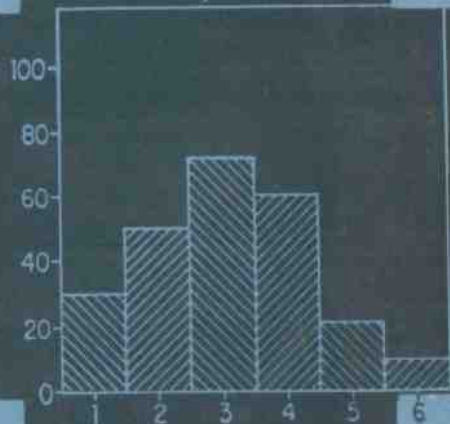
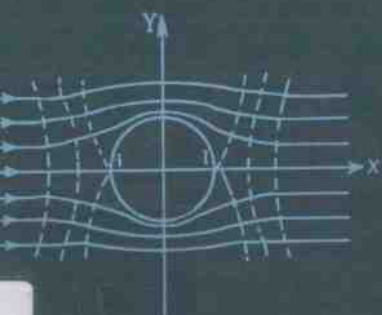
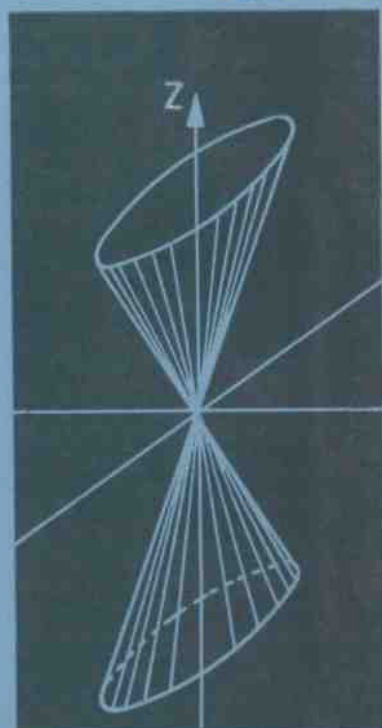


大專數學 下冊

編著者

楊 維 哲
沈 長 庚



東華書局 印行



版權所有·翻印必究

中華民國六十八年十一月初版

中華民國七十四年八月三版

大專
用書 **大專數學** (全二冊)

下冊 **新臺幣壹佰肆拾元整**

(外埠酌加運費滙費)

著者 楊維哲 沈長庚

發行人 卓 鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(68090)

編輯大意

- 一、我們的目標是在訓練同學們，能瞭解數學的目的和方法，以爲學習其它學科的工具。
- 二、本書取材注意於數學的實用性，講解力求精確清楚，多附例題驗證，並且儘量避免難深的理論，希望能使同學們易於了解。
- 三、本書初版難免會有考慮不周的地方，盼望各校老師和同學多來信提供意見，以便再版時參考改進。

下 冊

目 次

第一章 不等式	1 - 24
1-1 不等式的基本性質	1
1-2 絕對不等式	6
1-3 條件不等式及其解集	14
第二章 指數與對數	25 - 60
2-1 指數	25
2-2 指數函數	39
2-3 對數與對數函數	43
2-4 對數表	49
2-5 指數與對數方程式	57
第三章 函數的極限與連續	61 - 85
3-1 極限的觀念與定義	62
3-2 單邊極限	70
3-3 無窮極限	73
3-4 極限的基本性質	76
3-5 函數的連續性	81

第四章 導函數	86-118
4-1 導數與導函數.....	86
4-2 導數的幾何意義.....	90
4-3 微分公式.....	98
4-4 合成函數的導函數(連鎖律).....	105
4-5 隱函數的微分法.....	112
4-6 高階導函數.....	115
第五章 超越函數的導函數	119-139
5-1 三角函數的導函數.....	119
5-2 反三角函數的導函數.....	124
5-3 自然對數與自然指數函數.....	128
5-4 雙曲線函數.....	136
5-5 一般對數函數與指數函數的導函數.....	137
第六章 導函數的應用	140-168
6-1 函數的極值.....	140
6-2 均值定理.....	152
6-3 羅必達法則.....	156
6-4 函數圖形的描繪.....	160
6-5 速度與加速度.....	165
第七章 定積分與不定積分	169-184
7-1 定積分的定義.....	169

7-2	不定積分	176
7-3	微積分基本定理	179
第八章	積分的方法	185-210
8-1	一些基本公式	185
8-2	變數變換積分法	190
8-3	分部積分法	197
8-4	三角函數積分法	201
8-5	有理函數積分法	205
第九章	定積分的應用	211-230
9-1	面積	211
9-2	旋轉體的體積	216
9-3	旋轉面的面積	218
9-4	功	223
9-5	重心	226
第十章	無窮級數	231-252
10-1	無窮級數及其收斂性	231
10-2	交錯級數	238
10-3	冪級數	241
10-4	泰勒級數與馬克勞林級數	246
10-5	瑕積分	249

第十一章 立體解析幾何	253-289
11-1 空間坐標系與距離公式.....	255
11-2 方向餘弦與方向數.....	259
11-3 平面與直線方程式.....	267
11-4 角之求法.....	275
11-5 球與柱面.....	281
11-6 柱面與球面坐標.....	285
第十二章 偏微分	290-321
12-1 多變數函數的極限及其連續性.....	290
12-2 偏導數.....	296
12-3 偏導數的幾何意義.....	302
12-4 連鎖律.....	306
12-5 全微分.....	309
12-6 極大與極小.....	314
第十三章 重積分	322-361
13-1 二重積分的定義與性質.....	322
13-2 疊積分.....	328
13-3 以極坐標求二重積分.....	335
13-4 三重積分.....	342
13-5 重積分的應用.....	351

第十四章 一階常微分方程式	362 - 384
14-1 基本定義	362
14-2 變數分離形一階微分方程式	367
14-3 一階齊次微分方程式	369
14-4 一階線性微分方程式	374
14-5 一階微分方程式的應用	379
第十五章 常係數線性常微分方程式	385 - 409
15-1 二階常係數齊次線性微分方程式	385
15-2 非齊次微分方程式	390
15-3 參數變化法	397
15-4 高階微分方程式	400
15-5 應用	405
附錄	410 - 419

第一章

不等式

在上冊第一章我們學到了量的抽象化而得的數系；在實數系內，除了數與數之間可以做加、減、乘、除諸運算之外，數與數之間還有大小的次序關係。這種運算和次序關係構成了數的兩種基本結構。

在本章，我們將以數的次序關係為出發點，逐步討論不等式的性質與其實際問題上的應用。

§ 1-1 不等式的基本性質

我們在上冊第一章時曾經說明過，在實數系 R 中關於次序關係有所謂三一律：對於 $a, b \in R$ ，則 $a < b$ ， $a = b$ ， $a > b$ 三者之中有唯一成立。

次序關係與運算之關係如下：

$$a > b \Leftrightarrow a - b \text{ 爲正 } (> 0);$$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0;$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b \text{ 爲負 } (< 0).$$

甲、不等式的基本性質

關於不等式，我們有下述的基本性質：

1. $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (遞移律)

【證明】 $a > b, b > c \Leftrightarrow a - b$ 與 $b - c$ 均為正數。

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (a-b) + (b-c) = a-c \text{ 爲正數} \\ &\Leftrightarrow a > c. \end{aligned}$$

(注意：證明中的第二箭頭只有單向成立)

II. 如果 a, b 同號而且都不爲 0, 則 $a > b \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

【證明】 a, b 同號 $\Rightarrow ab > 0$,

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{ab}(a-b) > 0 \quad (\because a > b)$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b} > \frac{1}{a}.$$

III. $a > b \Rightarrow -a < -b$.

【證明】 $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow -(a - b) < 0$
 $\Rightarrow -a - (-b) < 0$
 $\Rightarrow -a < -b.$

IV. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in R.$

【證明】 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$
 $\Leftrightarrow (a + c) - (b + c) = a - b > 0,$
 $\forall c \in R.$
 $\Leftrightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in R.$

V. $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d.$

【證明】 $a > b, c > d \stackrel{(IV)}{\Rightarrow} a + c > b + c, b + c > b + d$
 $\stackrel{(I)}{\Rightarrow} a + c > b + d.$

VI. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc.$

【證明】 $a > b, c > 0 \Rightarrow a - b > 0, c > 0$
 $\Rightarrow ac - bc = (a - b)c > 0$

$$\Rightarrow ac > bc.$$

$$\text{VII. } a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

$$\begin{aligned} \text{【證明】 } a > b, c < 0 &\Rightarrow a - b > 0, c < 0 \\ &\Rightarrow ac - bc = (a - b)c < 0 \\ &\Rightarrow ac < bc. \end{aligned}$$

$$\text{VIII. } a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd.$$

$$\begin{aligned} \text{【證明】 } a > b, c > 0 &\stackrel{\text{(VI)}}{\Rightarrow} ac > bc \\ c > d, b > 0 &\stackrel{\text{(VI)}}{\Rightarrow} bc > bd \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} a > b, c > 0 \\ c > d, b > 0 \end{aligned}} \right\} \stackrel{\text{(I)}}{\Rightarrow} ac > bd.$$

【例 1】（阿基米德性質） 設 a, b 為任意正實數，則存在有正整數 n 滿足 $na > b$ 。

【證明】 因為 a, b 為正實數，所以存在有正整數 $n(a)$ 與 $n(b)$ 滿足

$$n(a)a > 1, \because 0 < \frac{b}{n(b)} < 1. \quad (\text{即 } n(b) > b).$$

所以我們只要取 $n = n(a)n(b)$ ，即得

$$na = n(b)(n(a)a) > n(b) > b.$$

【例 2】 設 a, b 為正實數，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

【證明】 對於任意正實數 a, b ，我們都有下述性質：

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ &\Rightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \\ &\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\because a > 0, b > 0) \\ &\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

注意：上述不等式的意義為：任意二正實數的算術平均數不小於其幾何平均數，如果其等式成立，則 $a=b$ ，因為：

$$\begin{aligned} a+b &= 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 = 4ab \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab=0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2=0 \\ &\Leftrightarrow a=b. \end{aligned}$$

上述的性質有下述的推廣：

【定理1】 設 a_1, a_2, \dots, a_n 為任意正實數，則其算術平均數不小於幾何平均數；

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

【證明】 由例 2 知

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2, \quad \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \geq a_3 a_4,$$

以
$$\left(\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2 a_3 a_4,$$

例 2 可得

$$\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2 \geq \frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2},$$

所以
$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4 &\geq \left(\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \\ &\geq a_1 a_2 a_3 a_4. \end{aligned}$$

利用數學歸納法可知如果 n 為 2 的次方，則

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n.$$

如果 n 不是 2 的次方, 則我們可加一正整數 k 使得 $n+k=2^s$,

s 為正整數, 令 $\alpha = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > 0$, 則有

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+\overbrace{\alpha+\cdots+\alpha}^{k\text{個}}}{n+k}\right)^{n+k} \geq a_1 a_2 \cdots a_n \alpha^k$$

即
$$\left(\frac{n\alpha+k\alpha}{n+k}\right)^{n+k} \geq a_1 a_2 \cdots a_n \alpha^k.$$

$$\therefore \alpha^{n+k} \geq a_1 a_2 \cdots a_n \alpha^k$$

所以
$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n = \alpha^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots a_n.$$

這證明了我們所要的不等式。

習題 1-1

1. 試將下列各數依大小順序排列之：

$$7^6, 2^{18}, 3^{12}.$$

2. 設 a, b, c 為正實數, 試證明 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, 而且等式成立的充要條件為 $a=b=c$.

3. 設 a, b, c 為不等的正實數, 試證明下列各不等式：

(a) $(a+b)(b+c)(c+a) > 8abc$;

(b) $(a^3+b^3) > ab(a+b)$;

(c) $3(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)(bc+ca+ab)$;

(提示：利用 (b))

$$(d) \quad 2(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > a^3 + b^3 + c^3 + 15abc.$$

4. 設 a, b 為正實數，試證明 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$.

5. 如果 a, b 為實數，而且 $a^2 + b^2 = 1$. 則 $-\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{1}{2}$. 試證明之。

§ 1-2 絕對不等式

不等式中的文字，以任意實數代入時，不等式恒成立的，稱為絕對不等式 (absolute inequality) .

例如，對於任意實數 x, y , $x^2 + y^2 + 1 > 0$ 恒成立，所以 $x^2 + y^2 + 1 > 0$ 為絕對不等式。

為方便起見，如果不等式中的文字，以正實數代入，不等式恒成立時，我們也稱之為絕對不等式，只是在此情形，我們必須註明此不等式係在文字為正數時才成立。

例如，§ 1-1 中的定理 1，告訴我們當 a_1, a_2, \dots, a_n 為正數時， $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ 為一絕對不等式。

絕對不等式的證明常利用 § 1-1 中所述的基本性質。我們在這裡所敘述的都是一些基本的絕對不等式。

甲、Cauchy-Schwarz不等式

設 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 為任意實數，我們考慮空間向量

$$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{v} = (y_1, y_2, y_3);$$

則

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

其中 θ 為 \vec{u} 與 \vec{v} 的夾角, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

$\|\vec{v}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. 所以

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\cos^2\theta \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).\end{aligned}$$

因此

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

恒成立.

我們可以將此“直觀的”性質推廣如下:

【定理 1】 (Cauchy-Schwarz 不等式) 設 x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_n 為任意實數, 則

$$\begin{aligned}x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \\ \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.\end{aligned}$$

【證明】 如果 $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, 則上述等式成立. 故我們可以假設 y_1, y_2, \dots, y_n 為不全為 0 的實數.

對於 $t \in R$, 我們定義

$$f(t) = (x_1 + ty_1)^2 + (x_2 + ty_2)^2 + \dots + (x_n + ty_n)^2.$$

顯然 $f(t) \geq 0, \forall t \in R$. 令

$$X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

$$Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2,$$

$$Z = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

則 $Y \geq 0$ ，而且將 $f(t)$ 展開即得 t 的二次式：

$$f(t) = Yt^2 + 2Zt + X$$

將此二次式配方可得

$$\begin{aligned} Yf(t) &= (Y^2t^2 + 2ZYt + Z^2) + (XY - Z^2) \\ &= (Yt + Z)^2 + (XY - Z^2) \geq 0, \forall t \in R. \end{aligned}$$

今由假設 $Y \geq 0$ ，故令 $t = -Z/Y$ 即得

$$XY - Z^2 = Yf\left(-\frac{Z}{Y}\right) \geq 0.$$

這證明了 $XY - Z^2 \geq 0$ ，即 $XY \geq Z^2$ 。所以

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n &= Z \leq \sqrt{X} \sqrt{Y} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式在分析學中是一個重要的不等式。

【例 1】設 a_1, a_2, \dots, a_n 為正實數，試證明

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n^2.$$

【證明】設 $x_1 = \sqrt{a_1}$ ， $x_2 = \sqrt{a_2}$ ， \dots ， $x_n = \sqrt{a_n}$ ； $y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}$ ， $y_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$ ， \dots ， $y_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ 。則由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$n^2 = \left(\sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} &\leq [(\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2 + \cdots + (\sqrt{a_n})^2] \\ &\quad [(\frac{1}{\sqrt{a_1}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{a_2}})^2 + \cdots + (\frac{1}{\sqrt{a_n}})^2] \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} . \end{aligned}$$

乙、三角不等式

在國中數學中我們知道， $\triangle ABC$ 中任意兩邊的和大於第三邊。我們可以以 Cauchy-Schwarz 不等式對這一事實作一“代數的”證明：

【定理 2】 設 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ 為空間 E^3 中任意三點。則 $\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{CA}$ ；其中 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 表示 AB, BC, CA 各線段的長度。

【證明】 由上冊 §11-3，我們知道

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad \cdots (1)$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2} \quad \cdots (2)$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3)^2} \quad \cdots (3)$$

令 $x_i = b_i - a_i$, $y_i = c_i - b_i$, $z_i = a_i - c_i$, $i = 1, 2, 3$ 代入 (1), (2), (3)；則得

$$\overline{AB} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \geq 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

$$\overline{BC} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \geq 0 \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2} \geq 0 \quad \cdots (6) \end{aligned}$$