普通高中课程标准实验教材

高中数学

选修 2-1

GAOZHONG SHUXUE

新课标新精编

XINKEBIAO XINJINGBIAN

主编 胡建军

配人教A版

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

选修 2–1

新课标新精编

顾　问　岑　申　王而冶　金才华　许芬英

主　编　胡建军

编　者　杨期南　郑日锋　尚　俊　胡建军

浙江教育出版社

ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

新课标新精编:人教A版.高中数学.2-1:选修/胡建军编.—杭州:浙江教育出版社,2008.9

ISBN 978-7-5338-7668-5

Ⅰ.新… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第133271号

责任编辑 金馥菊　　**封面设计** 韩 波
责任校对 胡 星　　**责任印务** 温劲风

普通高中课程标准实验教材

新课标 新精编 高中数学 选修2-1

- 主　　编　胡建军
- 出版发行　浙江教育出版社
　　　　　(杭州市天目山路40号 邮编310013)
- 图文制作　杭州富春电子印务有限公司
- 印　　刷　杭州杭新印务有限公司
- 开　　本　880×1230　1/16
- 印　　张　8.75
- 字　　数　271 000
- 印　　数　0 001—8 000
- 版　　次　2008年9月第1版
- 印　　次　2008年9月第1次
- 标准书号　ISBN 978-7-5338-7668-5
- 定　　价　15.00元

联系电话:0571-85170300-80928

e-mail:zjjy@zjcb.com　　网址:www.zjeph.com

前　言

高中课程改革正在全国各地逐步展开。其中，高中数学新课程旨在提高学生的科学素养，改变学生的学习方式，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神，配合人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用，帮助学生实现高中数学课程的教育目标，我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师，在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上，编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以"讲求循序渐进，重视科学思想与科学方法，强调实践意识与探究精神，渗透情感态度与价值观的教育"为原则，与人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点：

1. 同步性。本丛书的例题和练习均以课时为基本单位，根据新课程教学的要求和学生学习的特点进行编写，与教学同步，便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要，设置了"学法指导"、"基础例说·基本训练"、"应用·拓展·综合训练"、"自我评估"、"高考链接"等栏目。"学法指导"帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求。"基础例说·基本训练"分"例说"和"训练"两部分，"例说"以典型例题为载体，教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法；"训练"目的在于让学生通过训练，巩固所学知识，发展思维能力。"应用·拓展·综合训练"纵览全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。"自我评估"为全章知识的综合评估，分 A，B 两份试卷，其中 A 卷为基本要求，B 卷为较高要求。"高考链接"选取近几年有代表性的高考真题，让学生试做，以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求以及学生在不同学习阶段的不同要求，本丛书选编的训练题都分为"A 组"和"B 组"两组，分别反映了课程的基础性目标和发展性目标，使不同层次的学生都能够充分获益，也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念，突出数学探究、联系实际，注重激发学生学习的兴趣，力求反映近年来高中数学教学和命题研究的最新成果，所选习题无论是在内容上，还是在形式上，都具有一定的新颖性。

由于时间匆促，加上作者对新课程的认识有待进一步提高，本丛书在编写时难免出现一些不足之处，敬请广大师生指正。

浙江教育出版社

2008 年 9 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertong

第一章　常用逻辑用语

学法指导

本章主要内容有：命题及其关系，充分条件与必要条件，简单的逻辑联结词，全称量词与存在量词.

学习目标

1. 理解命题的概念和命题的构成，能判断给定陈述句是否为命题，能判断命题的真假；能把命题改写成"若 p，则 q"的形式；理解命题的逆命题、否命题与逆否命题；会分析四种命题之间的关系；会利用互为逆否命题的两个命题之间的关系判断命题的真假.

2. 理解充分条件、必要条件与充要条件的含义；会判断条件是充分条件、必要条件还是充要条件；培养辩证思维能力和等价转化思想.

3. 了解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义；能正确利用"或"、"且"、"非"叙述数学内容；知道命题的否定与否命题的区别.

4. 理解全称量词与存在量词的意义，能准确地利用全称量词与存在量词叙述数学内容.

重点、难点

重点：分清命题的条件和结论，判断命题的真假、四种命题之间的关系，理解和掌握充分条件、必要条件的判断方法，理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的意义，理解全称量词与存在量词的意义，正确判断全称命题与特称命题的真假，正确地对含有一个量词的命题进行否定.

难点：四种命题之间的关系及其应用，充分条件、必要条件的判断和证明，全称命题和特称命题的否定.

主要概念、定理、公式及规律

1. 命题的有关概念

可以判断真假的陈述句叫命题. 根据其真假，命题可分为真命题和假命题. "若 p，则 q"是命题的一种常见形式，其中 p 是条件，q 是结论.

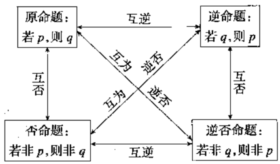
如果把一个有条件和结论的命题叫原命题，那么可以写出它的逆命题、否命题和逆否命题.

互逆命题：如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们称这两个命题为互逆命题.

互否命题：如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定，那么我们称这两个命题为互否命题.

互为逆否命题：如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定，那么我们称这两个命题互为逆否命题.

四种命题之间的相互关系：



互逆命题或互否命题的两个命题的真假性没有关系，但是互为逆否命题的两个命题有相同的真假性. 因此，当正面证明某个命题成立比较困难时，我们可以证明它的逆否命题成立，反证法就是这一原理的应用.

2. 充分条件、必要条件

(1) 对于一个含有条件的命题，如果条件 p 可以推出结论 q 成立，即 $p \Rightarrow q$，那么称 p 是 q 的充分条件.

如果结论 q 成立时，条件 p 必须满足，即 $q \Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的必要条件.

(2) 判断充分条件和必要条件时，首先要分清条件是什么，结论是什么. 注意下列两种句型：

①"A 是 B 的________条件"，这里 A 是条件，B 是结论.

②"A 的________条件是 B"，这里 B 是条件，A 是结论.

如果条件能推出结论，那么条件是充分的；如果结论能推出条件，那么条件是必要的.

③如果条件 p 既是结论 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，那么 p 是 q 的充要条件. 此时，如果反过来把 q 看作条件，p 看作结论，那么 q 也是 p 的充要条件.

3. "或"、"且"、"非"命题

把简单命题用"或"、"且"、"非"等逻辑联结词联结可得到新的命题，熟练掌握含有"或"、"且"、"非"命题真假的判断方法.

4. 全称命题、特称命题

(1) 含有全称量词的命题叫做全称命题. 要判断全称命题"$\forall x \in M, p(x)$"是真命题，需要对集合 M 中每一个元素 x，证明 $p(x)$ 成立；如果在集合 M 中找到一个元素 x_0，使得 $p(x_0)$ 不成立，那么这个全称命题是假命题.

含有存在量词的命题叫做特称命题. 要判断特称命题"$\exists x_0 \in M, p(x_0)$"是真命题，只需在集合 M 中找到一个元素 x_0，使得 $p(x_0)$ 成立即可；如果在集合 M 中，使 $p(x)$ 成立的元素 x 不存在，那么这个特称命题是假命题.

(2) 特称命题的否定：特称命题 p：$\exists x_0 \in M, p(x_0)$，

它的否定是$\neg p$: $\forall x\in M$, $\neg p(x)$，即否定特称命题时，先将存在量词换为全称量词，然后否定其性质，因此，特称命题的否定是全称命题.

全称命题的否定：全称命题p: $\forall x\in M$, $p(x)$，它的否定是$\neg p$: $\exists x_0\in M$, $\neg p(x_0)$，即否定全称命题时，先将全称量词换为存在量词，然后否定其性质，因此，全称命题的否定是特称命题.

学习方法指导

正确使用逻辑用语是现代社会公民应该具备的基本素质之一. 无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，人们都需要正确运用逻辑用语表达自己的思想. 在本模块中，同学们将要在已经掌握的知识的基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用逻辑用语准确表达数学内容，更好地进行交流. 在学习中，要注意以下几个方面的问题：

(1) "常用逻辑用语"在高中数学中的整体定位.

高中数学课程中"常用逻辑用语"的内容与大学课程"逻辑学"和"数理逻辑"等是不同的，学习"常用逻辑用语"的目的并不是为学习逻辑学和数理逻辑奠定基础，而是使我们能正确使用常用逻辑用语，更好地理解数学内容中的逻辑关系，避免在使用过程中产生错误.

(2) 通过实例去理解"常用逻辑用语"，避免形式化.

常用逻辑用语的学习不应只从抽象的定义出发，而应该通过数学和生活中的丰富实例去理解常用逻辑用语的意义，体会常用逻辑用语的作用. 如从集合角度掌握充分条件、必要条件等. 同时也要注意"常用逻辑用语"与某些"日常习惯用语"的区别. 如"或"这个逻辑联结词与日常习惯用语中的"或"的区别等. 在高中阶段，重要的是理解常用逻辑用语在认识和表达数学内容的过程中的作用.

(3) "常用逻辑用语"的学习重在应用.

对于"常用逻辑用语"的学习，不仅需要以已学过的数学知识为载体，而且需要把常用逻辑用语用于后继的数学学习中. 因此，"常用逻辑用语"的学习重在应用，在应用中不断地加深对"常用逻辑用语"的认识.

基础例说·基本训练

1.1 命题及其关系

1.1.1 命　题

例说

例 1 下列语句是不是命题？若是，试判断其真假.

(1) 请起立.

(2) $x^2+x>0$.

(3) 对于任意实数a，都有$a^2+1>0$.

(4) $x=-a$.

(5) 91是素数.

(6) 中国是世界上人口最多的国家.

(7) 这道数学题有趣吗？

(8) 若$|x-y|=|a-b|$，则$x-y=a-b$.

(9) 任何无限小数都是无理数.

(10) 这是一棵大树.

解 语句(1)、(2)、(4)、(7)、(10)不是命题，语句(3)、(5)、(6)、(8)、(9)是命题. 其中语句(3)、(6)是真命题.

因为$91=13\times7$，所以语句(5)是假命题.

因为$|x-y|=|a-b|$，得$x-y=\pm(a-b)$，所以语句(8)是假命题.

因为只有无限不循环小数才是无理数，所以语句(9)是假命题.

注意 一个命题首先必须是陈述句，一般地，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题；其次，这个陈述句的真假必须是可以判定的，不能判断真假的语句，也不是命题. 语句(1)、(7)不是陈述句，所以不是命题. 尽管语句(2)、(4)都是陈述句，但语句中含有变量，在没有给定变量的值或取值范围的情况下，无法判断语句的真假，所以也不是命题. 虽然语句(10)是陈述句，但是由于"大树"没有界定标准，不能判断"这是一棵大树"的真假，所以也不是命题. 此外，有些语句是省略句，判断语句的真假，有时需要与具体情况联系起来.

例 2 把下列命题写成"若p，则q"的形式，并判断其真假.

(1) 三边对应相等的两个三角形全等.

(2) 末位数字是0的整数是5的倍数.

(3) 两个邻补角的角平分线互相垂直.

(4) 两条对角线相等的四边形是矩形.

解 (1) 若两个三角形的三边对应相等，则这两个三角形全等. 它是真命题.

(2) 若一个整数的末位数字是0，则这个整数是5的倍数. 它是真命题.

(3) 若两个角互为邻补角，则这两个角的角平分线互相垂直. 它是真命题.

(4) 若四边形的两条对角线相等，则这个四边形是矩形. 它是假命题.

注意 将原命题改写成"若p，则q"形式的命题时，需找出命题的条件和结论，并且注意所叙述条件和结论的完整性.

例 3 已知命题p: 关于x的不等式$|x-2|\geqslant m-1$的解集为$\mathbf{R}$，

命题q: 函数$f(x)=-(7-3m)^x$是减函数，

为使p和q中有且只有一个命题是真命题，求实数m的取值范围.

解 若 p 是真命题,则 $m-1\leqslant 0$,即 $m\leqslant 1$.

若 q 是真命题,则 $7-3m>1$,即 $m<2$.

(1) 当 p 是真命题,且 q 是假命题时,$\begin{cases}m\leqslant 1,\\ m\geqslant 2,\end{cases}$

得 m 无解.

(2) 当 p 是假命题,且 q 是真命题时,$\begin{cases}m>1,\\ m<2,\end{cases}$

得 $1<m<2$.

综上所述,m 的取值范围是 $1<m<2$.

训 练

A 组

1. 给出下列语句:
①地球上的四大洋.
②$-5\in\mathbf{Z}$.
③$\pi\notin\mathbf{R}$.
④"我国的直辖市"可以组成一个集合.
其中命题的个数是( ).
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 下列语句不表示命题的是( ).
(A) $\varnothing\subset\{0\}$
(B) 正方形是矩形
(C) 余弦函数是否为周期函数
(D) 两条平行直线的斜率相等

3. 给出下列命题:
①面积相等的三角形是全等三角形.
②矩形的对角线互相垂直.
③若 $xy=0$,则 $|x|+|y|=0$.
④若 $a>b$,则 $a+c>b+c$.
其中真命题的个数是( ).
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 给出下列语句:
①菱形是平行四边形.
②质数一定是奇数.
③求证:三角形的高交于一点.
④4 比 2 大吗?
⑤若 $x\geqslant 0$,则 $x^2+x\geqslant 0$.
⑥我校的全体学生.
其中是命题的语句是________,是假命题的语句是________.

5. 下列语句中,哪些是命题?如果是命题,试判断其真假.
(1) 实数可分为正实数和负实数.
(2) 内角相等的菱形是正方形.
(3) 请帮我解一下这道数学题.
(4) 求证:方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根.
(5) 3 大于 π.

6. 判断下列命题的真假.
(1) $x^2+100=0$ 不是方程.
(2) 方程 $x^2=16$ 的解是 $x=\pm 4$.
(3) 若 $a\in\mathbf{R}$,则 $a^0=1$.
(4) 两个无理数的和是无理数.

7. 把下列命题写成"若 p,则 q"的形式,并判断其真假.
(1) 对顶角相等.
(2) 等角的余角相等.
(3) 菱形的对角线互相垂直平分.
(4) 末位数字是 0 的整数可以被 2 整除.

8. 已知命题"若 $x_1<x_2<0$,则 $\frac{a}{x_1}>\frac{a}{x_2}$"是假命题,求实数 a 满足的条件.

B 组

9. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是非零的平面向量,且互相不共线. 给出下列命题:
①$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.
②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.
③$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不垂直.
④$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$.
其中真命题是( ).
(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ②④

10. 设 α,β,γ 为两两不重合的三个平面,a,b,c 为两两不重合的三条直线. 给出下列命题:
①若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,则 $\alpha/\!/\beta$.
②若 $a\subset\alpha,b\subset\beta,a/\!/\beta,b/\!/\alpha$,则 $\alpha/\!/\beta$.
③若 $\alpha/\!/\beta,c\subset\alpha$,则 $c/\!/\beta$.
④若 $\alpha\cap\beta=a,\beta\cap\gamma=b,\gamma\cap\alpha=c,a/\!/\gamma$,则 $b/\!/c$.
其中真命题的个数是( ).
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

11. 给出下列关于四棱柱的命题:
①若四棱柱的两个侧面垂直于底面,则这个四棱柱是直四棱柱.

②若过四棱柱的两条相对的侧棱所作的截面都垂直于底面,则这个四棱柱是直四棱柱.

③四个侧面全等的四棱柱是直四棱柱.

④四条对角线相等的四棱柱是直四棱柱.

其中真命题是________.

12. 已知 $p:|x^2-x|\geq 6$,$q:x\in \mathbf{Z}$. 若 p 是假命题,q 是真命题,求实数 x 的取值范围.

13. 已知 p:关于 x 的方程 $ax^2+bx+1=0$ 有解是真命题,求实数 a,b 满足的条件.

14. 把下列命题写成"若 p,则 q"的形式.

(1) $ac<bc\Rightarrow a>b$.

(2) 已知 x,y 是正整数,当 $x+y=2$ 时,$x=1,y=1$.

(3) 当 $a>\frac{1}{4}$时,方程 $ax^2-x+1=0$ 无实数根.

(4) 当 $abc=0$ 时,$a=0,b=0,c=0$.

(5) 方程 $x^2-2x-3=0$ 的解是 $x=-1$ 或 $x=3$.

1.1.2 四种命题与四种命题的相互关系

例说

例 1 判断下列命题的真假,并写出它的逆命题、否命题与逆否命题,同时指出它们的真假.

(1) 若 $a=0$,则 $ab=0$.

(2) 全等三角形的对应边相等.

(3) 四条边相等的四边形是正方形.

解 (1) 原命题:若 $a=0$,则 $ab=0$. 它是真命题.

逆命题:若 $ab=0$,则 $a=0$. 它是假命题.

否命题:若 $a\neq 0$,则 $ab\neq 0$. 它是假命题.

逆否命题:若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$. 它是真命题.

(2) 原命题可以写成:若两个三角形全等,则这两个三角形的对应边相等. 它是真命题.

逆命题:若两个三角形的对应边相等,则这两个三角形全等. 它是真命题.

否命题:若两个三角形不全等,则这两个三角形的对应边不相等. 它是真命题.

逆否命题:若两个三角形的对应边不相等,则这两个三角形不全等. 它是真命题.

(3) 原命题可以写成:若一个四边形的四条边相等,则这个四边形是正方形. 它是假命题.

逆命题:若一个四边形是正方形,则这个四边形的四条边相等. 它是真命题.

否命题:若一个四边形的四条边不相等,则这个四边形不是正方形. 它是真命题.

逆否命题:若一个四边形不是正方形,则这个四边形的四条边不相等. 它是假命题.

注意 *解决此类问题的关键是找出原命题的条件 p 和结论 q,如果原命题是省略句,必要时需把它补充完整. 同时要注意原命题与逆否命题、逆命题与否命题均互为逆否命题,因此,其真假性相同.*

例 2 求证:对角互补的四边形必内接于圆.

分析 *由于原命题与逆否命题同真或同假,在原命题不容易证明时,可改证它的逆否命题.*

证明 改证它的逆否命题:"若四边形不内接于圆,则它的对角不互补".

如图 1-1、图 1-2 所示,若四边形 $ABCD$ 不内接于圆,则过不在同一直线上的三点 A,B,C 所作的圆不能通过点 D,这时,点 D 在圆内或在圆外,没有其他可能.

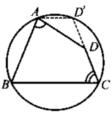


图 1-1

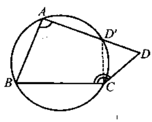


图 1-2

若点 D 在圆内(如图 1-1),延长 CD 至圆上一点 D',连结 AD',则有$\angle D'AB+\angle C=180°$.

而$\angle D'AB>\angle DAB$,

∴ $\angle DAB+\angle C<180°$.

因而$\angle ADC+\angle B>180°$.

故四边形 $ABCD$ 的对角不互补.

若点 D 在圆外(如图 1-2),同样可证明对角不互补.(证明请读者补上)

例 3 若 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$,求证:关于 x 的方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与方程 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中,至少有一个方程有实数根.

分析 *"至少有一个方程有实数根"的反面情况比较简单,即"两个方程都没有实数根".*

证明 假设两个方程都没有实数根,

则 $\Delta_1<0$,且 $\Delta_2<0$,

从而 $\Delta_1+\Delta_2<0$. ①

又 $\Delta_1+\Delta_2=(p_1^2-4q_1)+(p_2^2-4q_2)$

$=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)$,

由已知 $2(q_1+q_2)=p_1p_2$,

得 $\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2\geqslant 0$.

这与①矛盾,故所给的两个方程中至少有一个方程有实数根.

注意 常见的反设情况有:

原结论	是	都是	$>(<)$	至少有一个	至多有一个
反设	不是	不都是	$\leqslant(\geqslant)$	一个也没有	至少有两个

训练

A 组

1. 命题"若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$"的逆命题是( ).
   (A) 若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$
   (B) 若 $ac^2>bc^2$,则 $a\geqslant b$
   (C) 若 $ac^2<bc^2$,则 $a<b$
   (D) 若 $a\leqslant b$,则 $ac^2\leqslant bc^2$
2. 命题"若 $a>0$,则 $a^2>0$"的否命题是( ).
   (A) 若 $a^2>0$,则 $a>0$
   (B) 若 $a<0$,则 $a^2<0$
   (C) 若 $a\leqslant 0$,则 $a^2\leqslant 0$
   (D) 若 $a\leqslant 0$,则 $a^2\geqslant 0$
3. 下列说法不正确的是( ).
   (A) "若 p,则 q"与"若 q,则 p"是互逆命题
   (B) "若非 p,则非 q"与"若 q,则 p"是互否命题
   (C) "若非 p,则非 q"与"若 p,则 q"是互否命题
   (D) "若非 p,则非 q"与"若 q,则 p"互为逆否命题
4. 给定原命题"全等三角形的面积相等",则下列判断正确的是( ).
   (A) 逆命题为真命题,否命题为假命题,逆否命题为真命题
   (B) 逆命题为假命题,否命题为假命题,逆否命题为真命题
   (C) 逆命题为真命题,否命题为假命题,逆否命题为假命题
   (D) 逆命题为真命题,否命题为真命题,逆否命题为真命题
5. 下列命题中,不是真命题的为( ).
   (A) "若 $b^2-4ac>0$,则二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根"的逆否命题
   (B) "四边相等的四边形是正方形"的逆命题
   (C) "$x^2=9$,则 $x=3$"的否命题
   (D) "对顶角相等"的逆命题
6. 与命题"若 $a\notin M$,则 $b\notin M$"等价的命题是( ).
   (A) $b\in M$,且 $a\notin M$ (B) 若 $b\notin M$,则 $a\in M$
   (C) 若 $b\in M$,则 $a\in M$ (D) 若 $a\notin M$,则 $b\in M$
7. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中,( ).
   (A) 真命题与假命题的个数相同
   (B) 真命题的个数一定是奇数
   (C) 真命题的个数一定是偶数
   (D) 真命题的个数可能是奇数,也可能是偶数
8. 命题"若 $q\leqslant 1$,则方程 $x^2+2x+q=0$ 有实数根"的逆命题是____________,
   否命题是____________,
   逆否命题是____________.
9. 命题"若$\triangle ABC$不是等腰三角形,则$\triangle ABC$的任何两个内角都不相等"的逆命题为____________,否命题为____________,逆否命题为____________.
10. 原命题"各位数字之和是 3 的倍数的正整数可以被 9 整除"与它的逆命题、否命题及逆否命题中,假命题是________,真命题是________.
11. 已知命题 p:"若 $ac\geqslant 0$,则二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根".
    (1) 写出命题 p 的否命题.
    (2) 判断命题 p 的否命题的真假,并证明你的结论.
12. 在$\triangle ABC$中,$\angle A,\angle B,\angle C$的对边分别为 a,b,c.若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$,求证:$\angle B$ 必为锐角.

B 组

13. 在下列命题中,真命题是( ).
    (A) 命题"若 $ac>bc$,则 $a>b$"
    (B) 命题"若 $b=3$,则 $b^2=9$"的逆命题
    (C) 命题"当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$"的否命题
    (D) 命题"相似三角形的对应角相等"的逆否命题
14. 给出命题:"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a\neq b$,且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$".在原命题、逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中,真命题的个数是( ).
    (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertong

15. 若命题 p 的否命题为 r，命题 r 的逆命题为 s，则 s 是 p 的逆命题 t 的(　　).

(A) 逆否命题　　(B) 逆命题

(C) 否命题　　(D) 原命题

16. 命题"若不等式 $x^2+px+q>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则 $p^2-4q<0$"的逆命题为________________，否命题为________________，逆否命题为________________.

17. 命题"若 $ab=0$，则 $a=0$，或 $b=0$"的逆命题为________________，否命题为________________，逆否命题为________________.

18. 命题"若 $x=1$，$y=2$，则 $x+y=3$"的逆否命题为________________.

19. 已知下列三个方程：$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$. 若至少有一个方程有实数根，求实数 a 的取值范围.

20. 给出命题"已知 $p>0$，$q>0$. 若 $p+q\leqslant 2$，则 $p^3+q^3=2$."写出它的逆命题，判断其真假，并证明你的结论.

1.2 充分条件与必要条件

1.2.1 充分条件与必要条件

例 说

例 1 填空：

(1) "一个整数的末位数字为 0"是"这个数可被 5 整除"的________条件.

(2) "两个整数的和是偶数"是"这两个数都是偶数"的________条件.

(3) "两个三角形全等"的________条件是"它们有一组对边相等".

(4) "$x^2(y-1)(y-2)\neq 0$"的________条件是"$x\neq 0$".

答案 (1) 充分不必要.

(2) 必要不充分.

(3) 必要不充分.

(4) 必要不充分.

注意 判断充分或必要条件时，首先要分清问题中条件是什么，结论是什么. 通过分析句子的成分可知，在句型"A 是 B 的________条件"中，A 是条件，B 是结论；而在句型"A 的________条件是 B"中，B 是条件，A 是结论. 若条件成立时，结论一定成立，即条件⇒结论，则这个条件是充分条件；若结论成立时，条件必须成立，即结论⇒条件，则这个条件是必要条件.

例 2 (2007·湖北卷文)已知 p 是 r 的充分不必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 给出下列命题：

①s 是 q 的充要条件.

②p 是 q 的充分不必要条件.

③r 是 q 的必要不充分条件.

④$\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要不充分条件.

⑤r 是 s 的充分不必要条件.

其中真命题的序号是(　　).

(A) ①④⑤　　(B) ①②④

(C) ②③⑤　　(D) ②④⑤

分析 可将 p,r,q,s 的关系用推出符号表示，然后利用图示解答问题.

由题意，得 $p\Rightarrow r$，$r\not\Rightarrow p$，$q\Rightarrow r$，$r\Rightarrow s$，$s\Rightarrow q$，易知 $s\Leftrightarrow q$，

∴ ①正确. 又∵ $p\Rightarrow r\Leftrightarrow q$，$r\not\Rightarrow p$，∴ ②正确.

①②正确，排除选项 A，C，D，故选 B.

答案 B.

例 3 已知 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ $(m>0)$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

解法 1 由 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，得 p：$-2\leqslant x\leqslant 10$.

由 q：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$ $(m>0)$，

得 q：$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$.

∴ $\neg p$：$x<-2$，或 $x>10$，

$\neg q$：$x<1-m$，或 $x>1+m$.

∵ $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，

∴ $\neg q\Rightarrow\neg p$，且 $\neg p\not\Rightarrow\neg q$.

故 $\begin{cases}1+m\geqslant 10,\\1-m\leqslant -2,\end{cases}$ 且两式等号不同时成立.

∴ $m\geqslant 9$.

∴ m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 9\}$.

解法 2 $p:-2\leqslant x\leqslant 10$,

$q:1-m\leqslant x\leqslant 1+m$.

∵ $\neg q\Rightarrow\neg p$ 等价于 $p\Rightarrow q$, ∴ $\begin{cases}1-m\leqslant -2,\\10\leqslant 1+m,\end{cases}$

∴ $m\geqslant 9$.

∵ 上面不等式组中两等号不同时成立,即 $q\nRightarrow p$,亦即 $\neg p\nRightarrow\neg q$,

∴ m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 9\}$.

注意 语句"$\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件"中,"$\neg p$"是主语,"是"是谓语,"条件"是宾语,"$\neg q$ 的必要不充分"是修饰宾语的定语,语句中最主要的主、谓、宾成分构成的语句为"$\neg p$ 是条件",从而看出"$\neg p$"是命题的条件,因此"$\neg q$"是结论. 若"$\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件"是真命题,则 $\neg q$ 可推出 $\neg p$,但 $\neg p$ 不能推出 $\neg q$. 另外,解法 1 是直接从正面求解,而解法 2 是利用原命题和逆否命题的等价性求解.

训 练

A 组

1. 用符号"⇒"或"⇏"填空:

(1) $a\neq 0$,或 $b\neq 0$ ________ $ab\neq 0$.

(2) $a\neq 0$,或 $b\neq 0$ ________ $a^2+b^2>0$.

(3) $a>-b$ ________ $(a+b)(a^2+b^2)>0$.

(4) $a>|b|$ ________ $a+|b|>0$.

2. 用符号"⇒"或"⇏"填空:

(1) $a>b\geqslant 0$ ________ $a^2\geqslant b^2$.

(2) $|a|>b$ ________ $|a|>|b|$.

(3) $|a|>|b|$ ________ $a^4>b^4$.

(4) $a^2<b^2$ ________ $a<-b$ 且 $a>b$.

3. 用"充分"或"必要"填空:

(1) "$x\in A\cap B$"是"$x\in A$"的________条件.

(2) "$x\in A\cup B$"是"$x\in B$"的________条件.

(3) "$x\in(\complement_U A)$"是"$x\in U$"的________条件.

(4) "$x\in(\complement_U A)\cup A$"是"$x\in A$"的________条件.

4. 下列"若 p,则 q"形式的命题中,哪些命题中 p 是 q 的充分条件? 哪些命题中 p 是 q 的必要条件?

(1) 若 $x>2$,则 $|x|>1$.

(2) 若 $x<3$,则 $x^2<4$.

(3) 若 $x=1$,则 $x-1=\sqrt{x-1}$.

(4) 若两个三角形的周长相等,则这两个三角形的面积相等.

(5) 若一个学生的学习成绩好,则这个学生一定是三好学生.

5. (1) 写出 $|x|<10$ 的一个充分不必要条件.

(2) 写出 $x>-2$ 的一个必要不充分条件.

6. 在①$a=1$,②$a=-1$,③$|a|=1$ 中,哪些是 $a^2=1$ 的充分条件? 哪些是 $a^2=1$ 的必要条件?

7. 指出下列各命题中,p 是 q 的什么条件,q 是 p 的什么条件.

(1) $p:x^2>0$,$q:x>0$.

(2) $p:x+2\neq y$,$q:(x+2)^2\neq y^2$.

(3) p:a 能被 6 整除,q:a 能被 3 整除.

(4) p:两个角不都是直角,q:两个角不相等.

8. 指出下列各命题中,p 是 q 的什么条件,q 是 p 的什么条件.

(1) $p:x>\frac{1}{a}$,$q:x>\frac{1}{a}+1$.

(2) $p:x\geqslant\frac{1}{2}$,$q:x^2-x+\frac{1}{4}=0$.

(3) $p:(x+1)(x+2)=0$,$q:x<0$.

(4) $p:a<b$,$q:|a-b|\geqslant a-b$.

9. 已知 $p:x^2+x-6=0$,$q:mx+1=0$,且 q 是 p 的充分不必要条件,求 m 的值.

10. 已知 $p:|5x-2|>3$,$q:\frac{1}{x^2+4x+5}\geqslant 0$,试判断 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件.

B 组

11. 不等式 $|2x+5|\geqslant 7$ 成立的一个必要不充分条件是( ).

(A) $x\geqslant 1$　　(B) $x\leqslant -6$

(C) $x\geqslant 1$,或 $x\leqslant -6$　　(D) $x>0$,或 $x<0$

12. 若 $a\geqslant b$ 是 $c>d$ 的充分不必要条件,$e\leqslant f$ 是 $a<b$ 的必要不充分条件,则(　　).

(A) $c<d$ 是 $e\geqslant f$ 的必要不充分条件

(B) $c\leqslant d$ 是 $e>f$ 的充分不必要条件

(C) $c\geqslant d$ 是 $e<f$ 的必要不充分条件

(D) $c\leqslant d$ 是 $e\leqslant f$ 的充分不必要条件

13. 若不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$,则实数 a 的取值范围是________.

14. 是否存在实数 p,使"$4x+p<0$"是"$x^2-x-2>0$"的充分条件?如果存在,求出 p 的取值范围.

15. 已知 p:$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$,$q$:$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\}$.若 p 是 q 的充分条件,求实数 a 的取值范围.

1.2.2　充要条件

例说

例 1　从"充分不必要条件"、"必要不充分条件"与"充要条件"中选出适当的一种填空:

(1) "$x\leqslant -1$"是"$x\leqslant 1$"的________.

(2) "$x^2-y^2-6x+8y=7$"是"$x+y=7$"的________.

(3) "$a^2-ab+\frac{b^2}{4}>0$"是"$ab<0$"的________.

(4) 当 $a\in\mathbf{N}^*$,$b\in\mathbf{N}^*$ 时,"a^3+b^3 是奇数"是"$a+b$ 是奇数"的________.

分析　(1) $x\leqslant -1\Rightarrow x\leqslant 1$,而 $x\leqslant 1\not\Rightarrow x\leqslant -1$,故应填"充分不必要条件".

(2) 因为 $x^2-y^2-6x+8y-7=(x+y-7)(x-y+1)$,

所以 $x^2-y^2-6x+8y=7\not\Rightarrow x+y=7$.

而 $x+y=7\Rightarrow x^2-y^2-6x+8y=7$,

故应填"必要不充分条件".

(3) 由 $ab<0$,可知 $-ab>0$,故可得 $a^2-ab+\frac{b^2}{4}>0$;反过来,由 $a^2-ab+\frac{b^2}{4}=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2>0$,仅可得 $a\neq\frac{b}{2}$,不能推出 $ab<0$.故应填"必要不充分条件".

(4) 因为"$a+b$ 是奇数"$\Leftrightarrow$"a,b 一奇一偶",

故"a^3+b^3 是奇数"$\Leftrightarrow$"a^3,b^3 一奇一偶"

$\Leftrightarrow$"a,b 一奇一偶",

故"a^3+b^3 是奇数"$\Leftrightarrow$"$a+b$ 是奇数",

应填"充要条件".

答案　(1) 充分不必要条件.(2) 必要不充分条件.(3) 必要不充分条件.(4) 充要条件.

例 2　若 a,b,c 都是实数,从

(A) $ab=0$,　　(B) $a+b=0$,

(C) $a^2+b^2=0$,　　(D) $ab>0$,

(E) $a+b>0$,　　(F) $a^2+b^2>0$

中,分别选出适合下列条件的选项,用代号填空:

(1) 使 a,b 都为 0 的充分条件是________.

(2) 使 a,b 都不为 0 的充分条件是________.

(3) 使 a,b 中至少有一个为 0 的充要条件是______.

(4) 使 a,b 中至少有一个不为 0 的充要条件是____________.

分析　(A) $ab=0$,即 $a=0$,或 $b=0$.

(B) $a+b=0$,即 $a=-b$.

(C) $a^2+b^2=0$,即 $a=b=0$.

(D) $ab>0$,即 a,b 同正或同负.

(E) $a+b>0$,即 $a>-b$.

(F) $a^2+b^2>0$,即 a,b 中至少有一个不为 0.

答案　(1) C.　(2) D.　(3) A.　(4) F.

例 3　已知 $ab\neq 0$,求证:$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

证明　必要性:

若 $a+b=1$,即 $b=1-a$,

则 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2$

$=a^3+(1-a)^3+a(1-a)-a^2-(1-a)^2=0$.

充分性:

若 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$,

则 $(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)=0$,

即 $(a^2-ab+b^2)(a+b-1)=0$.

又∵　$ab\neq 0$,即 $a\neq 0$,且 $b\neq 0$,

∴　$a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\neq 0$,

∴　$a+b=1$.

综上可知,当 $ab\neq 0$ 时,$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

注意　命题"若 $ab\neq 0$,则 $a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$"中,"$ab\neq 0$"是大前提,"$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$"是条件,而"$a+b=1$"是结论,所以由"$a+b=1$"证明"$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$"是由结论证明条件成立,即证明必要性.而由"$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$"证明"$a+b=1$"是由条件证明结论成立,即证明充分性.

例 4 已知关于 x 的两个一元二次方程：

$mx^2-4x+4=0$ ($m\in\mathbf{Z}$)， ①

$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ ($m\in\mathbf{Z}$)， ②

求方程①和方程②都有整数根的充要条件.

解 方程①有实数根的充要条件是

$\Delta_1=16-4\times4m\geqslant0$，

解得 $m\leqslant1$.

方程②有实数根的充要条件是

$\Delta_2=16m^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant0$，

解得 $m\geqslant-\frac{5}{4}$.

$\therefore$ $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant1$.

$\because$ $m\in\mathbf{Z}$， $\therefore$ $m=-1$,或 $m=0$,或 $m=1$.

当 $m=-1$ 时,方程①为 $x^2+4x-4=0$ 无整数解；

当 $m=0$ 时,方程②为 $x^2-5=0$ 无整数解；

当 $m=1$ 时,方程①为 $x^2-4x+4=0$ 有整数解，

方程②为 $x^2-4x-5=0$ 也有整数解.

所以方程①②都有整数解的充要条件是 $m=1$.

注意 从本例的解法中可以看出,如果直接寻找使一个结论成立的充要条件比较困难时,可先找出其成立的必要条件,然后从中筛选出符合要求的充要条件.

训练

A 组

1. (1) 在"$x^2+(y-2)^2=0$ 是 $x(y-2)=0$ 的充分不必要条件"中,已知条件是________,结论是________.

   (2) 在"$y=ax^2+bx+c$ 的图象过点$(1,0)$的充要条件是 $a+b+c=0$"中,已知条件是________，结论是________.

2. 从"充分不必要条件"、"必要不充分条件"或"充要条件"中选出适当的一种填空：

   (1) "$A=\varnothing$"是"$A\cup B=B$"的________.

   (2) "$A\subsetneqq B$"是"$A\cap B=A$"的________.

   (3) "$x\in A$"是"$x\in A\cap B$"的________.

   (4) "$a^2>4b$"是"方程 $x^2+ax+b=0$ 有实数根"的________.

   (5) 当 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}$ 时,"$x=0$,且 $y=0$,且 $z=0$"是"$x^2+y^2+z^2=0$"的________.

   (6) 已知 $p:x^2=x+2,q:x\sqrt{x+2}=x^2$,则 p 是 q 的________条件.

3. 从"充分不必要条件"、"必要不充分条件"、"充要条件"或"既不充分也不必要条件"中选出适当的一种填空：

   (1) "四边形的对角线互相平分"是"四边形为矩形"的________.

   (2) "四边形的对角线相等且互相平分"是"四边形为矩形"的________.

   (3) "四边形内接于圆"是"四边形对角互补"的________.

   (4) 设$\odot O_1$,$\odot O_2$ 的半径分别为 r_1,r_2,"$O_1O_2=r_1+r_2$"是"两圆外切"的________.

4. 设命题甲为:$0<x<5$,命题乙为:$|x-2|<3$,则命题甲是命题乙的(　　).

   (A) 充分不必要条件
   (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件
   (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $p:\alpha$ 为第二象限角,$q:\sin\alpha>\cos\alpha$,则 p 是 q 成立的(　　).

   (A) 充分不必要条件
   (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件
   (D) 既不充分也不必要条件

6. $\begin{cases}x_1>3,\\x_2>3\end{cases}$是$\begin{cases}x_1+x_2>6,\\x_1\cdot x_2>9\end{cases}$成立的(　　).

   (A) 充分不必要条件
   (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件
   (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为同一平面内的非零向量,甲:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,乙:$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则(　　).

   (A) 甲是乙的充分不必要条件
   (B) 甲是乙的必要不充分条件
   (C) 甲是乙的充要条件
   (D) 甲是乙的既不充分也不必要条件

8. 设 p:$\triangle ABC$ 的一个内角为 $60°$,q:$\triangle ABC$ 的内角满足 $A-B=B-C$,则 p 是 q 的(　　).

   (A) 充分不必要条件
   (B) 必要不充分条件
   (C) 充要条件
   (D) 既不充分也不必要条件

9. 设 $p=\{m|-1<m<0\}$,$q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0\}$对任意实数 x 恒成立,则(　　).

   (A) q 是 p 的充分不必要条件
   (B) q 是 p 的必要不充分条件
   (C) q 是 p 的充要条件
   (D) q 是 p 的既不充分也不必要条件

10. 求方程 $mx^2+(2m+3)x+1-m=0$ 有一个正根和一个负根的充要条件.

11. 设 x,y 为实数，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

12. 已知方程 $x^2-mx+2m-3=0$ 的两个根均大于 1，求实数 m 的取值范围.

B 组

13. 设集合 A,B 是全集 U 的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的(　　).
    (A) 充分不必要条件
    (B) 必要不充分条件
    (C) 充要条件
    (D) 既不充分也不必要条件

14. "$b^2=ac$"是"$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$"的(　　).
    (A) 充分不必要条件
    (B) 必要不充分条件
    (C) 充要条件
    (D) 既不充分也不必要条件

15. "$a=1$"是"函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π"的(　　).
    (A) 充分不必要条件
    (B) 必要不充分条件
    (C) 充要条件
    (D) 既不充分也不必要条件

16. "$m=\frac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 互相垂直"的(　　).
    (A) 充分不必要条件
    (B) 必要不充分条件
    (C) 充要条件
    (D) 既不充分也不必要条件

17. "$k>4,b<5$"是"一次函数 $y=(k-4)x+b-5$ 的图象交 x 轴于正半轴，交 y 轴于负半轴"的________条件.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=p^n+q$ ($p\neq 0$，且 $p\neq 1$)，求证：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件为 $q=-1$.

19. 求方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实数根的充要条件.

20. 求方程 $y=a|x|$ 和方程 $y=x+a$ ($a>0$) 的曲线有两个交点的充要条件.

1.3 简单的逻辑联结词

例 说

例 1 已知命题 p,q，将下列命题用"且"、"或"、"非"联结成"$p\wedge q$"、"$p\vee q$"和"$\neg p$"形式的新命题，并判断新命题的真假.

(1) p：π 是无理数，q：π 是正数.

(2) p：$3>5$，q：$3+5=8$.

(3) p：垂直于同一平面的两个平面平行，q：平行于同一平面的两个平面平行.

(4) p：存在实数 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x+2<x^2$，q：对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2+1>0$.

解 (1) p 是真命题，q 是真命题.

$p\wedge q$：π 是无理数且 π 是正数. 它是真命题.

$p\vee q$：π 是无理数或 π 是正数. 它是真命题.

$\neg p$：π 不是无理数. 它是假命题.

(2) p 是假命题，q 是真命题.

$p\wedge q$：$3>5$ 且 $3+5=8$. 它是假命题.

$p\vee q$：$3>5$ 或 $3+5=8$. 它是真命题.

$\neg p$：3 不大于 5 ($3\leqslant 5$). 它是真命题.

(3) p 是假命题，q 是真命题.

$p\wedge q$：垂直于同一平面的两个平面平行且平行于同一平面的两个平面平行. 它是假命题.

$p\vee q$：垂直于同一平面的两个平面平行或平行于同一平面的两个平面平行. 它是真命题.

$\neg p$：垂直于同一平面的两个平面不一定平行. 它是真命题.

(4) p 是真命题,q 是真命题.

$p\wedge q$:存在实数 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x-2<x^2$ 且对于任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2+1>0$. 它是真命题.

$p\vee q$:存在实数 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x+2<x^2$ 或对于任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2-1>0$. 它是真命题.

$\neg p$:不存在实数 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x+2<x^2$. 它是假命题.

例 2 如果把下列命题看做是由命题 p,q 用逻辑联结词联结构成的,指出它们的构成形式,并判断其真假.

(1) 非空集合 $A\cap B$ 中的元素,既是集合 A 的元素,也是集合 B 的元素.

(2) $5\geqslant 3$.

(3) 梯形的中位线平行于两底且等于两底之和.

(4) 9 或 6 是 45 的约数.

(5) 正数或 0 的平方根是实数.

(6) 方程 $x^2-x+1=0$ 没有实数根.

解 (1) 是"$p\wedge q$"的形式,其中

p:非空集合 $A\cap B$ 中的元素,是集合 A 中的元素,

q:非空集合 $A\cap B$ 中的元素,是集合 B 中的元素.

由于 p 是真命题,q 是真命题,所以原命题是真命题.

(2) 是"$p\vee q$"的形式,其中 p:$5>3$,q:$5=3$.

由于 p 是真命题,q 是假命题,所以原命题是真命题.

(3) 是"$p\wedge q$"的形式,其中

p:梯形的中位线平行于两底,

q:梯形的中位线等于两底之和.

由于 p 是真命题,q 是假命题,所以原命题是假命题.

(4) 是"$p\vee q$"的形式,其中 p:9 是 45 的约数,q:6 是 45 的约数.

由于 p 是真命题,q 是假命题,所以原命题是真命题.

(5) 是"$p\vee q$"的形式,其中

p:正数的平方根是实数;

q:0 的平方根是实数.

由于 p 是真命题,q 是真命题,所以原命题是真命题.

(6) 是"$\neg p$"的形式,其中 p:方程 $x^2-x+1=0$ 有实数根.

由于 p 是假命题,所以原命题是真命题.

注意 逻辑中的"或"不同于日常生活习惯用语中的"或",如"方程 $x^2=4$ 的解是 $x=\pm 2$",习惯上说成"方程 $x^2=4$ 的解是 $x=2$ 或 $x=-2$",但这里的"或"并不是逻辑意义上的"或",不能把这个命题看做由命题 p:方程 $x^2=4$ 的解是 $x=2$ 和命题 q:方程 $x^2=4$ 的解是 $x=-2$ 构成的"$p\vee q$"的形式;否则 p,q 都是假命题,从而得到"$p\vee q$"是假命题,但是"方程 $x^2=4$ 的解是 $x=\pm 2$"却是真命题,产生矛盾. 实际上,这里"或"的含义是"和",这个命题准确的叙述应为:"方程 $x^2=4$ 的解是 $x=2$ 和 $x=-2$".

又如"正数 a 属于 $\{x|x>6\}$ 或属于 $\{x|x\leqslant 6\}$",由于无法判断"正数 a 属于 $\{x|x>6\}$"的真假,所以这个语句不是命题,因此不能把"正数 a 属于 $\{x|x>6\}$ 或属于 $\{x|x\leqslant 6\}$"看做是命题"$p\vee q$"的形式. 类似地,还有"非空集合 $A\cup B$ 中的元素是集合 A 中的元素或是集合 B 中的元素"也不是命题"$p\vee q$"的形式. 但是第(1)题中"非空集合 $A\cap B$ 中的元素,既是集合 A 中的元素,也是集合 B 中的元素"是命题"$p\wedge q$"的形式,请作比较.

例 3 用逻辑连结词表示下列式子.

(1) $x=\pm 2$. (2) $\begin{cases}x=3,\\ y=-1.\end{cases}$

(3) $xy=0$. (4) $xy\neq 0$.

(5) $x^2+y^2=0$. (6) $x^2+y^2\neq 0$.

解 (1) $x=2$ 或 $x=-2$.

(2) $x=3$ 且 $x=-1$.

(3) $x=0$ 或 $y=0$.

(4) $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$.

(5) $x=0$ 且 $y=0$.

(6) $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$.

注意 有些语句或表达式尽管不是命题,但也可以用逻辑联结词联结而构成新的语句或表达式,其方法、含义和规则与命题的联结相同.

训 练

A 组

1. "$ab\neq 0$"是指(　　).
   (A) $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$
   (B) $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$
   (C) a,b 至少有一个不为 0
   (D) 不都为 0
2. 命题"$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形"的形式是(　　).
   (A) $p\vee q$ (B) $p\wedge q$
   (C) $\neg p$ (D) 以上都不对
3. 给定命题 p:2 是质数,命题 q:3 是合数,那么下列结论正确的是(　　).
   (A) "$p\vee q$"是真命题 (B) "$p\wedge q$"是真命题
   (C) "$\neg p$"是真命题 (D) "$\neg q$"是假命题
4. 对于下列"$\neg p$"形式的命题,错误的是(　　).
   (A) $\sqrt{2}$不是有理数
   (B) $\pi\neq 3.14$
   (C) 方程 $2x^2+3x+21=0$ 没有实数根
   (D) 等腰三角形不可能有 120°的内角
5. 如果命题"$p\vee q$"是真命题,"$\neg p$"是假命题,那么(　　).
   (A) 命题 p 一定是假命题
   (B) 命题 q 一定是假命题
   (C) 命题 q 一定是真命题

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertong