普通高等教育“十一五”规划教材配套辅导

数学物理方程

学习指导与习题解答

陈才生 编著

科学出版社

普通高等教育“十一五”规划教材配套辅导

数学物理方程
学习指导与习题解答

陈才生　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是与《数学物理方程》(陈才生等编, 科学出版社, 2008)配套的学习辅导书. 全书共分 11 章. 前九章每章包括基本内容提要、习题解答和补充习题解答三部分. 基本内容提要是相关内容的精讲, 供学生复习参考之用;本书提供了该教材中绝大部分习题的解答, 供使用该教材的学生和老师参考; 补充习题解答是为了使部分优秀的学生灵活使用数学物理方程有关方法和拓宽视野之用. 最后两章只包括基本内容提要和习题解答两部分, 因为进一步的补充内容已经超出本课程要求. 阅读本书, 可以帮助学生学习数学物理方程中各类定解问题的解题方法和技巧, 了解丰富多彩的各种题型, 从而加深对这门课程的理解和掌握.

本书可作为普通高等院校数学类本科生、工科专业本科生或研究生学习数学物理方程课程的学习辅导书, 也可作为相关教师和科研人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程学习指导与习题解答/陈才生编著. —北京: 科学出版社, 2010

普通高等教育“十一五”规划教材配套辅导

ISBN 978-7-03-029396-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 212298 号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 朱光兰

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 11 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2010 年 11 月第一次印刷 印张: 14 1/2

印数: 1—3 500 字数: 290 000

定价: 28.00 元

前　言

数学物理方程是大学教育中的一门重要数学课程，它不仅仅是数学类本科生重要的专业基础课，而且也是许多工科专业本科生和研究生不可缺少的专业基础课．在学习该课程的过程中，学生普遍感觉做习题是一件困难事情．做偏微分方程的习题，一方面计算量大，容易出错；另一方面涉及面广，难度大，技巧性强．因此编写一本该课程的学习指导和习题解答参考书，供同学们学习时参考，是非常必要的．但是需要指出的是，我们不主张学生在自己动手做题之前先看答案或解答．为了学好数学物理方程这门课，学生应该独立地完成教师布置的作业，不能抄袭本书的解答，本书仅供学习时参考．一个偏微分方程问题的求解方法通常是多种的，千万不要受本书解答的束缚．

本书共分 11 章．第 1~9 章，每章分为基本内容提要、习题解答和补充习题解答三部分．基本内容提要是相关内容的精讲，供学生复习参考之用；本书提供了陈才生等编的《数学物理方程》中绝大部分习题的解答，供使用该教材的学生和老师参考；补充习题解答是为了使部分优秀学生灵活使用《数学物理方程》有关方法和拓宽视野之用．第 10 章和第 11 章只提供基本内容提要和习题解答，因为进一步的补充内容已经超出本课程要求．

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材，请参考所附的参考文献．在本书即将出版之际，感谢我在河海大学教过的历届研究生和本科生同学们，是他们不断地提出问题，激励我不断努力，对许多问题进行进一步思考．特别要感谢我的 2008 级几位研究生，他们对部分习题的解答提出了宝贵的修改意见．

本书的初衷是帮助学习"数学物理方程"课程的同学们学好这门比较难学的课程，同时也给讲授该课程的老师们提供一些有益的参考．但由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请各位读者批评指正．

编　者

2010 年 6 月

目 录

第 1 章　绪　　论

1.1　基本内容提要

1.1.1　用数学物理方程研究物理问题的步骤

(1) 导出或者写出定解问题, 包括方程和定解条件两部分;

(2) 求解已经导出或者写出的定解问题;

(3) 对求得的解讨论其适定性并且作适当的物理解释.

1.1.2　求解数学物理方程的方法

常见方法有行波法 (又称 D'Alembert 解法)、分离变量法、积分变换法、Green 函数法、能量积分方法、变分方法等. 本书主要使用前面五种方法.

1.1.3　数学物理方程的导出

1. *建立 (导出) 方程的步骤*

(1) 从所研究的系统中划出一部分, 分析邻近部分与这一小部分的相互作用;

(2) 根据物理学的规律, 比如 Newton 第二定律、能量守恒定律等, 以数学式子表达这个作用;

(3) 化简整理即得所研究问题的偏微分方程.

2. *建立 (导出) 方程时常用到的物理学定律*

(1) Newton 第二定律 ($F=ma$).

(2) Fourier 实验定律 (即热传导定律).

当物体内存在温差时, 会产生热量的流动. 热流强度 $\boldsymbol{q}$ (即单位时间内流过单位横截面的热量) 与温度的下降率成正比, 即

$$\boldsymbol{q}=-k\nabla u,$$

其中 k 为热传导系数, 负号表示热量的流向和温度梯度方向相反. 写成分量的形式

$$q_x=-ku_x,\quad q_y=-ku_y,\quad q_z=-ku_z.$$

(3) Newton 冷却定律.

物体冷却时放出的热量 $-k\nabla u$ 与物体和外界的温度差 $u|_{边}-u_0$ 成正比, 其中 u_0 为周围介质的温度.

(4) 热量 (质量) 守恒定律.

物体内部温度升高所需要的热量 (浓度增加所需要的质量) 等于流入物体内部的净流热量 (质量) 与物体内部的源所产生的热量 (质量) 之和.

(5) 费克 (Fick) 定律 (即扩散定律).

一般地说, 由于浓度的不均匀, 物质从浓度高的地方向浓度低的地方转移. 这种现象叫**扩散**. 在气体、液体、固体中都有扩散现象.

粒子流强度 $\boldsymbol{q}$ (即单位时间内流过单位面积的粒子数) 与浓度的下降率成正比, 即

$$\boldsymbol{q} = -K\nabla u,$$

其中 K 为扩散系数, 负号表示浓度减少的方向. 写成分量的形式为

$$q_x = -Ku_x, \quad q_y = -Ku_y, \quad q_z = -Ku_z.$$

(6) Gauss 定律.

通过一个任意闭合曲面的电通量, 等于这个闭曲面所包围的自由电荷的电量的 ε^{-1} 倍, 即

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\Omega,$$

其中 ε 为介电常数, ρ 为电荷密度.

(7) 胡克 (Hooke) 定律.

在弹性限度内, 弹性体的弹力和弹性体的形变量成正比, 即 $f = -kx$, 其中 k 为弹性体的劲度 (倔强) 系数, 倔强系数在数值上等于弹性体伸长 (或缩短) 单位长度时的弹力, 负号表示弹力的方向和形变量的方向相反.

另外, 有

$$\text{应力} = \text{杨氏模量} \times \text{相对伸长}.$$

3. 定解条件和定解问题的写出 (导出)

要想将一个具体的物理过程完整地翻译成数学语言, 必须写出它的定解问题: 包括泛定方程和定解条件 (初始条件、边界条件、相容性条件). 泛定方程只能反映和描绘同一类现象的共同规律. 对于一个具体的物理问题, 还必须通过定解条件来反映. 而要正确写出定解条件, 必须注意以下几方面的问题:

(1) 正确理解题意, 正确区分外源条件、初始条件、边界条件;

(2) 正确理解并且应用物理定律和定理;

(3) 注意初始条件和边界条件的个数, 以保证解的适定性.

1.1.4　定解问题的适定性

如果一个定解问题的解存在、唯一, 且连续依赖于定解条件中的初始数据和边

界数据, 则称该定解问题是适定的, 否则称它是不适定的.

1.2 习 题 解 答

1.1 长为 L 的均匀细杆, 侧面绝缘, 一端温度为 0, 另一端有恒定热源 q 进入(即单位时间内通过单位截面积流入的热量), 杆的初始温度分布为 $\frac{1}{2}x(L-x)$, 试写出相应的定解问题.

解 杆的初始温度分布是 $\frac{1}{2}x(L-x)$, 即初始条件为

$$u(x,0)=\frac{1}{2}x(L-x).$$

由杆的一端温度为零, 得边界条件

$$u(0,t)=0,$$

杆的另一端有恒定热流强度 q, 即

$$ku_x(L,t)=q.$$

故定解问题为

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L,\ t>0,\\ u(x,0)=\dfrac{1}{2}x(L-x), & 0\leqslant x\leqslant L,\\ u(0,t)=0,\ u_x(L,t)=\dfrac{q}{k}, & t\geqslant 0. \end{cases}$$

1.2 设有一根长为 L 的均匀柔软的弦做微小横振动, 其平衡位置是 x 轴的区间 $[0,L]$. 让 u 表示横位移, 弦的线密度为 ρ, 张力大小为 T. 在振动过程中, 受到一阻力, 阻力的大小与位移速度成正比, 比例系数为 k. 设初始位移为 $\phi(x)$, 初始速度为 0. 在 $x=0$ 端固定, 在 $x=L$ 端有一弹性支撑, 弹性强度为 k. 试写出弦的位移 $u(x,t)$ 所满足的定解问题.

解 在 $x=L$ 端有一弹性支撑, 弹性强度为 k, 这表明

$$Tu_x\big|_{x=L}=-ku\big|_{x=L},$$

即

$$(Tu_x+ku)\big|_{x=L}=0.$$

又因为在振动过程中, 受到一阻力, 阻力的大小与位移速度成正比, 比例系数为 k, 所以阻力 $F(x,t)=-ku_t$, 那么由文献 [1] 中例 1.2.1 的推导可以得到该弦做微小横振动的方程为

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho} u_{xx} - \frac{k}{\rho} u_t.$$

因此, 所求的定解问题是

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{T}{\rho} u_{xx} - \dfrac{k}{\rho} u_t, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u(0,t) = 0,\ (Tu_x + ku)\Big|_{x=L} = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

1.3　考虑在正方形区域 $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 上的波动方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = f_1(x),\ u(x,1) = f_2(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,y) = g_1(y),\ u(1,y) = g_2(y), & 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$$

其中 f_1, f_2, g_1, g_2 都是已知函数. 试问该问题是否适定? 为什么? 举例说明.

解　一般来讲, 该问题的解是不唯一的, 因此是不适定的. 比如, 若 $u = u(x,y)$ 是问题的解, 那么容易验证 $v = u + \sin n\pi x \sin n\pi y\ (n \geqslant 1)$ 也是该问题的解. 因此上述问题的解不唯一.

1.4　说明定解问题

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx}, & (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

的解是不适定的.

解　容易验证函数 $u_n(x,t) = 1 + \dfrac{1}{n} e^{n^2 t} \sin nx\ (n \geqslant 1)$, 满足

$$\begin{cases} u_t = -u_{xx}, & (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 1 + \dfrac{1}{n} \sin nx, & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

显然, 当 $n \to +\infty$ 时 $\sup_{x \in \mathbb{R}'} \left| u_n(x,0) - 1 \right| = \dfrac{1}{n} \to 0$. 但是, 当 $n \to \infty$ 时

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1, t > 0} \left| u_n(x,t) - 1 \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}^1, t > 0} \left| \frac{1}{n} e^{n^2 t} \sin nx \right| = \sup_{t > 0} \left| \frac{1}{n} e^{n^2 t} \right| \geqslant \frac{1}{n} e^{n^2} \to \infty,$$

所以原定解问题的解是不稳定的.

1.3　补充习题解答

1.5　由流体力学知, 理想流体的完整方程组由 Euler 型运动方程

$$\rho \boldsymbol{v}_t + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{F}, \tag{1.3.1}$$

和连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1.3.2}$$

以及物态方程

$$p = f(\rho), \tag{1.3.3}$$

组成, 其中方程 (1.3.1) 应该看作三个分量 v_x, v_y, v_z 的方程; $\boldsymbol{v}, p, \rho$ 分别为流速、压力和密度; $\boldsymbol{F}$ 为单位质量上所受外力. 试导出当外力 $\boldsymbol{F} = 0$ 时, 声波在空气中传播所满足的声波方程.

解 设 p_0 和 ρ_0 为空气在平衡状态下的压力和密度, 并记 $S = \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, 即 $\rho = \rho_0(1+S)$. 为方便起见, 假设外力为零. 由于声波在空气中传播时, S 和 $\boldsymbol{v}$ 都是很小的量, 即 $\rho \approx \rho_0$. 于是式 (1.3.1) 和式 (1.3.2) 中的二次项均可忽略, 即式 (1.3.1) 变为

$$\boldsymbol{v}_t = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \tag{1.3.4}$$

而式 (1.3.2) 变为

$$\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \text{即 } S_t + \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.3.5}$$

声波的传播过程是绝热的, 绝热过程的物态方程 (1.3.3) 是 $p = p_0(1+S)^\gamma$, 它可以近似为线性函数

$$p = p_0(1 + \gamma S), \tag{1.3.6}$$

其中 γ 为定压比热与定容比热的比值. 由式 (1.3.4) 和式 (1.3.6), 得

$$\boldsymbol{v}_t = -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla S. \tag{1.3.7}$$

而由式 (1.3.5) 和式 (1.3.7) 得

$$S_{tt} - a^2 \Delta S = 0, \tag{1.3.8}$$

这就是声波方程, 其中 $a^2 = \dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}$.

1.6 一均匀细圆锥杆, 用均匀材料制成, 质量密度为 ρ, 杆材料的杨氏模量为 E, 杆上各点的纵方向位移为 $u(x,t)$. 试证明杆做纵向微振动的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1.3.9}$$

证 均匀细圆锥杆做微小横振动, 可应用 Hooke 定律, 并且假设密度 ρ 是常数. 以 $\bar{u}$ 表示图 1.1 所示 $[x, x+\Delta x]$ 小段的质心位移, 小段质量为 $\rho S \Delta x$, S 是细

杆的横截面积. 由 Newton 第二定律, 得

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=P(x+\Delta x,t)S(x+\Delta x)-P(x,t)S(x)=\frac{\partial}{\partial x}(PS)\Delta x,$$

其中 $P(x,t)$ 是在 x 点的截面 $S(x)$ 上于 t 时刻沿 x 轴方向所受到的应力. 令 $\Delta x\to 0$, 得

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(PS), \tag{1.3.10}$$

而由 Hooke 定律, 得 $P=E\dfrac{\partial u}{\partial x}$. 又因为 $S=\pi r^2=\pi(x\tan\alpha)^2$, 把 P 和 S 代入方程 (1.3.10), 得到

$$\rho\pi x^2\tan^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\pi x^2\tan^2\alpha E\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

化简后, 得式 (1.3.9). 证毕.

注　如果圆锥杆的坐标按图 1.2 所示, 则圆锥杆的纵向微振动方程为

$$\rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{1.3.11}$$

其中 h 为圆锥的高. 事实上, 此时截面面积 $S=\pi r^2$, 半径 $r=(h-x)\tan\alpha$. 将其代入式 (1.3.10), 便得式 (1.3.11).

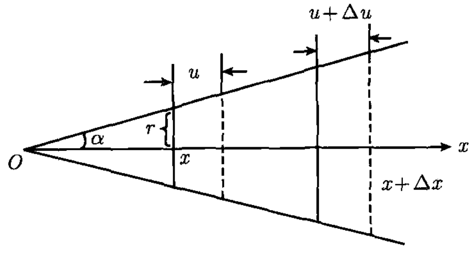

图 1.1

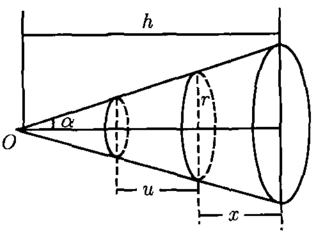

图 1.2

1.7　真空中电磁场的 Maxwell 方程组的微分形式为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\boldsymbol{H}_t,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{c}\boldsymbol{E}_t.\end{cases} \tag{1.3.12}$$

试由这一组方程导出电磁波方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{tt}=c^2\Delta\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{H}_{tt}=c^2\Delta\boldsymbol{H},\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为真空中的电场强度和磁场强度, c 为光速.

解 对方程组 (1.3.12) 中第四个方程关于 t 求导, 得

$$\nabla \times \boldsymbol{H}_t = \frac{1}{c}\boldsymbol{E}_{tt}.$$

又将 $\nabla\times$ 作用于 (1.3.12) 中第二个方程, 得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times \boldsymbol{H}_t,$$

即

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times \boldsymbol{H}_t,$$

那么由方程组 (1.3.12) 中第一个方程, 得

$$\boldsymbol{E}_{tt} = c^2 \Delta \boldsymbol{E}.$$

同理, 可证得第二个电磁波方程

$$\boldsymbol{H}_{tt} = c^2 \Delta \boldsymbol{H}.$$

1.8 导出弹性杆的微小纵振动方程. 这里设杆的杨氏模量为 $E(x)$, 质量密度为 $\rho(x)$, 作用于杆的外力密度为 $F(x,t)$, 其方向沿 x 轴 (杆轴) 方向.

解 以 $u(x,t)$ 表示杆上 x 点 t 时刻的纵向位移. 考察杆上一小段 $[x, x+\Delta x]$ 的运动情况. 用 $\bar{u}(x,t)$ 表示图 1.3 所示小段的质心位移. 小段质量为 $\rho S \Delta x$, S 是细杆的横截面面积. 由 Newton 第二定律, 得

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = (p(x+\Delta x, t) - p(x,t))S,$$

其中 $p(x,t)$ 表示 x 点的截面上于 t 时刻沿 x 轴方向所受到的应力. 显然, 当 $\Delta x \to 0$ 时, 有 $\bar{u} \to u$ 和

$$\frac{p(x+\Delta x, t) - p(x,t)}{\Delta x} \to \frac{\partial p}{\partial x}.$$

因此

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

由 Hooke 定律, 应力和相对伸长成正比. 所以

$$p = E\frac{\partial u}{\partial x},$$

其中比例系数 E 为杨氏模量. 对于均匀杆, E 为常数. 所以杆的微小纵振动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

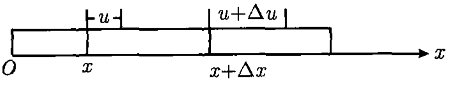

图 1.3

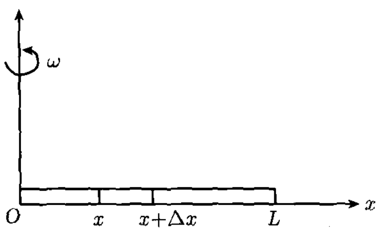

图 1.4

1.9 一根长为 L 的柔软匀质轻弦, 一端固定在以匀角速度 ω 转动的竖直杆上. 由于惯性离心力的作用, 弦的平衡位置是水平的 (图 1.4). 试证明: 此弦相对于水平平衡位置的横向微振动的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(L^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

证 以 $u=u(x,t)$ 表示 x 点 t 时刻沿垂直于 x 方向的位移. 因为弦是柔软的, 所以弦上任一点的张力 T 总是沿着弦的切线方向. 由于弦做微小横振动, 在 x 方向无运动. 那么, 由 Newton 第二定律, 在 $[x,x+\Delta x]$ 上有

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=Tu_x(x+\Delta x,t)-Tu_x(x,t),$$

其中 $\bar{u}$ 表示这一小段弦的平均位移, ρ 是弦的质量密度, 它是常数. 本题中弦的张力是由内离心力产生的. 作用在 x 处弦的张力为

$$T=T(x)=\int_x^L\omega^2 s\rho\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\rho\omega^2(L^2-x^2),$$

所以

$$Tu_x\big|_{x+\Delta x}-Tu_x\big|_x=\frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left((L^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x.$$

令 $\Delta x\to 0$, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left((L^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

证毕.

1.10 一根长为 L 的匀质柔软重绳, 其上端固定在一竖直轴上, 绳子和轴以角速度 ω 转动. 导出此绳子的微小横振动方程.

解 以绳子的上端为原点, 取 x 轴竖直向下 (图 1.5), 以 $u(x,t)$ 表示绳子的横向位移 (即对于 x 轴的偏离), 以 $T(x,t)$ 表示绳的张力, 它沿绳的切向. 考察绳子的一小段 $[x,x+\Delta x]$ 的运动, 为此先求 $T(x,t)$. 由于绳子受纵向力 —— 重力的作用, 张力与 x 有关. 事实上, x 点所受重力为 $\rho g(L-x)$ (ρ 为绳的质量密度, 它是常数), 所以 $T(x,t)=\rho g(L-x)$. 注意到现在横向外力是离心力, 即 $F(x,t)=\rho\omega^2u(x,t)\Delta x$. 那么由 Newton 第二定律, 得

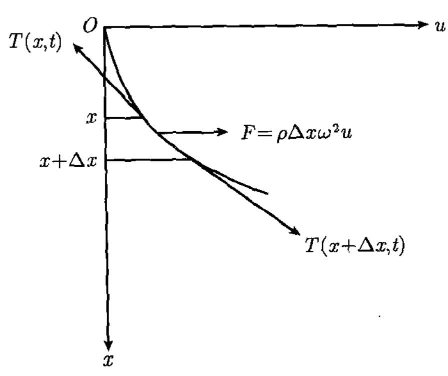

图 1.5

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=\rho g(L-x)u_x\big|_{x+\Delta x}-\rho g(L-x)u_x\big|_x+\rho\omega^2\Delta x\bar{u},$$

其中 $\bar{u}$ 表示这一小段的平均位移. 对上式利用中值定理, 并且令 $\Delta x\to 0$, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left((L-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\omega^2 u.$$

该方程可以写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-g\frac{\partial u}{\partial x}+\omega^2 u,$$

其中 $a(x)=\sqrt{g(L-x)}$. 它是二阶线性变系数双曲型方程.

注 如果绳子的下端为原点, 取轴竖直向上, 则方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\omega^2 u.$$

1.11 一根细长的匀质圆杆, 横截面的半径为 R, 杆的侧面按 Newton 冷却定律与周围介质交换热量. 试证明圆杆内沿轴向的温度分布 $u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2H}{c\rho R}(u-u_0),$$

其中 k 为杆的导热系数, c 为杆的比热容, ρ 为单位长度杆的质量, H 是 Newton 冷却定律的比例系数, u_0 是周围介质的温度.

证 考察匀质细杆中 $[x,x+\Delta x]$ 的一段 (图 1.6). 根据热传导的 Fourier 定律, 能量流 (即单位时间通过单位截面的热量) 为 $-k\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 于是单位时间内通过截面流入体积元 ΔV 的纯能量为

$$(-ku_x\big|_x-(-ku_x)\big|_{x+\Delta x})\pi R^2=-\frac{\partial}{\partial x}(-ku_x)\pi R^2\Delta x=ku_{xx}\pi R^2\Delta x.$$

又根据 Newton 冷却定律, 在单位时间内通过体积元ΔV的表面(面积为$2\pi R\Delta x$)与周围介质交换热量而得到的热量为 $-H(u-u_0)(2\pi R\Delta x)$. 以上两项之和等于单位时间内体积元 ΔV 中增加的能量. 由于

$$c\rho u_t\Delta V=c\rho u_t\pi R^2\Delta x,$$

所以

$$c\rho u_t\pi R^2\Delta x=ku_{xx}\pi R^2\Delta x-2\pi RH(u-u_0)\Delta x,$$

消去 $\pi c\rho\Delta xR^2$ 便得到所要的方程. 证毕.

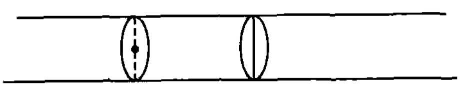

图 1.6

1.12 设一块均匀张紧的薄膜, 静止状态在水平位置 Oxy 平面内. 假设该薄膜做微小横振动 (Oxy 平面的垂直方向 $-u$ 轴方向). 用函数 $u(x,y,t)$ 表示膜在点 (x,y) 处、在 t 时刻的位移. 试推出 $u(x,y,t)$ 所满足的偏微分方程.

解 设膜的面密度为 ρ. 因为薄膜是均匀的, 所以 ρ 是常数. 又设膜是柔软的, 膜上每点的张力位于该点膜的切平面内, 方向与截口互相垂直. 由于振动是微小的, 可假定膜上任意一点沿任意方向的斜率小于 1, 膜的面积元在振动中认为是近似不变的.

取平衡位置时位于 $(x,y),(x+\Delta x,y),(x+\Delta x,y+\Delta y),(x,y+\Delta y)$ 处的矩形面元为隔离体. 按 Hooke 定律, 张力是常数. 设单位截口长度上的张力为 T. 在任意时刻 t, 膜微元的位置如图 1.7 所示. 其截口 AB 上受邻近部分膜的张力的大小为 $T\Delta x$, T 与 y 轴的负方向夹角为 α; 截口 BC 所受张力大小为 $T\Delta y$, 其方向与 x 轴夹角为 γ; 截口 CD 所受张力大小为 $T\Delta x$, 其方向与 y 轴夹角为 β; 截口 DA 所受张力大小为 $T\Delta y$, 其方向与 x 轴负方向的夹角为 δ. 这些张力在 Oxy 平面的分量相互平衡, 膜上每一点每一时刻的位移发生在与 Oxy 平面垂直的方向. 由 Newton 第二定律, 得

$$-T\Delta x\sin\alpha+T\Delta x\sin\beta-T\Delta y\sin\delta+T\Delta y\sin\gamma=(\rho\Delta x\Delta y)u_{tt}. \tag{1.3.13}$$

由于膜做微小横振动, 所以

$$\begin{cases}\sin\alpha\approx\tan\alpha=u_y(x,y,t),\\ \sin\beta\approx\tan\beta=u_y(x,y+\Delta y,t),\\ \sin\delta\approx\tan\delta=u_x(x,y,t),\\ \sin\gamma\approx\tan\gamma=u_x(x+\Delta x,y,t).\end{cases}$$

将它们代入式 (1.3.13), 可得

$$T\Delta x[u_y(x,y+\Delta y,t)-u_y(x,y,t)]+T[u_x(x+\Delta x,y,t)-u_x(x,y,t)]=\rho\Delta x\Delta y u_{tt},$$

即

$$T\left(\frac{\Delta u_y}{\Delta y}+\frac{\Delta u_x}{\Delta x}\right)=\rho u_{tt}.$$

令 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$, 有

$$T(u_{xx}+u_{yy})=\rho u_{tt}.$$

记 $a^2=T/\rho$, 则

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0. \tag{1.3.14}$$

这是二维波动方程.

如果膜上每点还受到 u 方向的场力的作用，其力密度 (即膜的单位面积上所受的力) 为 $F(x,y.t)$, 令 $f(x,y,t)=F(x,y,t)/\rho$, 则方程 (1.3.14) 变为

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t). \tag{1.3.15}$$

这是非齐次的二维波动方程.

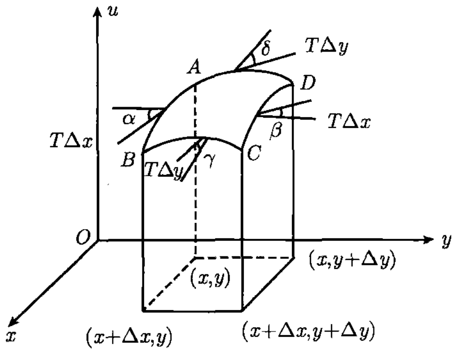

图 1.7

1.13 设 $\Omega=\{(x,y)|\,x\in\mathbb{R}^1,y>0\}$. 考虑柯西问题

$$\begin{cases}\Delta u+u=0, & (x,y)\in\Omega,\\ u(x,0)=\phi(x),\ u_y(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^1,\end{cases}$$

其中 $\phi(x),\psi(x)$ 为 $\mathbb{R}^1$ 上的有界连续函数. 问：这个问题的解是否适定？

解 该问题的解一般是不适定的. 例如，取 $u_n(x,y)=\dfrac{1}{n^2}\mathrm{e}^{ny}\sin(\sqrt{n^2+1}x)$. 它满足方程, 显然, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\phi(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\psi(x)|=(n^{-2}+n^{-1})\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|\sin(\sqrt{n^2+1}x)|\to 0.$$

但是, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\sup_{(x,y)\in\Omega}|u_n(x,y)|\to\infty.$$

1.14 扩散方程. 下面考虑一维扩散的例子. 设一均匀的细直管, 里面充满了液体 (比如水), 当注入一化学物质 (比如染料), 那么该染料就要在水里扩散. 用 $u(x,t)$ 表示在 x 处时刻 t 时的液体的浓度. 任意取一小段 $[x_0,x]$, 见图 1.8. 在 $[x_0,x_1]$

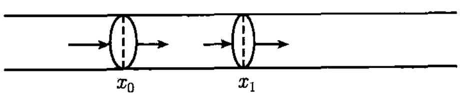

图 1.8