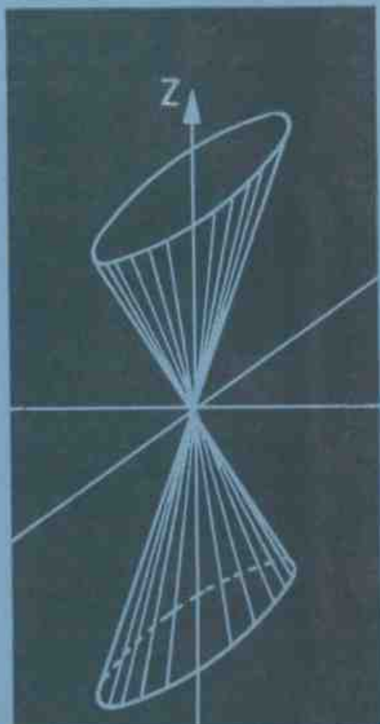
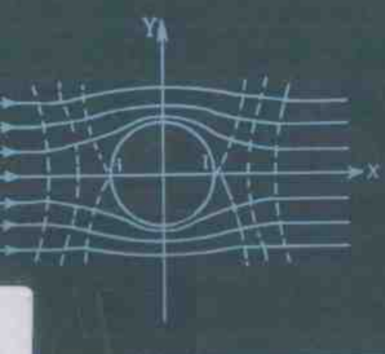
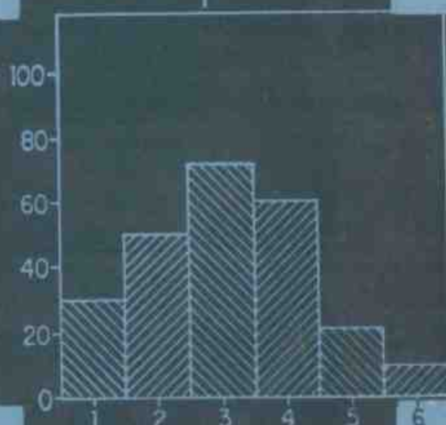
大專數學 下冊

編著者

楊 維 哲
沈 長 庚







東華書局 印行

中華民國六十八年十一月初版

中華民國七十四年八月三版

大專用書 大專數學（全二册）

下册 新臺幣壹佰肆拾元整

（外埠酌加運費滙費）

著 者 楊維哲 沈長庚

發行人 卓 鑫 淼

出版者 臺灣東華書局股份有限公司

臺北市博愛路一〇五號

電 話：3819470 郵 撥：6481

印刷者 合 興 印 刷 廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

（68090）

編 輯 大 意

一、我們的目標是在訓練同學們，能瞭解數學的目的和方法，以為學習其它學科的工具.

二、本書取材注意於數學的實用性，講解力求精確清楚，多附例題驗證，並且儘量避免艱深的理論，希望能使同學們易於了解.

三、本書初版難免會有考慮不周的地方，盼望各校老師和同學多來信提供意見，以便再版時參考改進.

下　　冊

目　　次

第一章

不等式

在上冊第一章我們學到了量的抽象化而得的數系；在實數系內，除了數與數之間可以做加、減、乘、除諸運算之外，數與數之間還有大小的次序關係.這種運算和次序關係構成了數的兩種基本結構.

在本章，我們將以數的次序關係為出發點，逐步討論不等式的性質與其實際問題上的應用.

§1-1　不等式的基本性質

我們在上冊第一章時曾經說明過，在實數系 R 中關於次序關係有所謂**三一律**：對於 $a,b\in R$，則 **$a<b$，$a=b$，$a>b$ 三者之中有唯一成立.**

次序關係與運算之關係如下：

$$a>b \Leftrightarrow a-b \text{ 為正 } (>0);$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b \text{ 為負 } (<0).$$

甲、不等式的基本性質

關於不等式，我們有下述的基本性質：

I.　$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$（**遞移律**）

【證明】　$a>b$，$b>c \Leftrightarrow a-b$ 與 $b-c$ 均為正數.

$$\Rightarrow (a-b)+(b-c)=a-c \text{ 為正數}$$

$$\Leftrightarrow a>c\ .$$

(**注意**：證明中的第二箭頭只有單向成立)

II. 如果 a,b 同號而且都不為 0，則 $a>b\Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}$.

【證明】 a,b 同號 $\Rightarrow ab>0$,

$$\because\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{ab}(a-b)>0 \quad (\because\ a>b)$$

所以 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$.

III. $a>b\Rightarrow -a<-b$.

【證明】 $a>b\Rightarrow a-b>0\Rightarrow -(a-b)<0$

$$\Rightarrow -a-(-b)<0$$

$$\Rightarrow -a<-b\ .$$

IV. $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c \quad \forall c\in R$.

【證明】 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$

$$\Leftrightarrow (a+c)-(b+c)=a-b>0\ ,$$

$$\forall c\in R\ .$$

$$\Leftrightarrow a+c>b+c \quad \forall c\in R\ .$$

V. $a>b\ ,c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

【證明】 $a>b\ ,\ c>d \overset{\text{(IV)}}{\Rightarrow} a+c>b+c\ ,\ b+c>b+d$

$$\overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} a+c>b+d\ .$$

VI. $a>b\ ,c>0\Rightarrow ac>bc$.

【證明】 $a>b\ ,\ c>0\Rightarrow a-b>0\ ,\ c>0$

$$\Rightarrow ac-bc=(a-b)c>0$$

$$\Rightarrow ac > bc .$$

VII.　$a > b$，$c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

【證明】　$a > b$，$c < 0 \Rightarrow a-b > 0$，$c<0$

$$\Rightarrow ac - bc = (a-b)c < 0$$

$$\Rightarrow ac < bc.$$

VIII.　$a > b > 0$，$c > d > 0 \Rightarrow ac > bd.$

【證明】

$$\left.\begin{aligned} a > b,\ c > 0 &\overset{(\mathrm{VI})}{\Rightarrow} ac > bc \\ c > d,\ b > 0 &\overset{(\mathrm{VI})}{\Rightarrow} bc > bd \end{aligned}\right\} \overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} ac > bd.$$

【例1】（阿基米德性質）　設 a, b 爲任意正實數，則存在有正整數 n 滿足 $na > b$.

【證明】　因爲 a, b 爲正實數，所以存在有正整數 $n(a)$ 與 $n(b)$ 滿足

$$n(a)\,a>1，0< \frac{b}{n(b)} <1.\ （即\ n(b) > b）.$$

所以我們只要取 $n = n(a)\,n(b)$，即得

$$na = n(b)\,(\,n(a)a\,) > n(b) > b\,.$$

【例2】　設 a, b 爲正實數，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

【證明】　對於任意正實數 a，b，我們都有下述性質：

$$\begin{aligned}(a-b)^2 \geq 0 &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0\\ &\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab\\ &\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab\\ &\Rightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2\\ &\Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}\ (\because a > 0,\ b > 0)\\ &\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

注意：上述不等式的意義爲：任意二正實數的算術平均數不小於其幾何平均數.如果其等式成立,則 $a=b$ ，因爲：

$$\begin{aligned} a+b=2\sqrt{ab} &\iff (a+b)^2=4ab \\ &\iff a^2+b^2-2ab=0 \\ &\iff (a-b)^2=0 \\ &\iff a=b. \end{aligned}$$

上述的性質有下述的推廣：

【定理 1】 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為任意正實數,則其算術平均數不小於幾何平均數； $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

【證明】 由例 2 知

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2\ ,\quad \left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \geq a_3 a_4,$$

以

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \geq a_1 a_2 a_3 a_4,$$

例 2 可得

$$\left(\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_1+a_2}{2}}{2}\right)^2 \geq \frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\ ,$$

所以

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4 &\geq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2 \\ &\geq a_1 a_2 a_3 a_4. \end{aligned}$$

利用數學歸納法可知如果 n 爲 2 的次方,則

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n .$$

如果 n 不是 2 的次方,則我們可加一正整數 k 使得 $n+k=2^s$,

s 爲正整數,令 $\alpha=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>0$, 則有

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+\overbrace{\alpha+\cdots+\alpha}^{k\text{個}}}{n+k}\right)^{n+k} \geq a_1a_2\cdots a_n\alpha^k$$

即
$$\left(\frac{n\alpha+k\alpha}{n+k}\right)^{n+k} \geq a_1a_2\cdots a_n\alpha^k .$$

$$\therefore\ \alpha^{n+k} \geq a_1a_2\cdots a_n\alpha^k$$

所以
$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\alpha^n \geq a_1\cdot a_2\cdot\cdots a_n.$$

這證明了我們所要的不等式.

習題 1-1

1. 試將下列各數依大小順序排列之:
   7^6, 2^{18}, 3^{12}.

2. 設 a, b, c 爲正實數,試證明 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, 而且等式成立的充要條件爲 $a=b=c$.

3. 設 a, b, c 爲不等的正實數,試證明下列各不等式:
   (a) $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$;
   (b) $(a^3+b^3)>ab(a+b)$;
   (c) $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$;
   (提示:利用 (b))

(d) $2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>a^3+b^3+c^3+15abc$.

4. 設 a、b 為正實數，試證明 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$.

5. 如果 a，b 為實數，而且 $a^2+b^2=1$. 則 $-\frac{1}{2}\leq ab\leq\frac{1}{2}$. 試證明之.

§1-2 絕對不等式

不等式中的文字，以任意實數代入時，不等式恒成立的，稱為**絕對不等式**(absolute inequality).

例如，對於任意實數 x，y，$x^2+y^2+1>0$ 恒成立，所以 $x^2+y^2+1>0$ 為絕對不等式.

為方便起見，如果不等式中的文字，以**正實數**代入，不等式恒成立時，我們也稱之為絕對不等式，只是在此情形，我們必須註明此不等式係在文字為正數時才成立.

例如，§1-1 中的定理 1，告訴我們當 a_1，a_2，…，a_n 為正數時，$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 為一**絕對不等式**.

絕對不等式的證明常利用 §1-1 中所述的基本性質. 我們在這裡所敍述的都是一些基本的絕對不等式.

甲、Cauchy-Schwarz不等式

設 x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3 為任意實數，我們考慮空間向量

$$\overrightarrow{u}=(x_1,x_2,x_3),\ \overrightarrow{v}=(y_1,y_2,y_3);$$

則

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\ \|\overrightarrow{v}\|\cos\theta,$$

其中 θ 爲 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角，$\|\vec{u}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$，$\|\vec{v}\|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$. 所以

$$\begin{aligned}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\cos^2\theta \\ &\leq (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2).\end{aligned}$$

因此

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

恒成立.

我們可以將此“直觀的”性質推廣如下：

【定理 1】　(**Cauchy–Schwarz不等式**)　設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 爲任意實數，則

$$\begin{aligned}&x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \\ &\leq \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}.\end{aligned}$$

【證明】　如果 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$，則上述等式成立.故我們可以假設 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 爲不全爲 0 的實數.

對於 $t\in R$，我們定義

$$f(t)=(x_1+ty_1)^2+(x_2+ty_2)^2+\cdots+(x_n+ty_n)^2.$$

顯然 $f(t)\geq 0$，$\forall t\in R$. 令

$$\begin{aligned}X&=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2,\\ Y&=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2,\\ Z&=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.\end{aligned}$$

則 $Y \gneqq 0$，而且將 $f(t)$ 展開卽得 t 的二次式：

$$f(t)=Yt^2+2Zt+X$$

將此二次式配方可得

$$\begin{aligned} Yf(t) &= (Y^2t^2+2ZYt+Z^2)+(XY-Z^2) \\ &= (Yt+Z)^2+(XY-Z^2) \geq 0\ , \forall t \in R. \end{aligned}$$

今由假設 $Y \gneqq 0$，故令 $t=-Z/Y$ 卽得

$$XY-Z^2=Yf\left(-\frac{Z}{Y}\right)\geq 0\ .$$

這證明了 $XY-Z^2 \geq 0$，卽 $XY \geq Z^2$. 所以

$$\begin{aligned} & x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \\ &= Z \leq \sqrt{X}\sqrt{Y} \\ &= \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\ \sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式在分析學中是一個重要的不等式.

【例1】 設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲正實數,試證明

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2\ .$$

【證明】 設 $x_1=\sqrt{a_1}$，$x_2=\sqrt{a_2}$，$\cdots$，$x_n=\sqrt{a_n}$；$y_1=\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}$，$y_2=\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}$，$\cdots$，$y_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$. 則由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$n^2=\left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2$$

$$\leq [(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2+\cdots+(\sqrt{a_n})^2]$$

$$[(\frac{1}{\sqrt{a_1}})^2+(\frac{1}{\sqrt{a_2}})^2+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{a_n}})^2]$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} .$$

乙、三角不等式

在國中數學中我們知道，$\triangle ABC$ 中任意兩邊的和大於第三邊．我們可以以 Cauchy-Schwarz 不等式對此一事實作一“代數的”證明：

【定理 2】　設 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$，$C(c_1, c_2, c_3)$ 為空間 E^3 中任意三點．則 $\overline{AB}+\overline{BC}\geq\overline{CA}$；其中 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$ 表示 AB，BC，CA 各線段的長度．

【證明】　由上冊 §11-3，我們知道

$$\overline{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} \quad \cdots(1)$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2} \quad \cdots(2)$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2+(a_3-c_3)^2} \quad \cdots(3)$$

令 $x_i=b_i-a_i$，$y_i=c_i-b_i$，$z_i=a_i-c_i$，$i=1,2,3$ 代入 (1)，(2)，(3)；則得

$$\overline{AB}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\geq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$
$$\overline{BC}=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\geq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$
$$\overline{CA}=\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$$
$$=\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2}\geq 0 \quad \cdots(6)$$