高等学校教材

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

常微分方程

韩茂安 周盛凡 邢业朋 丁玮

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

常微分方程

ChangWeifen Fangcheng

韩茂安　周盛凡　邢业朋　丁　玮

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是作者在多年主讲“常微分方程”课程讲稿的基础上整理而成。全书共有六章，分别是：一阶微分方程，一阶线性常微分方程组，高阶线性常微分方程，非线性微分方程基本理论，定性理论与分支方法初步，常微分方程边值问题。各章均配有适量的习题。

本书可作为高等师范院校与综合性大学数学类专业的常微分方程课程的教材，也可作为物理、计算机等理工科同类课程的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程/韩茂安等编．—北京：高等教育出版社，2011．2

ISBN 978－7－04－031543－1

Ⅰ．①常…　Ⅱ．①韩…　Ⅲ．①常微分方程－高等学校－教材　Ⅳ．①O175．1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 260168 号

策划编辑	兰莹莹	**责任编辑**	张晓丽	**封面设计**	赵　阳
责任绘图	黄建英	**版式设计**	余　杨	**责任校对**	杨健艺
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400－810－0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市京南印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2011 年 2 月第 1 版
印　　张	12	**印　　次**	2011 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	19.30 元

物料号　31543－00

前　言

本书是作者多年在上海师范大学从事常微分方程课程教学讲稿的基础上整理而成的。

第一章介绍求解一阶微分方程的基本方法。首先从实际问题出发,引出微分方程的数学模型及若干基本概念,接着阐述一阶微分方程的一些求解方法。第二章阐述一阶线性微分方程组理论。首先给出必要的线性代数知识,应用皮卡逼近法证明解的存在与唯一性定理,并以此定理为基础建立了通解的结构,最后给出求解常系数一阶线性微分方程组的基本方法。第三章探索高阶线性微分方程的解的结构和常系数高阶线性微分方程的求解方法。第四章主要建立一般的一阶微分方程的基本理论。首先建立在矩形区域上求解初值问题的解的存在与唯一性定理,在此基础上建立解的延拓理论和求解初值问题的解的大范围存在与唯一性定理,最后证明了解对初值和参数的连续性和可微性定理。第五章首先给出零解稳定和渐近稳定的概念,以及研究零解稳定性的李雅普诺夫函数方法,并用此方法进一步研究了平面系统双曲奇点的稳定性;其次,较深入地阐述一维周期微分方程基本理论,给出了利用庞加莱映射和后继函数判定零解渐近稳定的一般方法,进而利用一维周期微分方程基本理论建立了焦点的稳定性及其阶数、极限环的稳定性及其重数等重要概念(这一处理方式与众不同);此外还给出焦点与极限环的稳定性判定准则和研究极限环存在与唯一的经典方法;最后描述了几类常见的分支现象,并介绍了近几年获得的新结果。第六章介绍研究常微分方程边值问题的若干方法。

本书前四章都是最基本的必学内容,第五章和第六章可根据具体情况(课程课时、讲授进度等)选讲一部分,其中标有星号“*”的定理证明难度较大,可以不讲。后两章内容特别可供有志于读研的高年级学生和一年级研究生自学之用,也可作为数学专业的教师教学参考。

本书第一章由邢业朋执笔,第二、三章由周盛凡执笔,第四、五章由韩茂安执笔,第六章由丁玮执笔,书稿完成后由韩茂安修改定稿。我们力求做到选材经典,逻辑严密,思路清晰,论证无误,习题适当(个别较难习题标有星号“*”,供选做)。

由于编者水平所限,对于书中不当及错漏之处,恳请专家、同行及读者不吝赐教。

编　者
2009 年 6 月

目　　录

第一章　一阶微分方程

§1.1　微分方程和解

1.1.1　微分方程与数学模型

客观世界的自然规律可以用数学语言给予较精确的描述. 微分方程就是体现数学语言的一种工具. 在给出微分方程的定义之前,我们先看几个例子.

人口增长模型

我们用 $P(t)$ 表示 t 时刻的人口数. 假设仅由出生和死亡导致人口的变化,即不存在移民的情况. 习惯上我们用出生函数与死亡函数来描述人口的增长和减少. 这两个函数的定义如下:

- $\beta(t)$ 表示在 t 时刻起的一个单位时间内出生人数与 $P(t)$ 比;
- $\delta(t)$ 表示在 t 时刻起的一个单位时间内死亡人数与 $P(t)$ 比.

在时间间隔 $[t,t+\Delta t]$ 内人口的出生数与死亡数可分别近似地表示为 $\beta(t)P(t)\Delta t$ 和 $\delta(t)P(t)\Delta t$. 于是在长度为 Δt 的区间 $[t,t+\Delta t]$ 内人口的改变量 ΔP 为

$$\Delta P = \{\text{出生数}\} - \{\text{死亡数}\} \approx \beta(t)P(t)\Delta t - \delta(t)P(t)\Delta t.$$

即 $\dfrac{\Delta P}{\Delta t} \approx [\beta(t)-\delta(t)]P(t)$. 这个近似的误差在 $\Delta t \to 0$ 时消失. 于是取极限得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (\beta-\delta)P, \tag{1.1}$$

这里 $\beta=\beta(t)$, $\delta=\delta(t)$, $P=P(t)$. 式(1.1)是含有未知函数 P 及其一阶导数的方程,称其为微分方程.

逻辑斯谛方程

我们会发现随着人口数量增加到一定规模后出生率反而会下降,原因是多方面的,涉及科学、文化的发展和有限的食物供应等. 若假设出生率函数 β 是人口函数 P 的线性减函数,则有 $\beta=\beta_0-\beta_1 P$, 其中 β_0,β_1 是正常数. 如果死亡率 $\delta=\delta_0$ 保持不变,则方程(1.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (\beta_0-\beta_1 P-\delta_0)P,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = aP - bP^2, \tag{1.2}$$

其中 $a=\beta_0-\delta_0$，$b=\beta_1$. 方程(1.2)也含有未知函数 P 及其一阶导数，且右端关于 P 是非线性的，因此称(1.2)为非线性微分方程. 如果 a,b 皆为正数，常称(1.2)为**逻辑斯谛方程**(Logistic Equation).

加速度一速度模型

我们用位移函数 $x=x(t)$ 来描述物体沿直线的运动，则物体的速度

$$v(t)=x'(t),\text{ 即 } v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

它的加速度

$$a(t)=v'(t)=x''(t),\text{ 或 } a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

根据牛顿第二定律，若设物体在力 $F(t)$ 的作用下沿直线运动，则有

$$ma(t)=F(t),\text{ 即 } m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(t),$$

其中 m 表示物体的质量. 下面考虑物体在重力作用下沿铅直方向运动. 若取向上方向为正方向，并忽略空气阻力，则有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-mg,\text{ 即 } \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g, \tag{1.3}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g. \tag{1.4}$$

方程(1.3)与(1.4)是含有未知函数导数的等式.

我们知道随着运动速度的增加，物体除受重力 G 作用外还受到空气阻力 f 的影响. 牛顿在他的著作《数学原理》中说过：f 的大小与速度的平方成正比，即 $f=kv^2$，$k>0$. 但经验表明，空气阻力对速度的影响非常复杂. 它依赖于物体的大小、形状和空气的密度、黏滞度等因素. 一般地讲，$f=kv^p$，$k>0$，其中 $1\leqslant p\leqslant 2$. 相对低的速度下，f 仅与速度成正比，即 $p=1$，相对高的速度下，$p=2$，其他情形下可认为 $1<p<2$. 现在我们假设空气阻力与速度的平方成正比，取向上的方向为正方向，则当物体向上运动 ($v>0$) 时，由于阻力总是与运动方向相反，$f<0$；而当物体向下运动 ($v<0$) 时 $f>0$，从而有

$$f=-kv\,|\,v\,|,k>0.$$

由牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg-kv\,|\,v\,|.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g-\rho v\,|\,v\,|,\rho=k/m>0. \tag{1.5}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g-\rho\frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|,\rho=k/m>0. \tag{1.6}$$

1.1.2 定义和术语

下面给出微分方程的基本概念.

定义 1.1 含有未知函数之导数的等式称为**微分方程**.

微分方程可以按照包含导数的类型、阶数以及关于未知函数及其导数是否线性等进行分类. 如果方程中未知函数只与一个自变量有关,则称为**常微分方程**. 前面得到的方程(1.1)—(1.6)都是常微分方程. 如果未知函数是多元函数,且在方程中出现了偏导数,则称为**偏微分方程**. 例如下面的热传导方程和波动方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=K\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

本书主要介绍常微分方程. 在常微分方程中,最高阶导数的阶数称为**方程的阶**. 例如

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4-4y=e^x$$

是一个二阶常微分方程. 方程 $(y-x)dx+4xdy=0$ 可改写为

$$4x\frac{dy}{dx}+y=x,$$

因而是一个一阶常微分方程. 一阶常微分方程有以下三种形式:

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.7}$$

$$y'=f(x,y), \tag{1.8}$$

和

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0. \tag{1.9}$$

(1.7)和 (1.8)分别称为**一阶隐式方程**和**一阶显式方程**. (1.9)称为**微分形式**的一阶方程.

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.10}$$

在一般的讨论中,我们常假设(1.10)中最高阶导数可以被解出,即下面的 **n 阶显式方程**

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{1.11}$$

在方程(1.10)和(1.11)中,如果 F 或 f 关于 y 及其各阶导数都是线性的,则称之为**线性常微分方程**;否则,称其为**非线性常微分方程**. 例如 n 阶线性方程应具有形式

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x).$$

也就是说线性方程具有以下性质：

- 因变量 y 及其各阶导数若出现则都是一次的.
- y 及其各阶导数系数只依赖于自变量 x.

由上述定义可知

$$(y-x)\mathrm{d}x+4x\mathrm{d}y=0,\ y''-2y'+y=0,\ x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=\mathrm{e}^x$$

分别是一阶、二阶和三阶线性常微分方程；

$$(1+y)y'+2y=\mathrm{e}^x,\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\sin y=0,\ \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+y^2=0$$

分别是一阶、二阶和四阶非线性常微分方程.

方程的解

定义 1.2 设函数 $y=\phi(x)$ 在区间 I 上至少有到 n 阶的导数. 如果把 $y=\phi(x)$ 代入(1.10)，得到在区间 I 上关于 x 的恒等式

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

则称 $y=\phi(x)$ 是(1.10)在区间 I 上的解.

注 函数 ϕ 的定义区间 I 可以是开区间、闭区间、半开半闭区间，也可以是无穷区间. 一般地，我们总假设 $\phi(x)$是一个实值函数.

这样，由定义 1.2 可直接验证：

1. 函数 $y=x^4/16$ 是非线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy^{1/2}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上的解；

2. 函数 $y=x\mathrm{e}^x$ 是线性方程 $y''-2y'+y=0$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上的解.

显式解与隐式解

学过微积分学后，我们对显函数、隐函数的概念并不陌生. 若定义 1.2 中定义的解 $\phi(x)$可表示成自变量的显函数，则称之为**显式解**. 像上面例子中的函数 $y=x^4/16$ 和 $y=x\mathrm{e}^x$ 分别是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy^{1/2}$ 与 $y''-2y'+y=0$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上的显式解. 我们还注意到这两个方程还有常数解 $y=0,-\infty<x<+\infty$，像这样恒等于常数的解称为**平凡解**. 有时候方程(1.10)的解 $y=\phi(x)$ 在区间 I 上同时满足关系式$G(x,y)=0$. 此时称 $G(x,y)=0$ 是方程(1.10)的**隐式解**. 换句话说，由变量 x 与 y 满足关系式 $G(x,y)=0$ 可推得它们满足(1.10). 例如：$x^2+y^2-4=0$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{1.12}$$

在区间 $-2<x<2$ 的隐式解. 事实上，由隐函数求导法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^2-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}4=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0,\ 即\ 2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

从后一个等式中解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 便得到(1.12). 在此例中,容易从 $x^2+y^2-4=0$ 解出两个显式解 $y_1=\sqrt{4-x^2}$ 和 $y_2=-\sqrt{4-x^2}$. 但是一般地我们不必把 y 表示成 x 的函数,保留隐函数关系式即可. 比如后面我们会遇到形如 $x\mathrm{e}^{2y}-\sin xy+y^2+C=0$ 的解,就无法通过代数方法解出 y. 换句话说,隐式解本身就是一种解的存在形式.

特解与通解

很多情况下,求解微分方程在本质上就是求积分. 例如在(1.3)中两边积分后就得到解 $v=-gt+C$, 其中 C 为任意常数. 求解一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 时也会得到一个包含任意常数 C 的函数族 $G(x,y,C)=0$, 我们称之为**通解**. 一般地,求解 n 阶方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 时会得到含 n 个任意常数的解 $G(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$, 称之为 n 阶微分方程的**通解**,与此对应,我们称不包含任意常数的解是方程的**特解**. 例如 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解, $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 和 $y=0$ 是分别对应于 $C=1,C=0$ 的特解. 容易验证 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 是二阶线性方程 $y''-y=0$ 的通解,而 $y=0(C_1=C_2=0)$, $y=\mathrm{e}^x(C_1=1,C_2=0)$ 和 $y=5\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}(C_1=5,C_2=2)$ 是特解.

微分方程的解可以分段给出. 考虑方程 $xy'-4y=0$. 容易验证 $y=Cx^4$ 是解. 因此易知分段函数

$$y=\begin{cases}-x^4, & x<0,\\ x^4, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

是个特解,但不对应于 $y=Cx^4$ 中的某一个特定值 C.

1.1.3 初值问题

从前面的例子可以看出,一个微分方程通常有无穷多个解,而在解决实际问题时,往往只要求得到满足特定条件的特解. 例如(1.3)式描述的自由落体运动方程,对 t 积分两次得

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{1.13}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个独立的任意常数,它表示的是任意自由落体的运动规律. 显然,在同一时刻,从不同高度并以不同初速度自由下落的物体,应有不同的运动轨迹. 假设物体从初始位置 H(以 m 为单位),以初速度 v_0(以 m/s 为单位)开始下落,即 $x(0)=H$ 且 $x'(0)=v_0$, 代入(1.13)后得到 $C_1=v_0$, $C_2=H$. 于是满足上述条件的特解为

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+H. \tag{1.14}$$

这就是出现在中学物理教材中的自由落体运动公式.

一般地,对任意给定实数组 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$,求解方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{1.15}$$

满足条件

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{1.16}$$

的解的问题称为 n **阶初值问题**.加在 y 及其导函数上的条件(1.16)称为**定解条件**或**初值条件**.有时,我们把(1.15),(1.16)放在一起写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

初值问题也常称为**柯西**(Cauchy)问题.相应地,求解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

的问题分别称为一阶和二阶初值问题.于是我们称(1.14)是二阶初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -g, \\ x(0) = H,\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

的解.

初值问题(1.17)和(1.18)有很明显的几何意义,微分方程的任一个特解 $y = \phi(x)$ 在几何上均表示 xOy 平面上的一条曲线.这条曲线称为方程的**积分曲线**或**解曲线**;通解则表示 xOy 平面上的一族曲线,称为方程的**积分曲线族**或**解曲线族**.初值问题(1.17)表示在 xOy 平面上求一条通过点 (x_0, y_0) 的解曲线;初值问题(1.18)表示在 xOy 平面上求一条不仅过点 (x_0, y_0) 而且在该点切线斜率为 y_1 的积分曲线.

求解 n 阶初值问题的步骤可表述为:

1. 求出通解;
2. 把定解条件代入通解,确定任意常数的值.

例 1.1 求方程 $y' = y$ 满足 $y(0) = 3$ 且经过 $(1, -2)$ 的解.

解 容易验证 $y = Ce^x$ 是方程 $y' = y$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的通解.令 $x = 0, y = 3$ 得 $3 = Ce^0 = C$,从而初值问题

$$y'=y,\ y(0)=3$$

的解是 $y=3\mathrm{e}^x$. 再求过 $(1,-2)$ 的解，即求解初值问题

$$y'=y,\ y(1)=-2.$$

由 $-2=C\mathrm{e}^1$ 知，$C=-2\mathrm{e}^{-1}$，从而 $y=-2\mathrm{e}^{x-1}$ 就是所求的解.

例 1.2 已知 $x=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t$ 是 $x''+16x=0$ 双参数解族. 求解初值问题

$$\begin{cases} x''+16x=0, \\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2,\ x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1. \end{cases}$$

解 由 $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$ 得 $C_1\cos 2\pi+C_2\sin 2\pi=-2$，显然 $C_1=-2$. 将 $x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ 代入 $x'=-4C_1\sin 4t+4C_2\cos 4t$ 得 $C_2=\dfrac{1}{4}$，从而

$$x=-2\cos 4t+\frac{1}{4}\sin 4t$$

就是所求解.

上述几个例子中初值问题的解都是唯一的，这是不是普遍规律呢？答案是否定的. 我们考虑方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y^{\frac{2}{3}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解. 容易验证，单参数族 $y=(x+C)^3$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y^{\frac{2}{3}}$ 的通解，代入初始条件定解条件得 $C=0$，即 $y=x^3$ 是初值问题的解. 此外方程还有平凡解 $y=0$，它显然也适合条件 $y(0)=0$，一个初值问题有两个不同的解. 事实上可以构造出无穷多个分段解(留给读者思考). 一个很自然的问题：在什么条件下，初值问题的解唯一？第四章将专门就一阶初值问题解的存在唯一性展开讨论.

习 题 1.1

1. 指出下面微分方程的阶数，并判断它们是不是线性方程：

(1) $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$；

(2) $x\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4+y=0$；

(3) $yy'+2y=1+x^2$；

(4) $x^3y^{(4)}-x^2y''+4xy'-3y=0$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2}$；

(6) $x^2\mathrm{d}y+(y-xy-x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=0$；

(7) $(\sin x)y'''-(\cos x)y'=2$.

2. 验证给定函数是相应微分方程在特定区间上的解(其中 C_i 表示常数)：

(1) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=0$; $y=Ce^{t^2}, -\infty<x<+\infty$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{|y|}$; $y=x|x|, -\infty<x<+\infty$.

(3) $x\dfrac{dy}{dx}=1$; $y=\ln(Cx), x>0, C>0$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^3}$; $y=\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt, -1<x<+\infty$.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=2x\sqrt{1+x^6}$; $y=\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt, -\infty<x<+\infty$.

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$; $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x, -\infty<x<+\infty$.

3. 确定 m 的值使得下面方程存在给定形式的解：

(1) $y''-5y'+6y=0$, $y=e^{mx}$;

(2) $y''+10y'+25y=0$, $y=e^{mx}$;

(3) $x^2y''-y=0$, $y=x^m$;

(4) $x^2y''+6xy'+4y=0$, $y=x^m$;

(5) $y'=(y\ln y)/x$, $y=me^x$;

(6) $y'=3y$, $y=me^{mx}$;

4. 确定以下列单参数函数族为通解的微分方程：

(1) $y=Ce^{3x}$;

(2) $y^2=Cx$;

(3) $x^2+y^2=C^2$;

(4) $x\ln y=C$.

5. 确定以 $y=y(x)$ 为解的微分方程：

(1) $y(x)$ 的图像在 (x,y) 处的斜率等于 (x,y) 到 $(0,0)$ 的距离；

(2) $y(x)$ 的图像在 (x,y) 处的切线通过点 $(x+y,x+y)$.

§1.2 积分法与可分离变量方程

很多数学家经过长期努力得到了一些特殊类型的一阶微分方程的解法.我们会看到每种方法都有其独特性，而这些方法之间又相互关联.从本节开始到§1.4节，我们将依次介绍可分离变量方程、线性方程和恰当方程的解法.

1.2.1 积分法

对于一阶显式方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{1.19}$$

当右端函数为 $f(x,y)=g(x)$ 时，即(1.19)具有形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x) \tag{1.20}$$

时，如果 $g(x)$ 连续，则对(1.20)两边积分后，得

$$y=\int g(x)\mathrm{d}x=G(x)+C \quad 或\ y=\int_a^x g(u)\mathrm{d}u+C, \tag{1.21}$$

其中 $G(x)$ 表示 $g(x)$ 的不定积分. 这就是(1.20)的**通解**.

例 1.3 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+\mathrm{e}^{2x}.$$

解 两边积分，则有

$$y=\int(1+\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$$

同理，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x^2)$$

的通解是

$$y=\int_0^t \sin(1+u^2)\mathrm{d}u+C.$$

不同的是，后一个方程的解无法用 x 的初等函数表示.

积分法看似简单，但它是微分方程解法的基础. 事实上很多一阶微分方程的解法都可以归为求一个或几个不定积分.

1.2.2 可分离变量方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)h(y) \tag{1.22}$$

的方程称为**可分离变量方程**. 它总可以通过积分法求解.

易见当 $h(y)\neq 0$ 时(1.22)两边同除以 $h(y)$ 后得到

$$\frac{1}{h(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

为方便起见，令 $g(y)=1/h(y)$，可见(1.20)是(1.22)中 $h(y)=1$ 的特例. 若假设 $y=\phi(x)$ 是(1.22)的解，则有 $g(\phi(x))\phi'(x)=f(x)$，两边对 x 积分得

$$\int g(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.23}$$

考虑到 $\phi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$，(1.23)等同于

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

若存在 F 和 G 使得 $F'=f, G'=g$，则

$$\int g(y)\mathrm{d}y = G(y) + C_1,\quad \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C_2.$$

于是(1.22)的解满足

$$G(y) = F(x) + C, \tag{1.24}$$

其中 $C = C_2 - C_1$ 表示任意实数.另一方面,任何联系 x,y 的函数若满足(1.24)则必适合(1.22),因此(1.24)就是(1.22)的隐式通解,某些情况下可从(1.24)中解出一个或数个显式解 $y = y(x,C)$. 同时,我们应当注意到,若存在实数 y_0 使得 $h(y_0) = 0$,则 $y(x) \equiv y_0$ 满足方程(1.22),称为**常数解**.某些情况下常数解可从通解获得,有些时候则不能从通解得到.

上述求解过程的主要思路是,把只与 x 有关的函数和只与 y 有关的函数分别置于方程的两侧,然后再积分,所以这种方法称做**变量分离法**.

显然,微分形式的一阶方程

$$f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x + g_1(y)g_2(y)\mathrm{d}y = 0$$

也属于可分离变量的方程.

例 1.4 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{1+x}.$$

解 当 $y \neq 0$ 时,分离变量,方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

两边积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x},$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + C_1,$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|1+x|+C_1} = |1+x|\,\mathrm{e}^{C_1}.$$

去掉绝对值,得

$$y = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}(1+x).$$

令 $C = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}$,则 $C \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,方程的参数解族可表示为

$$y = C(1+x)\ (C \neq 0).$$

此外,$y = 0$ 是常数解,可以把它对应于 $y = C(1+x)$ 中 $C = 0$ 的情形.因此方程的**通解**为

$$y = C(1+x).$$

例 1.5 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1-y^2}.$$

解 当 $1 - y^2 \neq 0$ 时,分离变量,方程化为