高等数学

解题指引与同步练习

⑧ 多元函数微分学

曾令武　吴　满　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指引与同步练习/曾令武，吴满编著.—广州：华南理工大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5623-2708-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①曾…②吴…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 200962 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn

责任编辑：欧建岸　乔　丽

印 刷 者：广州市穗彩彩印厂

开　　本：787mm×960mm　1/16　**印张**：32　**字数**：645 千

版　　次：2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷

印　　数：1～5000 册

定价（1～10 册）：48.50 元

前 言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分，它不同于普通高等教育，有着自身的特点.因此，编写、使用适合成人教育特点的教材及辅导用书，是提高教学质量的有力保证.作者从事各类不同层次数学学科的教学近50年，在长期的教学实践中，深知要使学生掌握数学的"三基"（基本概念、基本理论、基本方法），必须要通过一定数量的习题练习才能实现.为了达到这个目标，作者作了一种新的尝试，把辅导与练习合编成一册，即对每章的"三基"内容给予小结，并举例作解题指引，接着安排一些基本练习题给读者反复练习，以便及时巩固"三基".然后配置适量的拓展题给读者一个充分训练的平台.章末附有习题答案.

本书可作为成人高等教育院校各类专业的辅导用书.对专科学生，书中的拓展题部分及有"*"号标记的内容不作要求.

本书的编写和出版，自始至终得到了华南理工大学继续教育学院有关领导的大力支持，在此向他们表示感谢.

由于水平所限，书中不完善之处，恳请同仁和读者批评指正.

编 者

2007年10月于广州

出版说明

由吴满、曾令武编著的这套教学辅导与练习册，在华南理工大学继续教育学院使用已 10 年，一直得到任课教师和学生的好评，这次出版的是第三次修订本.

学好数学就一定要做习题. 我国伟大的数学家华罗庚说过，“学数学不做习题，等于你进了一个宝藏后出来时却是两手空空的”. 两位作者从事成人教育多年，十分了解成人教育的特点，即学员都是在做好本职工作的前提下，业余学习，甚至部分学生还需兼顾家庭. 因此，如何利用更少的时间完成学习任务是学生面对的实际问题. 作者根据多年的教学经验，把辅导与练习合编成一册，对每章的“三基”内容给予小结，并精选一些例题，指引学生掌握解题的要领. 然后安排一些基本题型，分类编排，使学生由浅入深地掌握数学的基本知识. 最后配置适量的拓展题给学生一个充分训练的平台，使部分学生的学习能力提高一个层次，为以后深造打下坚实的基础.

练习题目都留出空白给学生解题之用，免去再抄题目而省时，任课教师批改作业也很方便. 因此，这是一套很实用的教辅工具.

华南理工大学继续教育学院

教学主管院长　金军

多元函数微分学

多元函数微分学是一元函数微分学的推广，两者有密切的联系，但在概念理论及计算方法上还是有些实质性的差异．本章重点是二元函数微分学，因为从二元推广到更多元时并没有本质的差别．在学习时，要注意将二元函数与一元函数相对照，寻找它们之间的异同点，这样有助于学好多元函数微分学．

一、二元函数

二元函数记作

$$z = f(x,y) \quad 或 \quad z = z(x,y)$$

函数的定义域和对应规则是确定函数的两个要素，只要它们给定，函数就可完全确定．

1．求二元函数的定义域

与求一元函数的定义域相似，也需依据如下基本规定：

(1) 分式的分母不能为 0；

(2) 偶次根式下不能小于 0；

(3) 对数式的真数应大于 0；

(4) 正弦、余弦值的绝对值不能大于 1；

(5) 表达式由几项组成时，应取各项的定义域的公共部分．

例 1　求函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的定义域．

解　依据上述规定(2)，应有

$$R^2-x^2-y^2 \geqslant 0$$

因此，所给函数的定义域为

$$x^2+y^2 \leqslant R^2$$

如图 8-1 所示(闭圆域)．

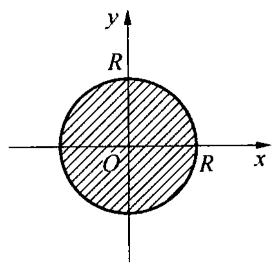

图 8-1

例 2　求函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ 的定义域．

解　依据规定(1)与(2)，应有

$$R^2-x^2-y^2>0$$

所以函数的定义域为

$$x^2 + y^2 < R^2$$

如图 8-2 所示(开圆域).

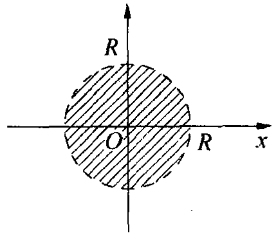

图 8-2

例 3 求函数 $z = \arcsin \frac{x}{a} + \arccos \frac{y}{b}$ 的定义域,其中 $a>0, b>0$.

解 依据规定(4),应有

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1 \\ \left|\frac{y}{b}\right| \leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| \leqslant a \\ |y| \leqslant b \end{cases}$$

即由 $-a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$ 所确定的区域(图 8-3 的闭矩形域)就是所给函数的定义域.

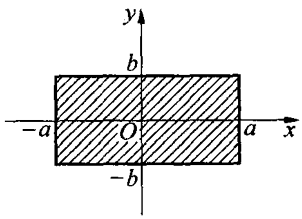

图 8-3

例 4 求函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x+y)$ 的定义域.

解 所给函数可看成两个函数的乘积,第一个函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$,依据规定(1)与(2),应有 $x>0$.

第二个二元对数函数 $\ln(x+y)$ 依据规定(3),它的真数必须大于 0,即 $x+y>0$.

因此,所给函数的定义域由

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

所确定的区域,如图 8-4 所示.

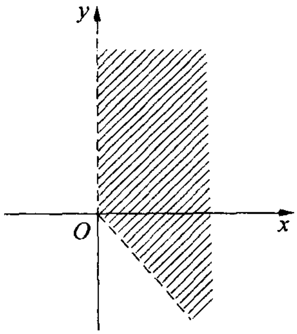

图 8-4

2. 函数符号的运用

与一元函数类似,也有如下两种运算:

(1) 已知二元函数 $f(x,y)$ 的表达式,求二元复合函数 $f(u(x,y), v(x,y))$ 的表达式;

(2) 反之,已知复合函数 $f(u(x,y), v(x,y))$ 的表达式,求 $f(x,y)$ 的表达式.

例 5 已知 $f(x,y) = x^2 + 4y$,求 $f(x-y, xy)$.

解 由所给函数的表达式求 $f(x-y; xy)$,实质就是用 $u = x - y$ 替换 $f(x,y) = x^2 + 4y$ 中的 x,用 $v = xy$ 替换 $f(x,y) = x^2 + 4y$ 中的 y,即

$$\begin{aligned} f(x-y, xy) &= (x-y)^2 + 4xy \\ &= x^2 + y^2 - 2xy + 4xy = (x+y)^2 \end{aligned}$$

例 6 已知 $f(x-y,x+y)=x^2+3y^2$,求 $f(x,y)$.

解法 1 用变量替换法,令 $x-y=u,x+y=v$. 由方程组

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \quad 解出 \quad \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

再代入所给函数表达式,得

$$f(u,v)=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+3\left(\frac{v-u}{2}\right)^2=u^2-uv+v^2$$

将上式中的 u 与 v 分别换成 x 与 y,则得所求函数为

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

***解法 2** 用"凑"的方法,将复合函数 $f(x-y,x+y)$ 的表达式 x^2+3y^2 凑成以 $x-y$ 和 $x+y$ 为运算元素的表达式. "凑"的过程常用分组分解、配方、插项等恒等变形.

$$\begin{aligned} x^2+3y^2 &= (x^2+2xy+y^2)-2xy+2y^2=(x+y)^2-2y(x-y) \\ &= (x+y)^2-[(x+y)-(x-y)](x-y) \\ &= (x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2 \end{aligned}$$

即

$$f(x-y,x+y)=(x+y)^2-(x+y)(x-y)+(x-y)^2$$

将上式中的 $x-y$ 换成 x,$x+y$ 置换为 y,得

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

必须指出,一般只有已知复合函数的表达式比较简单,才能凑得出来.

3. 二元函数的几何表示

在空间直角坐标系中,二元函数 $z=f(x,y)$ 通常表示一张曲面,如图 8-5 所示,该曲面在 xOy 平面上的投影域就是所给二元函数的定义域 D.

例 7 作二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形.

解 函数的定义域为 $x^2+y^2\leqslant 1$,在 xOy 平面上是以原点为圆心的单位圆内部及其边界.

函数的图形是球心在原点、半径为 1 的上半球面,如图 8-6 所示.

例 8 作二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形.

解 由空间解析几何可知,它的图形是开口向上的上半圆锥面,如图 8-7 所示. 它在 xOy 坐标面上的投影域是全平面,即函数的定义域为

$$D:\begin{cases} -\infty<x<+\infty \\ -\infty<y<+\infty \end{cases}$$

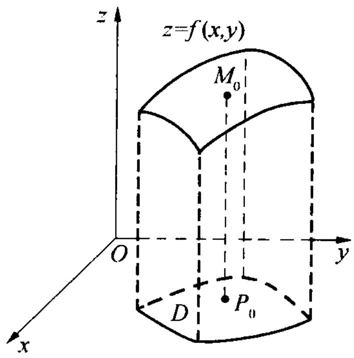

图 8-5

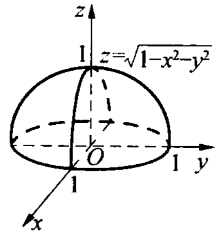

图 8-6

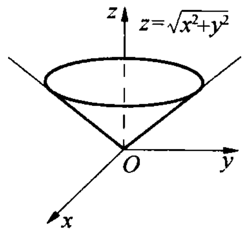

图 8-7

习题 8－1

基本练习题

1．求下列函数的定义域：

(1) $z=\dfrac{xy}{x-y}$；

解

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

解

(3) $z=\ln(1-x^2-y^2)$；

解

(4) $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{4}+\ln(x^2+y^2-1)$；

解

(5) $z=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$;

解

(6) $z=\sqrt{2x-\sqrt{y}}$;

解

(7) $z=\sqrt{2x-y}+\ln(y-x)+\arcsin(x-3)$.

解

2. 设 $F(x,y)=\frac{x-2y}{2x-y}$,求 $F(1,3)$,$F(x+\Delta x,0)$.

解

3. 设 $f(x,y)=x^3+2y^3$,求 $f(-x,-y)$.

解

4. 设 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$,求 $f\left(\frac{1}{y},\frac{1}{x}\right)$.

解

5. 设 $f(x,y)=\frac{4xy}{x^2+y^2}$,求 $f(y,x)$及 $f\left(1,\frac{x}{y}\right)$.

解

6. 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$,求 $f(x-y,x+y)$.

解

7. 设 $f(x,y)=3x+2y$,求 $f(xy,f(x,y))$.

解

8. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\cdot\arctan\frac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$.

解

9. 已知 $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=x^3-2xy+3y^2$,求 $f(x,y)$.

解

10. 描绘下列函数的图形：

(1) $z=x^2+y^2$；　　(2) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

解

拓展题

11. 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解

12. 设 $f(x+y,e^{x-y})=4xye^{x-y}$，求 $f(x,y)$.

解

二、二元函数的极限

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，如果动点 $P(x,y)$ 在该邻域内以任意方式趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$，其对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个定数 A，就说数 A 是二元函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

值得注意的是：

在一元函数中，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的动点 x 只能在数轴上从 x_0 的左、右两侧趋近于 x_0；

而二元函数中，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 的动点 $P(x,y)$ 是在平面点集 D($f(x,y)$ 的定义域)中去趋近于 $P_0(x_0,y_0)$，方向可以任意，路径也可以是多姿多彩的. 因此，如果 $P(x,y)$ 仅以某些特殊方式，例如沿着一条(或几条)给定的直线或给定的曲线路径趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数值 $f(x,y)$ 能无限接近同一个常数，也还不能断定该函数在 $P\to P_0$ 时的极限存在. 但反过来，如果 P 以某一特殊方式趋于 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 极限不存在；或者 P 以不同方式趋于 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 趋于不同的值，这时都可以断言 $P\to P_0$ 时函数 $f(x,y)$ 的极限不存在.

*__例 9__　讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解　当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$($k\neq 0$，常数)趋于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

而当点 $P(x,y)$ 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

对于求二重极限，在一元函数中极限的四则运算法则、两个重要极限、利用无

穷小的性质等方法仍然适用.

*例 10　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解　对异于 $P_0(0,0)$且使 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$有定义的点 $P(x,y)$,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2$$

*例 11　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解　对异于 $P_0(0,a)$且使 $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$有定义的点$P(x,y)$,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot a=a$$

*例 12　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解　因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)=0$(无穷小),而$\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$(有界),所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

三、二元函数的连续性

(1) 二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处满足 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,

即同时具备以下三个条件:

①$f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$及其邻域内有定义,其中 $f(x_0,y_0)$是定值;

②$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$(极限存在);

③函数值 $f(x_0,y_0)$等于极限值 A,即 $f(x_0,y_0)=A$.

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续.否则,称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处间断.

例 13　讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$的连续性.

解 在原点(0,0)处函数有定义,即 $f(0,0)=0$.但

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}$$

显然,随着 k 的取值不同,$\frac{2k}{1+k^2}$的值也不同.所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在,点(0,0)是间断点.

除原点(0,0)以外,函数 $f(x,y)$在 xOy 平面的其他点处连续.

例 14 讨论函数 $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}-1}$的连续性.

解 所给函数在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每一点都是间断点,因为在圆周上的点,函数无定义,圆周 $x^2+y^2=1$ 是该函数的一条间断线.

(2) 由变量 x,y 的基本初等函数及常数经过有限次四则运算与复合步骤而构成的,且用一个数学式子表示的二元初等函数在其定义区域内是连续的.

(3) 有界闭区域 D 上的二元连续函数,在 D 上一定存在最大值和最小值.

习题 8-2

基本练习题

13. 求下列函数的连续区域:

(1) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$;

解

(2) $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

解

14. 下列函数在何处间断?

(1) $z=\ln(x^2+y^2)$;

解

(2) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$;

解

(3) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$.

解

四、偏导数

1. 二元函数偏导数定义

在函数 $z=f(x,y)$的定义域内讨论.

在点(x_0,y_0)处,当 y 固定在y_0,而 x 在x_0 有增量 Δx 时,相应函数有增量

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0) \quad (\text{称为对 } x \text{ 的偏增量})$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \quad f_x(x_0,y_0) \quad z'_x(x_0,y_0)$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在,或记作$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $f_y(x_0,y_0)$, $z'_y(x_0,y_0)$ (其中 $\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$称为对 y 的偏增量).

若将(x_0,y_0)换为(x,y),称

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\quad (x,y)\in D$$

为 z 对 x 的偏导函数(简称对 x 的偏导数),或记作$\frac{\partial f}{\partial x}$,$f_x(x,y)$,$z'_x$.

而 z 对 y 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

或记作$\frac{\partial f}{\partial y}$,$f_y(x,y)$,$z'_y$.

推广:二元以上的多元函数的偏导数可类似地定义.例如,三元函数 $u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处对 x 的偏导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\quad (y,z\text{ 固定})$$

同样地,可以分别定义偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$,$\frac{\partial u}{\partial z}$.

2. 偏导数的求法

依据多元函数偏导数的定义,只有一个自变量是变化的,而其他自变量都固定(看作常数),这实际上是将多元函数看成一元函数.因此,求多元函数对于某一个自变量的偏导数就相当于求一元函数的导数.所以,一元函数的求导公式与法则对求多元函数的偏导数仍然适用.

例如,给定一个二元函数 $z=f(x,y)$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$时,应将函数 $z=f(x,y)$中的变量 y 看成常量,而对自变量 x 求导.

若求 $f_x(x_0,y_0)$,因它是偏导函数 $f_x(x,y)$在点(x_0,y_0)处的函数值,所以只需用 $x=x_0$,$y=y_0$ 代入偏导函数,即

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

同理,求$\frac{\partial z}{\partial y}$时,应将函数 $z=f(x,y)$中的变量 x 看成常量,而对自变量 y 求导.

而 $f_y(x_0,y_0)$是 $f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)处的函数值.

例 15 设 $z=x^{2y}(x>0)$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 求$\frac{\partial z}{\partial x}$时,将函数表达式 x^{2y}中的 y 看成常量,应用公式$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^{2y})'_x=2yx^{2y-1}$$

求$\frac{\partial z}{\partial y}$时,将表示式 x^{2y}中的 x 看成常量,应用公式$(a^x)'=a^x\ln a$ 及复合函数求导法则,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^{2y})'_y=x^{2y}\ln x\cdot(2y)'_y=2x^{2y}\ln x$$

例 16 求函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$的偏导数.

解 将 y 看作常数,对 x 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\arctan\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

把 x 看作常数,对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\arctan\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

例 17 求函数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$ 在点(1,3)处的偏导数.

解 先求两个偏导函数,然后将点(1,3)代入.

$$f_x(x,y)=(x^2+2xy-y^2)'_x=2x+2y$$

$$f_y(x,y)=(x^2+2xy-y^2)'_y=2x-2y$$

将点(1,3)代入上面两式,得

$$f_x(1,3)=(2x+2y)\Big|_{\substack{x=1\\y=3}}=8\qquad f_y(1,3)=(2x-2y)\Big|_{\substack{x=1\\y=3}}=-4$$

例 18 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$,求 $f_x(3,4),f_y(3,4)$.

解法 1 先求两个偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(x+y-\sqrt{x^2+y^2})'_x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(x+y-\sqrt{x^2+y^2})'_y=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

再将点(3,4)分别代入上面两个偏导数,便可求出该点的偏导数特定值

$$f_x(3,4)=\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_{\substack{x=3\\y=4}}=1-\frac{3}{\sqrt{9+16}}=\frac{2}{5}$$

$$f_y(3,4)=\left(1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_{\substack{x=3\\y=4}}=1-\frac{4}{\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}$$