線性代數與應用

Linear Algebra and Applications

葉維彰 編著

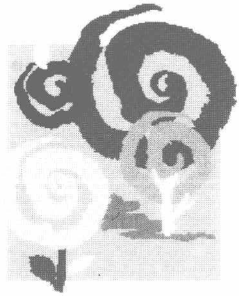
線性代數與應用

Linear Algebra and Applications

葉維彰 編著

國家圖書館出版品預行編目資料

線性代數與應用／葉維彰編著. 一一初版.
一一臺北市：五南，2008.12
面； 公分
參考書目：面
含索引
ISBN 978-957-11-5459-6（平裝）
1.線性代數
313.3 97022559



5Q13

線性代數與應用

編　　著 — 葉維彰（324.4）
發 行 人 — 楊榮川
總 編 輯 — 龐君豪
主　　編 — 黃秋萍
責任編輯 — 蔡曉雯
封面設計 — 莫美龍
出 版 者 — 五南圖書出版股份有限公司
地　　址：106台北市大安區和平東路二段339號4樓
電　　話：(02)2705-5066　　傳　　真：(02)2706-6100
網　　址：http://www.wunan.com.tw
電子郵件：wunan@wunan.com.tw
劃撥帳號：01068953
戶　　名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室/台中市中區中山路6號
電　　話：(04)2223-0891　　傳　　真：(04)2223-3549
高雄市駐區辦公室/高雄市新興區中山一路290號
電　　話：(07)2358-702　　傳　　真：(07)2350-236

法律顧問　元貞聯合法律事務所　張澤平律師

出版日期　2008年12月初版一刷
定　　價　新臺幣550元

序

線性代數乃為近代數學基礎的一大支，除具有衆多的抽象理論外，更含有甚多實用之價值，亦即它為一門涵蓋數值方法與應用兩者併容的學科；其主要內容包括基本理論的探討，重要數值技巧以及實際應用之闡釋。

筆者曾在大學院校講授線性代數有年，深知坊間猶需一本以中文撰寫的線性代數書籍，職是之故，遂以多年來所編授課講義，以及拙著「管理數學」書中部分資料為圭臬，將其彙編為這本專書，俾應廣大讀者的企求，並利教學，以期能啓迪學習意願與興趣，提高學習成效。

全書共七章，旨在揭橥基本理論有關的問題及其應用。書中內容豐富，章節完整，敘述平易，例題尤多，除可供大專相關科系教學之用外，復能作為自行研習的藍本。

本書足敷一學年教學之用，若感教學時數不裕時，可在不虞有悖連貫性的前提下，盱衡各科系之特性，就中選擇所擅的章節予以講授，務期達到學以致用之鵠的。

本書在編著過程中，荷蒙家父葉民松教授精心審稿、雠正，復承胞弟葉維弘博士、弟媳婦劉怡均博士以及清華大學師長、同儕多人慨賜卓見，內人大力協助，更有陳靜慧小姐辛勞的打字，使得本書得以順利付梓，併此深致謝意。

線性代數所涉及的範疇至為廣泛，著墨惟艱，筆者才識譾陋，未學膚受，雖多盡力，疏漏難免，至祈先進賢達不吝惠賜匡正為禱！

葉維彰 謹識

民國九十六年　孟夏

於清華大學工工系所

內容綱要

本書共分為七章，所探討的內容至為廣泛，為便於學習，爰將書中各章節的主要內涵，概括臚列於下：

第一章　矩陣

在現實生活中，很多科技與經濟領域的問題，都可將其歸納為線性特性的數學模式予以處理。矩陣具有特殊的運算，常用來解決線性、競賽與排隊理論等問題，此處除介紹矩陣各種性質及運算方法，並以其代表線性方程組外，亦將用來求解線性方程組。此外，另專節論述密碼通訊技術與方法。

第二章　行列式

行列式乃以矩陣為變數之實數值函數，其研究與應用旨在求解聯立線性方程式。本章係以奇偶排列、餘因式方式來定義行列式，討論行列式之基本性質、行列式對逆矩陣、聯立線性方程組之求解、判斷與應用。同時，併述馬可夫鏈中之吸收鏈、差分方程式中的拉格蘭吉變分法與吸收鏈等範疇內之應用。

第三章　向量與向量空間

於本章中，將研討向量、向量的運算、外積、向量空間及子空間的基本性質，定義線性組合、相依和獨立的關係，並闡釋線性轉換、基底與維數，以及秩與零維數之特性與其求法，以利後續各章之應用。同樣也在章末併述競賽理論中代數解法和 2×2 矩陣型競賽兩種應用。

第四章　內積空間

首先對內積空間加以定義，再探討範數與距離、柯西——史瓦茲不等式及正交與正交補餘，單範正交的一些基本性質，併述葛蘭——史密特方法，最小平方法求解的過程，末了介紹正交矩陣的特性與功能。而最小平方法的應用亦將在章末出現。

第五章　特徵値與特徵向量

特徵値與特徵向量在矩陣應用中占有很重要的地位，且其用途非常廣泛，有關性質將在本章中予以研習；此外，對矩陣對角線化，正交對角線化，對稱矩陣以及正定矩陣的定義、特性亦均詳加著墨。至於微分方程式以及差分方程式中的聯立方程組兩領域的應用，在本章內亦占有一席之地。

第六章　線性轉換

旨在探討線性轉換的意義、性質，並對核集與値域、逆線性轉換、轉換與線性方程組的各種基本性質加以縷述，最後，亦對座標向量、線性轉換的矩陣表示法之意義、方法一併加以探討。用途廣泛的最小平方擬合與有向圖形兩種應用，當然也不可獨缺，在本章末均將介紹。

第七章　複數向量空間

一般上，除了實數向量空間廣受應用之外，複數向量空間亦有頗多的用途，尤其是傅立爾矩陣（級數）更是應用中的龍頭。本章中除了介紹複數及其有關空間外，還針對么正與赫密特矩陣，以及傅立爾矩陣的各項性質、應用方法多所著墨。除此而外，差分方程式中的高階差分方程式和轉移運算子法，雙雙俱為複數的一種典型應用，故亦將其列在章末予以探討。

一般參考書目

除在書中各章末羅列有各章參考、引用資料的有關書籍外，另於書末附有本書編著時所參考、引用資料之一般有關書目。

中英名詞索引

最後則將本書中的有關名詞，彙整其中英文對照索引，俾供讀者參考、引用，庶免因各方編譯之互異，而滋生無謂的困惑。

目　錄

Chapter

1 矩陣

- 線性方程組
- 矩陣
- 矩陣的運算
- 逆矩陣
- 基本列運算
- 聯立方程式
- 高斯消去法
- 應用

在現實生活中，有很多工程、科技、商業及經濟等實際的問題，都可以將它歸納為具有線性（linear）特性的數學模式，而逕予簡化及加以處理；然而在實際應用上，因矩陣（matrix）具有特殊的運算，所以常常被用來解決各種領域中頗為複雜的問題。

本章中我們將介紹線性方程組的特性，並討論各種矩陣有關之性質及其運算，亦將使用矩陣代表方程組，同時，也用來求解線性方程組，並列舉兩個有關例題以供參考。

1.1 線性方程組

線性方程組有很多的理論和實用的場所，如在工程、科學、商業和經濟領域之中，都有廣泛的應用，尤其在近代應用上，有些問題往往需要求解百萬個方程式和未知數，這種系統稱為大型系統（large-scale systems），而其他的系統則稱為小型（small-scale）線性系統。線性方程組及其求解方法之研究，乃為線性代數主要的一個課題。

1.1.1 線性方程式

凡具有 $a_1x + a_2y = b$ 型式的方程式稱為線性方程式（linear equation），其圖形在 xy －平面上為一條直線。一個含有 n 個變數 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的線性方程式可以標準式加以表示為：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中係數 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 或稱為實數常數（real constant）；而變數 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 或稱為未知數（unknows）。

例 1.1.1

下列各方程式均為線性方程式：

$$2x + 3y = 6$$
$$y = x + \frac{1}{3}z - 2$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 10$$

線性方程式 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 的解（solution）為其未知數 $x_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 含有個數值 $c_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 之集合，使得

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$$

代入原方程式時，能夠滿足方程式。而由這些解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 組成之集合稱為此方程式的解集合（solution set）或通解（general solution）。

一般上，線性方程式僅可為一次方，而不可為任一變數之開方或其乘積，同時也不得為三角函數、對數函數或指數函數之引數（argument）。

例 1.1.2

下列各方程式均不為線性方程式。

$$2x^2 + y = -4$$
$$x - \cos y = 1$$
$$3x + \sqrt{y} - z = 2$$
$$2x + xy = 6$$
$$\log x + 2y = 3$$
$$x^2 + \pi y = -1$$

例 1.1.3

試解下列兩方程式。

(1) $6x - 3y = 9$

(2) $x + 2y - 3z = 4$

❑ 解

(1)可指定 y 為一個任意值，再對 x 求解；或可指定 x 為一個任意值，再對 y 求解，所得結果都相同。設

$$x = t$$

則

$$y = 2t - 3$$

此處 t 為任意參數，t 值不同則所得 x, y 之值也不同。

如 $t = 1$ 時，可得

$$x = 1, y = -1$$

又如 $t = \dfrac{3}{2}$ 時，則得

$$x = \frac{3}{2}, y = 0$$

(2)可對方程式中兩變數指定為任意之值，再代入求解第三個變數的值。設

$$x = s, y = t$$

代入原式得

$$z = \frac{1}{3}(s + 2t - 4)$$

以上所討論的線性方程式都為實數線性方程式（real linear equation），在另一方面，線性方程式

$$(2 + i)\, x_1 + 3x_2 = 1 + 2i,\ i = \sqrt{-1}$$

則包含了 $a + bi$ 的複數（complex numbers）型式，其中 a, b 皆為實數（real numbers），則稱此線性方程式為複數線性方程式。有關複數線性方程式的一些性質，我們將於第七章中再加以檢討。

1.1.2 線性方程組

在 m 個線性方程式中，而含有相同 n 個未知數 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 依序

出現時，稱為一 $m \times n$ 線性方程組（system of linear equations）或線性系統（linear system）。若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 為方程組中每一個方程式的解時，則數列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 稱為此方程組之一解。

例 1.1.4

試求下列方程組的解：

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9$$
$$x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -4$$

解

上列方程組具有

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$$

的解。蓋因這些值均能同時滿足上述兩個方程式。

在所有線性方程組中，並非個個都有解，沒有解的線性方程組稱為矛盾方程組（inconsistent），而至少含有一組解的線性方程組則稱為相容的（consistent）。

例 1.1.5

試判斷下列各方程組，何者為相容的、何者為矛盾方程組。

(1) $3x_1 - 6x_2 = 9$
$\quad x_1 - 2x_2 = 4$

(2) $4x_1 - 2x_2 = -1$
$\quad 2x_1 - x_2 = 3$

(3) $3x_1 - 2x_2 = -1$
$\quad 4x_1 - 5x_2 = -6$

解

(1)矛盾方程組

(2)矛盾方程組

(3)相容的

底下特地使用圖示來解線性方程組，若有下列兩方程式的方程組：

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$
$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$

其中 a_1, b_1 及 a_2, b_2 皆不為零。上述這兩個方程式所代表的圖形均為直線（如圖1.1.1），設兩直線為 l_1 及 l_2，則方程組之解即為直線 l_1 及 l_2 之交點 (x_1, x_2)。這一組線性方程組可能有一組解，無解或無限多組解。

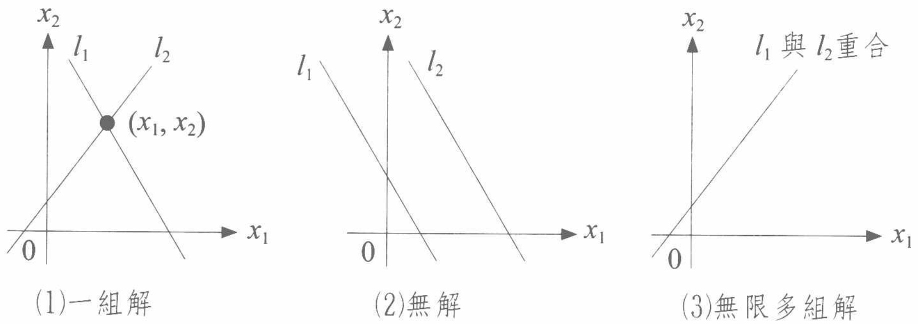


圖1.1.1　線性方程組的圖解

由圖1.1.1可以知道，線性方程組的圖解可以將它歸納為：

(1)兩直線 l_1, l_2 可能僅相交於一點(x_1, x_2)，故方程組恰有一組解。

(2)兩直線 l_1, l_2 可能平行而無交點，故方程組無解。

(3)兩直線 l_1, l_2 可能重疊，而有無限多組交點，故方程組有無限多組解。

例 1.1.6

試以圖解法求下列各方程組的解。

(1) $x + 3y = 12$

$-2x + y = -3$

(2) $2x - y = -3$

$4x - 2y = -2$

(3) $6x + 3y = 9$

$4x + 2y = 6$

解

(1)方程組有一交點，故有一組解 $x = 3, y = 3$。

(2)代表方程組的兩直線平行而無交點，故方程組無解。

(3)方程組中之兩方程式表同一直線，即直線上任何的點都為方程組一組解，故方程組有無限多組解。

1.2 矩陣

矩陣（matrix）即指由一些實數或複數所形成的「矩形陣列」，而使用符號「〔　〕」或「（　）」將數字加以括起來。例如：

$$[2\ \text{-}1]，\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}，\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&6\\-5&0&4\end{bmatrix}，\begin{bmatrix}1+2i&3i\\2-i&2+3i\end{bmatrix}，(-1, 2)$$

而構成矩陣的各數，稱為矩陣的元素（element）。矩陣中橫方向（水平線）的各元素形成矩陣的列（row），縱方向（鉛垂線）的各元素形成矩陣的行（column），從上而下的各列，分別稱為第一列、第二列、……等；從左而右的各行，分別稱為第一行、第二行、……等。一個矩陣的列數與行數分別為 m 或 n 時，則稱為 m 列 n 行矩陣，以記號「$m \times n$」表之，並稱為此矩陣之階數（order）。

定義1.2.1

矩陣

若 m, n 均為正整數，且每一個 a_{ij}（$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$）皆為實

數（或複數），則型如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

稱為一個實數（或複數）矩陣，可簡記為 $A=[a_{ij}]$，其階數為 $m\times n$，即矩陣 A 有 m 列及 n 行。

一般都使用符號 a_{ij} 代表位於第 i 列及第 j 行交點的元素，而列行的關係如下：

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & & \vdots & \end{bmatrix} & \text{第 } i \text{ 列} \\ \text{第 } j \text{ 行} & \end{array}$$

矩陣可依其元素的性質，或各元素間之關係，分為下列幾種不同的矩陣：

1.方陣

在 $m\times n$ 階矩陣 A 中，當 $m=n$ 時，稱矩陣 A 為方陣（square matrix），以 $A=[a_{ij}]_n$ 表示。如

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_2,\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}_3$$

2.零矩陣

矩陣中之每一元素均為0時，稱此矩陣為零矩陣（zero matrix, null matrix），以 $\mathbf{0}=[0]_{m\times n}$ 加以表示。如