z_I &= \frac{\sigma(\eta + a)}{[(\eta + a)^2 - a^2]^{1/2}} = \frac{\sigma(\eta + a)}{[\eta(\eta + 2a)]^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma \frac{\eta + a}{(\eta + 2a)^{1/2}}}{\eta^{1/2}} = \frac{f(\eta)}{\eta^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

式中 $f(\eta) = \sigma \frac{\eta + a}{(\eta + 2a)^{1/2}}$, 当 $|\eta|$ 很小时, 即靠近裂纹尖端处, $f(\eta)$ 趋于实常数。为此, 将 $f(\eta)$ 在 $|\eta| = 0$ 点按台劳级数展开

$$f(\eta) = f(0) + \frac{\eta}{1!} f'(0) + \frac{\eta^2}{2!} f''(0) + \dots \quad (2.45)$$

由于

$$f(\eta) = \sigma(\eta + a)(\eta + 2a)^{-1/2}$$

$$f'(\eta) = \sigma(\eta + 2a)^{-1/2} + \sigma(\eta + a) \left[-\frac{1}{2}(\eta + 2a)^{-3/2} \right]$$

所以

$$f(0) = \sigma \sqrt{a/2}$$

$$f'(0) = -\frac{3}{4} \sigma \sqrt{1/2a}$$

取 $f(\eta)$ 级数第一项时有

$$f\{\frac{1}{\eta}\} = \sigma \sqrt{a/2}$$

取头两项时为

$$f\{\frac{2}{\eta}\} = \sigma \frac{a}{2} + \eta \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\sigma}{2a}}$$

所以相应的裂纹尖端附近的应力函数是

$$Z_I\{\frac{1}{\eta}\} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2\eta}} \quad (2.46)$$

$$Z_I\{\frac{2}{\eta}\} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2\eta}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\eta}{a} \right) \quad (2.47)$$

当 $\left| \frac{\eta}{a} \right|$ 很小时, 式 (2.47) 中第二项和第一项相比很小, 可用 $Z_I(\eta)$ 代表。用极坐标有

$$\eta = r e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\eta^{-1/2} = r^{-1/2} e^{-i\theta/2} = r^{-1/2} \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\eta^{-3/2} = r^{-3/2} e^{-i3\theta/2} = r^{-3/2} \left(\cos\frac{3\theta}{2} - i\sin\frac{3\theta}{2} \right)$$

$$y = r \sin\theta = 2r \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

所以

$$Z_I = \sigma \sqrt{\frac{a}{2\eta}} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

$$Z'_I = \frac{dZ_I}{d\eta} = \sigma \sqrt{-\frac{a}{2}} \eta^{-3/2} \cdot \frac{1}{2} (-1)$$

$$= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cdot \frac{1}{r} \left(\cos\frac{3\theta}{2} - i\sin\frac{3\theta}{2} \right)$$

由式 (2.36) 即得裂纹尖端附近的应力场 (或裂纹尖端的应力主项)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

式中 $K_I = \sigma(\pi a)^{1/2}$ 。

式 (2.48) 的解是由应力函数 $Z_I = \sigma \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^{1/2}}$ 针对无限远处有双向均匀应力的情况。对于单向应力的情况 (无限远处, $\sigma_y = \sigma$, $\sigma_x = 0$), 只要在式 (2.48) 的解中选加 x 方向的应力 $\sigma_x = -\sigma$ 即可。

由式 (2.40) 和 (2.41), 可求出裂纹尖端附近的位移场

平面应变

$$\begin{aligned} u &= \frac{1+\nu}{E} \cos\frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu) + \sin^2\frac{\theta}{2} \right] \sigma \sqrt{2ar} \\ v &= \frac{1+\nu}{E} \sin\frac{\theta}{2} \left[2(1-\nu) - \cos^2\frac{\theta}{2} \right] \sigma \sqrt{2ar} \end{aligned} \quad (2.49)$$

平面应力

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \cos\frac{\theta}{2} \left[(1-\nu) - (1-\nu)\sin^2\frac{\theta}{2} \right] \sigma \sqrt{2ar} \\ v &= \frac{1}{E} \sin\frac{\theta}{2} \left[2 - (1+\nu)\cos^2\frac{\theta}{2} \right] \sigma \sqrt{2ar} \end{aligned} \quad (2.50)$$