21世纪高等学校规划教材

大学数学学习指导丛书

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

线性代数学习指导

南京理工大学应用数学系　编著

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材
大学数学学习指导丛书

线性代数学习指导

编著 南京理工大学应用数学系

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是21世纪高等学校规划教材——大学数学学习指导丛书之一。由南京理工大学应用数学系负责编写。本书结构严谨，例题丰富，书中内容带有一定的指导性，叙述直观清晰、通俗易懂。

全书共分为七章，主要内容包括行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型和线性变换等。每章后都配有自测题和自测题答案，其中，部分自测题具有一定的难度。

本书可供普通高等院校非数学专业的学生使用，也可作为高职高专在校大学生的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导／南京理工大学应用数学系编著．—北京：中国电力出版社，2009
（大学数学学习指导丛书）
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-5083-9854-9

Ⅰ．①线… Ⅱ．①南… Ⅲ．①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第225087号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）
航远印刷有限公司印刷
各地新华书店经售

*

2009年12月第一版 2009年12月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米 16开本 13.5印张 322千字
定价22.00元

《21世纪高等学校规划教材——大学数学学习指导丛书》

编纂委员会

前　言

《线性代数学习指导》系南京理工大学《大学数学学习指导丛书》(《高等数学学习指导》、《工程数学学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率统计学习指导》)之一。线性代数是工科专业大学生的必修课，其在现代科学与工程技术中有着广泛而深入的应用。但是，近年来，国内很多高校都面临该课程的教学时数一减再减的现实。在这种情形下，学生已不能很好地吸收、消化课程的基本内容，教师又没有足够的习题课时间。常听到学生说：线性代数抽象、难懂且讲得太快，不像微积分那样好理解，不知道这门课有何用？许多学生到考试前复习时才找到些感觉，想进一步弄清、学好又找不到合适的参考书。针对上述情况，我们结合自己的教学经验编写了这本辅导材料。

本书章节的基本结构如下。

内容提要：列出本章的基本概念、基本性质、相关联系等。

重点、难点分析：解答学生常常困惑、混淆的问题，这是根据我们在教学过程中的体会而写的。

典型例题：通过这些题目体现抽象的结论是如何灵活运用的。希望读者看到题目后自己先尽量解答，然后再与书中解答作比较，也许你会给出比书中更好的解答，也许会忽略了某些东西而没解出题目，以后就会铭记在心。这样读书刚开始会慢些，但以后会越来越快且学到了真正的本领。

自测题：供读者自我检测自身的学习程度，书后附有参考答案。

一本好书离不开读者的配合与互动。诚恳地希望读者朋友们提出自己的看法、观点与感受，让我们共同写一本适合初学者的辅导书吧。

本书由陈培鑫、金晓灿、李宝成老师共同编写。其中，第一章、第二章由金晓灿编写，第三章、第四章由李宝成编写，第五章、第六章、第七章由陈培鑫编写。吕新民教授仔细审阅了全部书稿。本书由吕新民教授、赵培标教授审校。

限于编者水平，书中难免存在错误和不妥之处，恳请同行专家和热心读者批评指正，编者将不胜感激。

编　者

南京理工大学应用数学系

2009年12月

目　　录

第一章　行　列　式

一、内容提要

1．*n* 阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中，D_{1j} 为 a_{1j} 的余子式，而 $A_{1j}=(-1)^{1+j}D_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式。

行列式作为一种特殊的运算符号，其结果是一个值。n 阶行列式的值是 n！项的代数和，其中每一项是取自行列式不同行不同列的 n 个元素的乘积。

2．行列式的性质

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等。即行列式的行列互换，行列式的值不变。

该性质表明，行列式中对行成立的性质对列也成立；反之也对。

性质 1.2　行列式的两行（列）互换，行列式的值变号。若行列式有两行（或两列）完全相同，则行列式的值等于 0。

推论 1.1　若行列式有两行（列）元素相同，则行列式的值等于 0。

性质 1.3　行列式某行（列）的公因子可以提到行列式的外面。

推论 1.2　用一个数 k 乘行列式等于该数乘以行列式的某一行（列）。

推论 1.3　行列式有两行（列）元素对应成比例，则该行列式的值等于 0。

性质 1.4　行列式的某行（列）的元素都是两数之和，则此行列式可写成两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数作为行（列），其余各行（列）与原行列式相同。

性质 1.5　将行列式的某行（列）乘以一个常数再加到另一行（列）对应元素上，则行列式的值不变。

性质 1.6　行列式 D_n 等于它的任一行（列）的元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-1}$$

或

$$D_n=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1-2}$$

式中　A_{ij}——a_{ij} 的代数余子式。

式（1-1）称为 D_n 按第 i 行展开的展开式，式（1-2）称为 D_n 按第 j 列展开的展开式。

推论 1.4　行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

提示 行列式的性质是行列式计算和证明的基础。在行列式的计算和证明中，要充分利用行列式的性质，将行列式化为上或下三角形行列式或其他更简便的形式。关于行列式的计算和证明方法，将在下一部分结合例题进行讨论。

3．克拉默法则

若 n 元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-3}$$

其系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$，则方程组（1-3）有唯一解
$$x_i=\frac{\boldsymbol{D}_i}{\boldsymbol{D}} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中，$\boldsymbol{D}_i$ 是将系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第 i 列元素换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式。

如果齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-4}$$

的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$，则方程组（1-4）只有零解。方程组（1-4）有非零解的充分必要条件是 $\boldsymbol{D}=0$。

二、重点、难点分析

1．几个特殊行列式

（1）三角形行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{（上三角形行列式）}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \text{（下三角形行列式）}$$

（2）对角形行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（3）对称和反对称行列式。

1）对称行列式。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{其中 } a_{ij}=a_{ji} \quad \begin{matrix}(i=1,2,\cdots,n)\\(j=1,2,\cdots,n)\end{matrix}$$

2）反对称行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{其中 } a_{ij}=-a_{ji} \quad \begin{matrix}(i=1,2,\cdots,n)\\(j=1,2,\cdots,n)\end{matrix}$$

当阶数 n 为奇数时，则 $D=0$ 。

（4）范德蒙德（Vandermonde）行列式。

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

（5）拉普拉斯展开式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

2．行列式的计算方法

这是本章的重点，也是本章的难点。行列式计算的关键在于根据给定的行列式的规律，利用行列式的定义、性质和展开法则等，将行列式化为简单的形式或已知的行列式［如上（下）三角形行列式、范德蒙德行列式等］。

下面结合例题给出常用的行列式的计算方法。

【例 1.1】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}\text{的值。}$$

分析 根据该行列式的特点，有多种计算方法。

解法一　利用行列式展开公式，进行降阶。

$$D=\begin{vmatrix} x & -x & 0 & 0 \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ a & 2a+x & a & a \\ a & 2a & a+x & a \\ a & 2a & a & a+x \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 2a+x & a & a \\ 2a & a+x & a \\ 2a & a & a+x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 2a & a+x & a \\ 2a & a & a+x \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2a & 3a+x & a \\ 2a & a & a+x \end{vmatrix}=x^2\begin{vmatrix} 3a+x & a \\ 3a & a+x \end{vmatrix}=x^4+4ax^3$$

解法二　三角化法。由于每行四个元素之和相同，因此将各行均加至第一行，有

$$D=\begin{vmatrix} 4a+x & 4a+x & 4a+x & 4a+x \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}=(4a+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}$$

$$=(4a+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=(4a+x)x^3$$

解法三　加边法

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+x & a & a & a \\ 0 & a & a+x & a & a \\ 0 & a & a & a+x & a \\ 0 & a & a & a & a+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & x & 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & x & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & x & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=x^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{a}{x} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^4\begin{vmatrix} 1+\frac{4a}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{x} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^4\left(1+\frac{4a}{x}\right)$$

解法四 分拆法

$$D=\begin{vmatrix} a+x & a+0 & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+x & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+x & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+0 & a+x \end{vmatrix}$$

这个4阶行列式每项都是两个数的和，它可拆成2^4个4阶行列式，但含有两个第一子列的行列式必为0，因而可能不为0的行列式只有5个（至多含一个第一子列），即

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ a & 0 & x & a \\ a & 0 & 0 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & x & 0 \\ 0 & a & 0 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & a & 0 \\ 0 & x & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & a & 0 \\ 0 & x & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=4ax^3+x^4$$

解法五 递推法

$$D_4=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a+0 \\ a & a+x & a & a+0 \\ a & a & a+x & a+0 \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a+x & a & a & 0 \\ a & a+x & a & 0 \\ a & a & a+x & 0 \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ a & a & a & a \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+x \end{vmatrix}$$

从而有

$$D_4=xD_3+ax^3$$

递推地
$$D_3=xD_2+ax^2$$

又
$$D_2=x^2+2ax$$

故
$$D_4=x(xD_2+ax^2)+ax^3=x^4+4ax^3$$

小结 计算行列式一般有以下几种常用方法：

（1）对角线法：只适用于2阶、3阶行列式。

（2）利用行列式的定义计算：但这种方法只适用于一些特殊的行列式或者是大多数元素为零的行列式。

（3）三角化法：若行列式的元素大部分相同或大部分为零，则可以利用行列式的性质将行列式化为上（下）三角形行列式来计算，这是计算行列式最常用的方法。

（4）按某行（列）展开计算：若行列式某行（列）有较多的零元素时，可利用行列式按行（列）展开公式将高阶行列式化为低阶行列式来计算。

（5）递推法：利用行列式的性质或展开公式找出递推关系来进行计算。此方法一般适用于含有字母的行列式。

（6）分拆法：若行列式某一行（列）或多行（列）是两项之和，且每行（列）中相同元素较多，则可利用行列式拆行（列）的性质，将此行列式拆成两个或多个更简单的行列式计算。

（7）加边法：在行列式值不变的情况下，加上特殊的一行和一列进行计算。有时也称为升阶法。

（8）利用范德蒙德行列式计算：此方法只适用于特殊的行列式的计算。

（9）利用拉普拉斯展开式计算：若行列式中"大片"位置上的零元素较多时，则可以考虑用拉普拉斯展开式计算。

（10）数学归纳法。

（11）其他的一些特殊方法包括换元法、观察法、线性因子法、辅助行列式法等。但这些方法都不是常用方法。

3．行列式的应用——克拉默法则

注意　克拉默法则建立了线性方程组的解与已知的系数、常数项之间的关系，具有理论价值。但在具体求解时，需要计算$n+1$个n阶行列式的植，计算量较大，一般不宜采用。

判断n个未知数n个方程的齐次线性方程组有无非零解的关键是看它的系数行列式是否为0；若为0，则有非零解；否则，只有零解。

三、典型例题

【例 1.2】　设α,β,γ是三次方程$x^3+px+q=0$的3个根，计算行列式$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}$的值。

分析　因为α,β,γ是方程$x^3+px+q=0$的3个根，由根与系数的关系，有$\alpha+\beta+\gamma=0$，而行列式中每列3个元素之和都等于$\alpha+\beta+\gamma$。因此，先把各行都加到第一行，再利用条件$\alpha+\beta+\gamma=0$来计算。

解
$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha+\gamma+\beta & \beta+\alpha+\gamma & \gamma+\beta+\alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}=0$$

注：此计算方法具有普遍意义，凡行列式每行（每列）元素之和相等时，均可用此方法。

【例 1.3】　计算n阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

解　观察此行列式的特点，各行和各列元素的和都相等。由上题，将下面各行都加至第一行，得

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

当然，此题还可将各行加到第n行，各列加到第1（或n）列，提取公因子，得到相同的结果。

【例 1.4】 设$F(x)=\begin{vmatrix}x-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}&-a_{14}\\-a_{21}&x-a_{22}&-a_{23}&-a_{24}\\-a_{31}&-a_{32}&x-a_{33}&-a_{34}\\-a_{41}&-a_{42}&-a_{43}&x-a_{44}\end{vmatrix}$，求：（1）$x^4$的系数；（2）$x^3$的系数；（3）常数项。

分析 根据行列式的定义，在4阶行列式的展开式中，每一项是来自不同行和不同列的4个元素的乘积，此行列式是关于x的多项式，因此在含有4！个项的多项式中含有x^4、x^3的项，只有在$(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$这一项中，其余各项中关于$x$的次数最多为 2。由于$F(x)$是一个关于$x$的多项式，因此它的常数项就是$x$=0 时$F(x)$的值。

解 （1）含x^4的项出现在$(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$中，可见$x^4$的系数为1。

（2）含x^3的项出现在

$$-a_{11}(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})-a_{22}(x-a_{11})(x-a_{33})(x-a_{44})-a_{33}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{44})$$
$$-a_{44}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})$$

中，可见x^3的系数为$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$。

（3）常数项，即为x=0 时$F(x)$的值。

$$F(0)=\begin{vmatrix}-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}&-a_{14}\\-a_{21}&-a_{22}&-a_{23}&-a_{24}\\-a_{31}&-a_{32}&-a_{33}&-a_{34}\\-a_{41}&-a_{42}&-a_{43}&-a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

【例 1.5】 已知 1998、2196、2394、1800 都能被 18 整除，不计算行列式的值，证明

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}1&9&9&8\\2&1&9&6\\2&3&9&4\\1&8&0&0\end{vmatrix}$$

能被 18 整除。

分析 由行列式的性质可知，若行列式的一行或一列能被 18 整除，则行列式能被 18 整除。由题设可知，若把$\boldsymbol{D}_4$的每一行都看成一个四位数，则能被 18 整除，因此利用性质，将行列式$\boldsymbol{D}_4$的一列化为能被 18 整除即可。

证明 将行列式$\boldsymbol{D}_4$的第 1、2、3 列分别乘以 1000、100、10、且都加到第 4 列上，则得

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}1&9&9&1998\\2&1&9&2196\\2&3&9&2394\\1&8&0&1800\end{vmatrix}$$

由条件可知，18 能被上面行列式的第 4 列整除，因此，由行列式的性质可知，D_4 能被 18 整除。

【例 1.6】 计算行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值。

分析 此行列式的特点是零元素比较多，从而行列式展开式中零项就较多，因此只要找出非零项，就可计算行列式的值；也可利用行列式按行（列）的展开公式求解；利用拉普拉斯展开式最简单。

解
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$$

【例 1.7】 证明 n 阶行列式
$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos n\theta$$

分析 虽然此行列式出现较多的 0，可利用行列式按行（列）展开公式，但明显用数学归纳法简单。

证明 数学归纳法。

当 $n=1$ 时，结论显然成立。

当 $n=2$ 时，有
$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$
结论也成立。

假设结论对于小于 n 阶的行列式是成立的。对于 D_n 按第 n 行展开，有
$$D_n = (-1)^{2n-1}\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+2\cos\theta\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n-1}$$

前一个行列式再对其 $n-1$ 列展开即 D_{n-2}，后一个行列式即 D_{n-1}。由归纳假设，有

$$\begin{aligned} D_n &= -D_{n-2}+2\cos\theta D_{n-1} \\ &= -\cos(n-2)\theta+2\cos\theta\cos(n-1)\theta \\ &= -\cos(n-2)\theta+\cos n\theta+\cos(n-2)\theta \\ &= \cos n\theta \end{aligned}$$

所以，结论正确。

【例 1.8】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

分析 根据该行列式的特点，有多种计算方法。

解法一 D_n 中虽然第 n 行的元素均不为零，但它们所对应的余子式均为上（下）三角形行列式，按第 n 行展开有

$$D_n= a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ a_{n-2}(-1)^{n+3}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + \cdots + a_3(-1)^{n+n-2}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+a_2(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}+(x+a_1)(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+a_{n-1}(-1)^{n+2}x(-1)^{n-2}+a_{n-2}(-1)^{n+3}+x^2(-1)^{n-3}+\cdots$$

$$+a_3(-1)^{2n-2}x^{n-3}(-1)^2+a_2(-1)^{2n-1}+x^{n-2}(-1)+(x+a_1)(-1)^{2n}x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n$$

解法二 递推法。将 $\boldsymbol{D}_n$ 按第一列展开，得

$$\boldsymbol{D}_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\boldsymbol{D}_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=a_n+x\boldsymbol{D}_{n-1}。$$

由递推公式，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_n&=a_n+x\boldsymbol{D}_{n-1}=a_n+x(a_{n-1}+x\boldsymbol{D}_{n-2})\\&=a_n+a_{n-1}x+x^2\boldsymbol{D}_{n-2}=a_n+a_{n-1}x+x^2(a_{n-2}+x\boldsymbol{D}_{n-3})\\&=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+x^3\boldsymbol{D}_{n-3}=\cdots\\&=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-2}\boldsymbol{D}_2\end{aligned}$$

又 $$\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=(a_1+x)x+a_2=a_2+a_1x+x^2$$

故 $$\boldsymbol{D}_n=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n$$

按第一列展开时，利用了 a_n 的余子式是一个三角形行列式，如果按第一行展开，余子式的计算较复杂。

解法三

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ \sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}+x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$